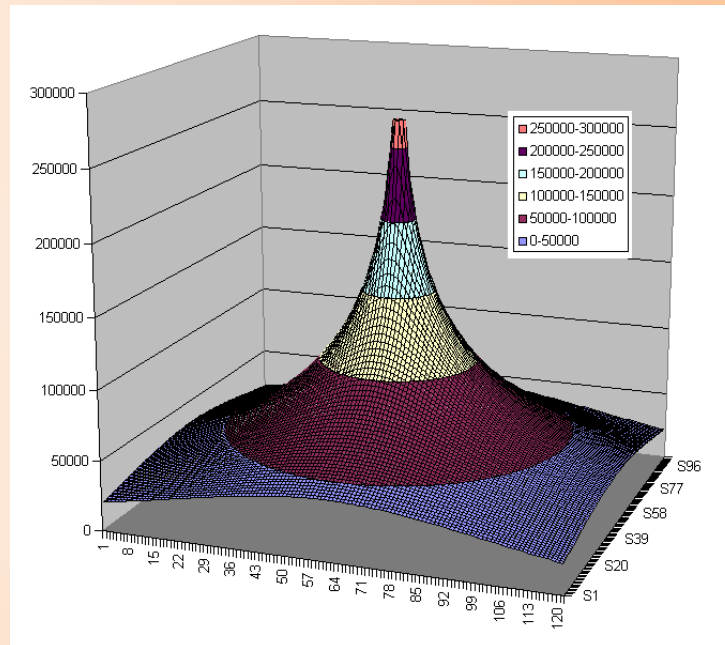


CAPITULO IV

POTENCIAL ELÉCTRICO



4.1 INTRODUCCIÓN.

Es sabido que todos los objetos poseen una propiedad conocida como carga eléctrica. Un campo eléctrico ejerce una fuerza sobre un objeto cargado, acelerando a éste en la dirección de la fuerza, ya sea en el mismo sentido o en el sentido opuesto a la dirección del campo. Si el objeto cargado tiene una carga positiva, la fuerza y la aceleración están en la misma dirección del campo. Esta fuerza tiene la misma dirección que el vector campo eléctrico, y su magnitud está dada por el valor de la carga multiplicado con la magnitud del campo eléctrico.

Los conceptos tales como fuerza, energía, potencial, etc. Son explorados y estudiados con más detalle en la mecánica clásica. Aquí se muestra que la fuerza y la energía potencial están relacionadas directamente. Así por ejemplo, cuando un objeto se mueve en la dirección de la fuerza, esta lo acelera, disminuyendo su energía potencial. Así por ejemplo, la energía potencial de una bala de cañón es mayor en la cima de una colina que en la base de la misma. Por otro lado, cuando el móvil desciende su energía potencial disminuye dicha disminución de energía potencial se transforma en energía cinética de movimiento.

Para ciertas fuerzas, es posible definir el “potencial” de un campo tal que la energía potencial de un objeto debido al campo es dependiente solamente de la posición del objeto con respecto al campo. Este efecto de las fuerzas sobre los objetos depende solo de las propiedades intrínsecas del objeto y de su posición, y obedecen a otras reglas matemáticas.

Dos de tales son la fuerza gravitacional y la fuerza eléctrica en ausencia de campos magnéticos variables con el tiempo. El potencial de un campo eléctrico el llamado *potencial eléctrico*. El potencial eléctrico se mide en voltios. En este capítulo definiremos la energía potencial eléctrica, la diferencia de potencial y la función potencial eléctrico y determinaremos el potencial de distribuciones discretas y continuas de carga. Posteriormente veremos la relación entre el campo y el potencial eléctricos para finalmente estudiar el potencial en el interior de conductores.

4.2 SISTEMAS GRAVITACIONALES Y ELÉCTRICOS: Similitudes y diferencias

Las interacciones gravitacional y eléctrica son debidas a diferentes propiedades inherentes a las partículas que constituyen la materia; la masa gravitacional y la carga eléctrica. Pero matemáticamente, ellas en forma similar obedecen con la ley de la inversa al cuadrado de la distancia (ley de la gravitación universal de Newton y la ley de Coulomb).

Así como la fuerza electrostática total sobre un cuerpo cargado es la suma de las fuerzas ejercidas sobre este por todos los demás cuerpos cargados, la fuerza gravitacional sobre un cuerpo es la suma de las fuerzas gravitacionales ejercidas sobre este por todas las demás masas que la rodean. Por ejemplo, el sol y la tierra ejercen fuerzas gravitacionales significativas sobre la luna, y las trayectorias de las partículas de desecho que conforman los anillos de Saturno son afectadas por fuerzas gravitacionales importantes. Estas incluyen a las fuerzas ejercidas por Saturno, por fuerzas que ejercen el resto de partículas en el anillo, y aquellas fuerzas ejercidas por pequeñas lunas que giran con los anillos y ayudan a mantener la configuración mostrada en la figura.



Figura 4.2.1. Movimiento de pequeñas lunas y cuerpos irregulares de materia en el planeta Saturno.

En el curso de mecánica, vimos que la fuerza gravitacional ejercida por la tierra sobre una partícula de masa m localizada a una distancia r desde el centro de la tierra está dada por la ecuación

$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{e}_r \quad (4.1)$$

Donde, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ es la constante de gravitación universal y $\hat{e}_r$ es un vector unitario dirigido radialmente hacia afuera. Asumiendo que la tierra es un cuerpo de forma esférica de mas M . El campo gravitacional correspondiente $\vec{g}$, definido como la fuerza gravitacional por unidad de masa, está dado por

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -G \frac{M}{r^2} \hat{e}_r \quad (4.2)$$

La ecuación (4.2) indica que el campo gravitacional $\vec{g}$, solamente depende de la masa M del cuerpo que crea el campo y la distancia r medida desde el centro de M .

Para determinar el trabajo hecho por la fuerza gravitacional durante el movimiento de m desde A hacia B, consideremos el movimiento de dicha partícula de masa m bajo la influencia de la gravedad tal como se muestra en la figura

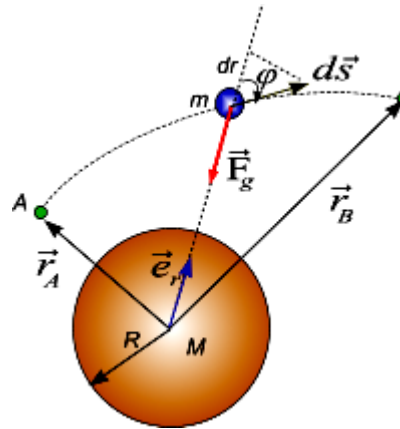


Figura 4.2.2. Trabajo desarrollado por la fuerza gravitacional sobre m .

En este caso, el trabajo de $\vec{F}_g$ es

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = \int_{r_A}^{r_B} \left(-G \frac{Mm}{r^2} \hat{e}_r \right) \cdot (dr \hat{e}_r + r d\phi \hat{e}_\phi) \\ W_{A \rightarrow B} &= -GMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = GMm \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B} \\ W_{A \rightarrow B} &= GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Esta ecuación muestra que el trabajo es independiente de la trayectoria seguida por m y solamente depende de la posición inicial y final, respectivamente. Debe recalcarse además que existen diferencias significativas entre el trabajo hecho por la fuerza gravitacional $W_{A \rightarrow B}$ y el trabajo realizado por un agente externo $W_{A \rightarrow B}^{ext}$. Sin embargo, ambas cantidades son iguales y de signo opuesto, es decir $W_{A \rightarrow B}^{ext} = -W_{A \rightarrow B}$.

En el ejemplo planteado anteriormente, si la trayectoria descrita por m es una trayectoria cerrada, de tal forma que el cuerpo m se mueve alrededor de ella retornando a su posición inicial, el trabajo neto hecho por la fuerza gravitacional podría ser cero, en estas condiciones se dice que la fuerza gravitacional es *conservativa*. En forma general decimos que una fuerza es conservativa si su trabajo alrededor de una trayectoria cerrada es nulo, esto es

$$W_e = \oint_C \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = 0 \quad (4.4)$$

Cuando trabajamos con fuerzas conservativas, es conveniente introducir el concepto de energía potencial U . El cambio en la energía potencial asociada con una fuerza conservativa $\vec{F}$ actuando sobre un cuerpo cuando se mueve desde A hasta B es definido como

$$\Delta U = U_B - U_A = -W_{A \rightarrow B} = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (4.5)$$

Donde $W_{A \rightarrow B}$ es el trabajo realizado por la fuerza sobre el cuerpo de masa m . para el caso de la fuerza gravitacional la energía potencial es

$$U_{g,B} - U_{g,A} = -\frac{GMm}{r} \Rightarrow U_g = -\frac{GMm}{r} + U_0 \quad (4.6)$$

Donde U_0 es una constante arbitraria la cual depende del punto de referencia escogido. En general se escoge el punto de referencia a aquel en el cual la energía potencial es cero. Para el caso de la fuerza gravitacional, escogemos un punto de referencia a una distancia muy grande (infinito) de tal manera que $U_0(r = \infty) = 0$. Debido a que U_g depende del punto de referencia escogido, solamente tiene importancia física la variación de energía potencial ΔU_g .

En puntos alejados de la superficie terrestre el campo gravitacional es variable ya que depende de r y como tal las líneas de campo gravitacional son radiales e ingresan a la tierra tal como se muestra en la figura 4.2.3a, mientras que en puntos cercanos a la superficie terrestre el campo gravitacional $\vec{g}$, es aproximadamente constante, de tal forma que las líneas de campo gravitacional se pueden considerar paralelas tal como se muestra en la figura 4.2.3b.

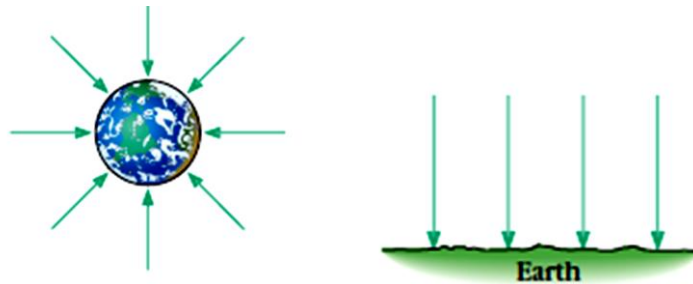


Figura 4.2.3 Campo gravitacional: (a) lejos de la superficie terrestre, (b) cerca de ella.

Entonces, cerca de la superficie terrestre, la fuerza gravitacional está dada por

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \quad (4.7)$$

Donde el campo gravitacional $\vec{g}$, es aproximadamente constante, con una magnitud $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. El trabajo hecho por la fuerza de gravedad para mover un cuerpo desde el punto A el cual está a una altura y_A hasta el punto B ubicado a una altura y_B (véase la figura 4.2.4), es

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_{y_A}^{y_B} \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = \int_{y_A}^{y_B} (m\vec{g}) \cdot (d\vec{s}) = \int_{y_A}^{y_B} (-mg\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) \\ W_{A \rightarrow B} &= \int_{y_A}^{y_B} (-mg dy) = -mg(y_B - y_A) = -mgh \end{aligned} \quad (4.8)$$

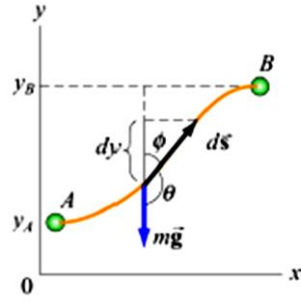


Figura 4.2.4 Trabajo hecho por la fuerza gravitacional durante desplazamientos en puntos cercanos a la superficie terrestre.

La variación de energía potencial en estas condiciones es

$$\Delta U_g = -W_{A \rightarrow B} = mg(y_B - y_A) = +mgh \quad (4.9)$$

Un concepto el cual está completamente relacionado con la energía potencial es el “Potencial Gravitacional” el cual se define como la energía potencial por unidad de masa esto es

$$\Delta V_g = \frac{\Delta U_g}{m} = -\int_A^B \left(\frac{\vec{F}_g}{m} \right) \cdot d\vec{s} = -\int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{s} \quad (4.10)$$

4.3 ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

Estamos interesados en la cantidad de trabajo hecho por una fuerza eléctrica durante el desplazamiento de una carga desde un punto inicial i hasta un punto final f . Para ello seguimos la secuencia desarrollada para el caso de la fuerza gravitacional. La figura 4.3.1a muestra un campo eléctrico producido por un sistema de cargas, al colocar una carga q_0 en este campo ella experimenta una fuerza eléctrica dada $\vec{F}_e = q_0 \vec{E}$, la que tiende a mover en la dirección del campo si la carga de prueba es positiva y en sentido contrario si dicha carga es negativa.

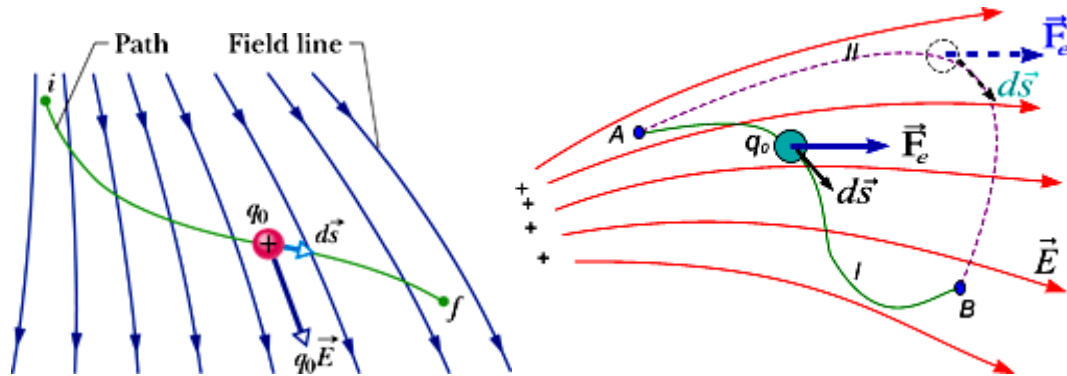


Figura 4.3.1. Movimiento de una carga en un campo no homogéneo.

El trabajo hecho por el campo sobre la carga cuando se mueve desde i hasta f a través de la trayectoria color verde es

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.11)$$

Si ahora movemos a la carga desde A hasta B a través de la trayectoria de las trayectorias I y II, como se muestra en la figura 4.3.1b, observamos que el trabajo es el mismo, esto quiere decir que el trabajo es

independiente de la trayectoria seguida. Por lo tanto podemos considerar a la fuerza eléctrica como una fuerza conservativa. En este caso el trabajo puede expresarse como una variación de energía potencial eléctrica, esto es

$$\Delta U = -W_{A \rightarrow B} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.12)$$

Debe recordarse que la integral en la ecuación (4.12) es un integral de línea y como tal debe evaluarse a lo largo de la trayectoria escogida para mover a q_0 . Claro está en el caso eléctrico debido a que la fuerza es conservativa dicha integral de línea no depende de la trayectoria tomada.

En general, queremos discutir la energía potencial de una carga o sistema de cargas en un punto en particular, es decir queremos encontrar una función $U(\vec{r})$, pero para obtenerlo es necesario escoger un punto en el cual la energía potencial es nula. Normalmente se toma la decisión de que la energía potencial es nula en puntos muy alejados de la distribución de carga esto es $U(\infty) = 0$.

4.4 DIFERENCIA DE POTENCIAL Y POTENCIAL ABSOLUTO.

En la presencia de un campo eléctrico $\vec{E}$ y siguiendo lo descrito en el campo gravitacional $\vec{g}$, definimos la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos A y B como

$$\Delta V_e = \frac{\Delta U_e}{q_0} = - \int_A^B \left(\frac{\vec{F}_e}{q_0} \right) \cdot (d\vec{s}) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.13)$$

Donde q_0 es la carga de prueba. La diferencia de potencial ΔV , representa la cantidad de trabajo por unidad de carga hecho por el campo para mover una carga de prueba q_0 desde un punto A hasta otro final B, sin cambiar su energía cinética. Una vez más, la diferencia de potencial no debe confundirse con la variación de la energía potencial. Las dos cantidades están relacionadas mediante la ecuación.

$$\Delta U = q_0 \Delta V \quad (4.14)$$

Las unidades de la diferencia de potencial en el SI es el voltio (V)

$$1 \text{ voltio} = 1 \text{ joule} / \text{segundo} \Rightarrow (1V = 1J / s) \quad (4.15)$$

Cuando se trate de sistemas a escala atómica o molecular, un joule (J), a menudo resulta ser demasiado grande como unidad de energía. A esta escala es mucho más útil el uso del llamado *electrón voltio* (eV), el cual se define como la energía que adquiere un electrón (o pierde) cuando se desplaza a través de una diferencia de potencial de 1 voltio.

$$1eV = 1(1.6 \cdot 10^{-19} C)(1V) = 1.6 \cdot 10^{-19} J \quad (4.16)$$

La ecuación (4.13) nos da simplemente la diferencia en el valor del potencial entre dos puntos A y B. Para determinar una función $V(r)$ que defina el potencial en todos los puntos necesitamos especificar un punto en el cual el potencial V es cero. Frecuentemente escogemos este punto a distancias muy grandes (infinito), es decir en puntos muy alejados de la ubicación de la carga productora de campo o potencial siendo, en estos puntos el campo o el potencial eléctrico son muy pequeños en valor absoluto. Sin embargo, este punto de referencia puede ser escogido para cada problema en particular lo único que se requiere es estar seguro de que $V = 0$ en dicho lugar antes de hablar con sensatez acerca de la función $V(r)$. Entonces la ecuación (4-13) se escribe

$$V(\vec{r}) = - \int_{ref}^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.17)$$

4.5 DIFERENCIA DE POTENCIAL EN CAMPOS ELECTRICOS UNIFORMES.

Consideremos una carga q_0 moviéndose desde un punto A hasta un punto B situado a una distancia d en el interior de un campo eléctrico $\vec{E} = E_0 \hat{i}$, como se muestra en la figura 4.5.1.

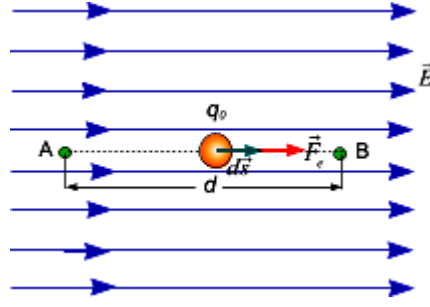


Figura 4.5.1. Movimiento de una carga en un campo eléctrico uniforme.

Al moverse la carga desde A hasta B, el trabajo hecho por el campo eléctrico es

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = \int_A^B (q_0 E \hat{i}) \cdot (dx \hat{i}) = \int_A^B q_0 E dx = q_0 E (x_B - x_A)$$

$$W_{A \rightarrow B} = q_0 E d \quad (4.18)$$

La variación de energía potencial está dada por

$$\Delta U = -W_{A \rightarrow B} = -q_0 E d \quad (4.19)$$

La diferencia de potencial entre estos dos puntos es

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -\frac{q_0 E d}{q_0} = -E d \Rightarrow V_B - V_A = -E d \quad (4.20)$$

El signo menos en la ecuación (4.20) indica que el potencial del punto B es menor al potencial del punto A. Por otro lado la variación de energía potencial dada por la ecuación (4.19) indica que si $q > 0$, ΔU es negativa, esto implica que la energía potencial de una carga positiva disminuye conforme se mueve a lo largo de la dirección del campo.

Si ahora la carga q_0 se mueve en una dirección no paralela al campo sino que forma un ángulo θ , tal como se muestra en la figura 4.5.2.

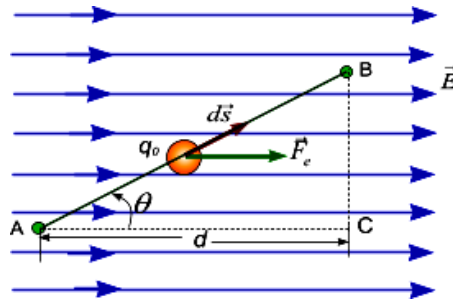


Figura 4.5.2. Movimiento de una carga puntual positiva en una dirección no paralela al campo eléctrico uniforme.

La diferencia de potencial en este caso es

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B E \cos \theta ds = -E \cos \theta (s_B - s_A) = -E d \quad (4.21)$$

Por otro lado si la carga se mueve desde A hasta C y posteriormente a B, la diferencia de potencial de A a C es $\Delta V_{AC} = -E d$, y la diferencia de potencial entre los puntos C y B es cero debido a que el campo es perpendicular al desplazamiento. Entonces tenemos:

$$\Delta V = \Delta V_{AC} + \Delta V_{CB} = -E d + 0 = -E d \quad (4.22)$$

Esta ecuación indica por un lado que la diferencia de potencial es independiente de la trayectoria por tanto el campo eléctrico es conservativo. Así mismo se observa que los puntos B y C tienen el mismo potencial, por tanto a esta línea que une B y C se le denomina “línea equipotencial”.

Ejemplo 4.1

Encuentre el voltaje requerido en un set de placas paralelas separadas $10,00\text{ cm}$ y que llevan cargas iguales y opuestas; para crear un campo eléctrico de 1000 N/C en la región comprendida entre ellas.

Solución

En la figura 4.5.3 se muestra la disposición de las placas, el campo se considera uniforme en las regiones alejadas de los bordes $\vec{E} = E\vec{i}$

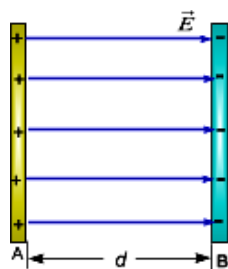


Figura 4.5.3. Diferencia de potencial entre placas paralelas.

La diferencia de potencial entre las placas es

$$\begin{aligned}\Delta V &= -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_0^d (E\hat{i}) \cdot (dx\hat{i}) = -E \int_0^d dx = -Ed \\ \Delta V &= -(1000\text{ N/C})(0,10\text{ m}) \\ \Delta V &= V_B - V_A = -100\text{ Volt}\end{aligned}$$

El signo menos indica que el A está a mayor potencial que el punto B

Ejemplo 4.2

Un electrón que se mueve paralelamente al eje x tiene una velocidad inicial de $3,7 \cdot 10^6\text{ m/s}$ en el origen. Su velocidad se reduce a $1,4 \cdot 10^5\text{ m/s}$ en el punto $x = 2,00\text{ cm}$. Determine la diferencia de potencial entre el origen y ese punto. ¿Cuál de los puntos está a mayor potencial?

Solución

Debido a que el electrón se mueve en un campo eléctrico uniforme, la energía se conserva por tanto

$$T_i + U_i = T_f + U_f \Rightarrow \frac{1}{2} m_e v_i^2 + q_e V_i = \frac{1}{2} m_e v_f^2 + q_e V_f$$

$$\frac{1}{2} m_e (v_i^2 - v_f^2) = q_e (V_f - V_i)$$

$$\frac{1}{2} (9,1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}) [(3,7 \cdot 10^6\text{ m/s})^2 - (1,4 \cdot 10^5\text{ m/s})^2] = (-1,6 \cdot 10^{-19}\text{ C})(V_2 - V_0)$$

$$(V_2 - V_0) = -38,9\text{ volt}$$

De esta ecuación se concluye que el punto $x = 0$ está a mayor potencial, esto es

$$V_0 = V_2 + 38,9\text{ volt}$$

4.6 POTENCIAL ELÉCTRICO DE UNA CARGA PUNTUAL.

En esta sección vamos a determinar la diferencia de potencial entre dos puntos A y B mostrados en la figura 4.6.1, debido a una carga puntual $+Q$. Debemos recordar que el campo eléctrico de una carga puntual es $\vec{E} = (kQ/r^2)\vec{e}_r$, donde $\vec{e}_r$ es un vector unitario dirigido a lo largo del campo eléctrico.

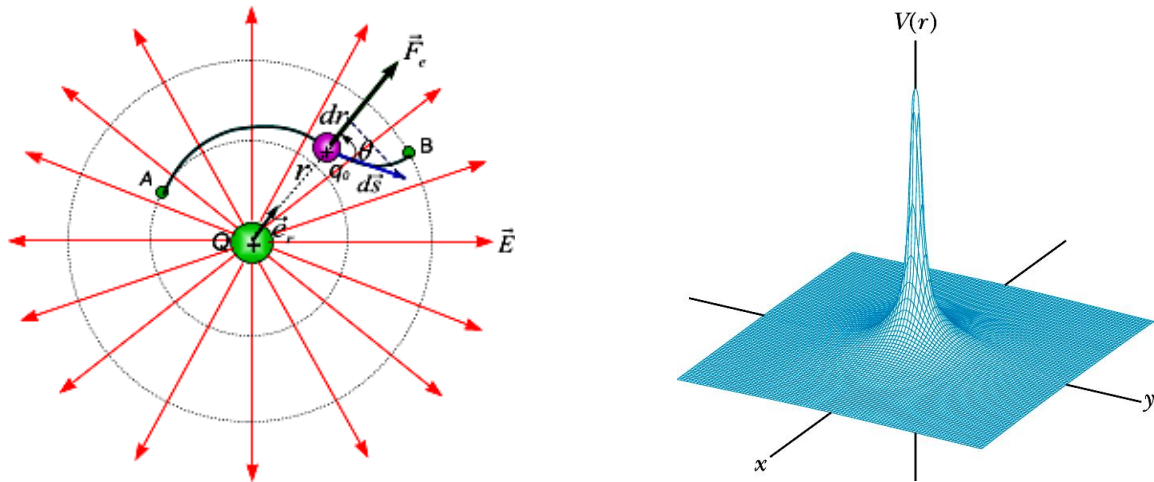


Figura 4.6.1. Diferencia de potencial producido por una carga puntual.

La diferencia de potencial entre los puntos A y B cuando la carga se mueve en el interior del campo eléctrico es

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \left(-k \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r \right) \cdot (dr \vec{e}_r + r d\phi \vec{e}_\phi)$$

$$V_B - V_A = -kQ \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = kQ \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (4.23)$$

Una vez más observamos que la diferencia de potencial es independiente de la trayectoria y solamente depende de las posiciones final e inicial de la carga testigo.

Al igual que en el caso de la fuerza gravitacional, solamente la diferencia de potencial tiene importancia física significativa. Por lo tanto, es conveniente establecer un punto de referencia en el cual el potencial es cero. En la práctica se escoge al punto de referencia que tiene potencial nulo al infinito. Entonces el potencial en cualquier punto será.

$$V_P = -\int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.24)$$

Con este punto de referencia, el potencial en un punto P ubicado a una distancia r de una carga puntual Q es

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.25)$$

Ejemplo 4.3

Una carga positiva de valor $2 \mu C$ está localizada en el origen. (a) ¿Cuál es el potencial eléctrico V en un punto a 4 m del origen respecto al valor $V = 0$ en el infinito?. (b) ¿Cuánto trabajo debe ser realizado por un agente exterior para llevar la carga de $3 \mu C$ hasta $r = 4 \text{ m}$ considerando que se mantiene fija en el origen la carga de $2 \mu C$?

Solución

En la figura 4.6.2, se muestra la carga

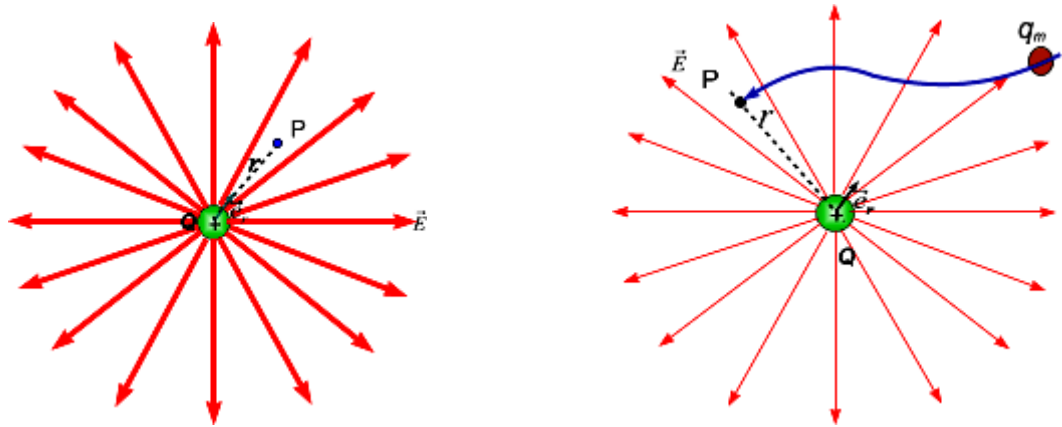


Figura 4.6.2. (a) Potencial de una carga puntual en un punto a una distancia, (b) Carga moviéndose desde el infinito hasta P.

Parte (a). El potencial en el punto P está dado por

$$V_p = k \frac{Q}{r} = 9 \cdot 10^9 \text{ N.m}^2 / \text{C}^2 \left(\frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{4 \text{ m}} \right)$$

$$V_p = 4,5 \cdot 10^3 \text{ volt}$$

Parte (b). El trabajo realizado por el agente externo para traer la carga q_3 desde el infinito hasta el punto P será

$$W_{\infty \rightarrow P} = q_3 V_p = 3 \cdot 10^{-6} \text{ C} (4,5 \cdot 10^3 \text{ vol})$$

$$W_{\infty \rightarrow P} = 13,5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

4.7 POTENCIAL ELÉCTRICO DE UN SISTEMA DE CARGAS PUNTUALES.

Consideremos un sistema de N cargas puntuales situadas en posiciones fijas como se muestra en la figura 4.7.1, las cuales producen campos eléctricos en el espacio que los rodea. Para evaluar el potencial producido por el sistema se evalúa el movimiento de una carga testigo $+q_0$ a lo largo de la trayectoria desde un punto inicial hasta otro final (P).

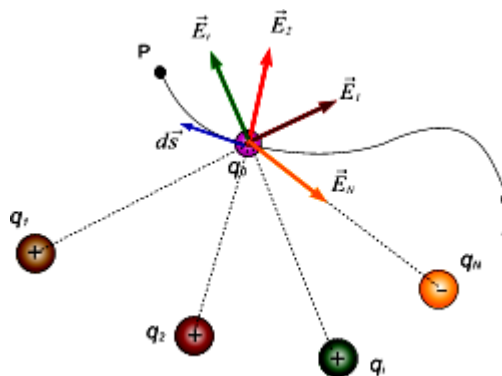


Figura 4.7.1. Potencial debido a un sistema de cargas puntuales.

El potencial en el punto P debido al sistema de cargas puntuales es

$$V(x, y, z) - 0 = - \int_i^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Al evaluar la integral se usa un procedimiento siguiente

$$V(x, y, z) = - \left[\int_i^P \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} + \int_i^P \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} + \dots + \int_i^P \vec{E}_i \cdot d\vec{s} + \dots + \int_i^P \vec{E}_N \cdot d\vec{s} \right]$$

Las integrales son idénticas a la resuelta para el caso de una sola carga puntual, por ello, la primera integral corresponde al potencial de la primera carga y así sucesivamente, entonces tenemos.

$$V(x, y, z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \dots + \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} + \dots + \frac{q_N}{4\pi\epsilon_0 r_N}$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \left(\frac{q_i}{r_i} \right) \quad (4.26)$$

Ejemplo 4.4

Cargas puntuales idénticas de $1,7 \mu\text{C}$ se fijan diagonalmente en las esquinas opuestas de un cuadrado. Una tercera carga es entonces fijada en el centro del cuadrado, tal que esta cause potenciales en las esquinas vacías cambien de signo sin cambiar sus magnitudes. Encontrar el signo y la magnitud de la tercera carga.

Solución

La figura muestra dos cargas idénticas, q fijas en las esquinas del cuadrado. El potencial en la esquina A es causado por la presencia de las dos cargas y está dado por

$$V_{A,i} = k \frac{q}{r} + k \frac{q}{r} = 2k \frac{q}{r}$$

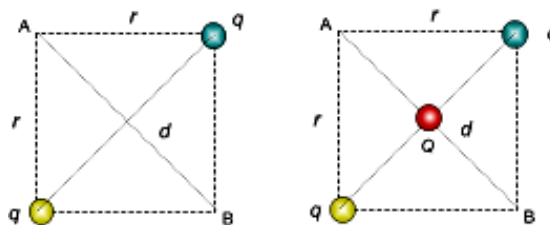


Figura 4.7.2 (a) Carga fijas en la esquina del cuadrado (inicial), (b) ubicación de la tercera carga en el centro del cuadrado

Debido a que ambas cargas están a la misma distancia de B, este potencial es igual al potencial en la esquina B. Si ahora una tercera carga Q es localizada en el centro del cuadrado, el potencial en la esquina A (así como en la esquina B) es

$$V_{A,f} = k \frac{q}{r} + k \frac{q}{r} + k \frac{Q}{d/2} = 2k \frac{q}{r} + 2k \frac{Q}{d}$$

De la geometría se determina la longitud de la diagonal $d = r\sqrt{2}$. Entonces tenemos

$$V_{A,f} = 2k \frac{q}{r} + 2k \frac{Q}{r\sqrt{2}}$$

De la condición del problema, conocemos que la adición de Q causa que el potencial en A o B cambia de signo sin cambiar la magnitud. En otras palabras

$$\begin{aligned}
 V_{A,f} &= -V_{A,i} \\
 2k \frac{q}{r} &= -\left(2k \frac{q}{r} + 2k \frac{Q}{r\sqrt{2}}\right) \\
 Q &= -2\sqrt{2}q = -2\sqrt{2}(1,7 \cdot 10^{-6} \text{ C}) \\
 Q &= -4,8 \mu\text{C}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5

Considere un dipolo eléctrico ubicado sobre el eje y , como se muestra en la figura. Encuentre el potencial eléctrico V en un punto P en el plano xy .

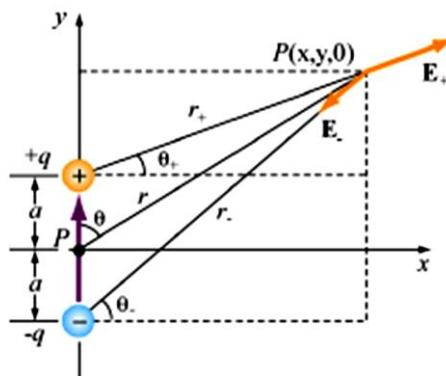


Figura 4.7.3 Potencial eléctrico de un dipolo eléctrico

Solución

Utilizando el principio de superposición, el potencial en el punto P está dado por

$$V_P = V_+ + V_- = k \frac{q}{r_+} - k \frac{q}{r_-} = kq \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

Utilizando la ley de los cosenos, se determina las distancias r_+ y r_- , esto es

$$r_{\pm}^2 = r^2 + a^2 \mp 2ra \cos \theta$$

Debido a que la distancia entre las cargas es mucho menor a la distancia del centro del dipolo al punto donde se determina el potencial ($a \ll r$), entonces se tiene

$$\frac{1}{r_{\pm}} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \mp \frac{2a}{r} \cos \theta \right]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \pm \frac{2a}{r} \cos \theta \right]$$

Remplazando este valor en la ecuación del potencial del dipolo se tiene

$$\begin{aligned}
 V_P &= \frac{kq}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{2a}{r} \cos \theta - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{2a}{r} \cos \theta \right] \\
 V_P &\approx \frac{2kqa}{r^2} \cos \theta
 \end{aligned}$$

$$V_P \approx \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Donde el momento dipolar es $\vec{p} = 2qa\vec{j}$

4.7 POTENCIAL ELÉCTRICO DE UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA.

La ecuación (4.26) también es válida aunque el número de cargas tienda al infinito y la distribución de cargas sea continua. Sin embargo, en este caso es necesario conocer la cantidad de carga que contiene cualquier elemento diferencial de carga. Para esto debemos conocer la densidad de carga por unidad de volumen o por unidad de área o por unidad de longitud. Así mismo es necesario conocer la distancia entre el elemento diferencial de carga y el punto de observación (véase la figura 4.7.1). En consecuencia el elemento de carga produce un pequeño potencial dado por

$$dV(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.27)$$

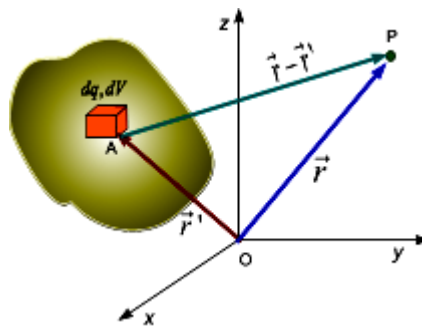


Figura 4.7.1. Potencial eléctrico de una distribución continua de carga

El potencial total se obtiene sumando (integrando) sobre toda la distribución de carga, esto es

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.28)$$

Para el caso de una distribución lineal la ecuación se convierte en

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\lambda(\vec{r}') ds}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.29)$$

Para una distribución superficial tenemos

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_A \frac{\sigma(\vec{r}') dA}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.30)$$

Finalmente para una distribución volumétrica se tiene

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.31)$$

Ejemplo 4.6

Sobre una barra delgada no conductora de longitud $2L$, se ha distribuido uniformemente una carga $+Q$ con un densidad de carga por unidad de longitud λ . Determine el potencial eléctrico en un punto a lo largo de la bisectriz perpendicular a la barra a una distancia z de su centro.

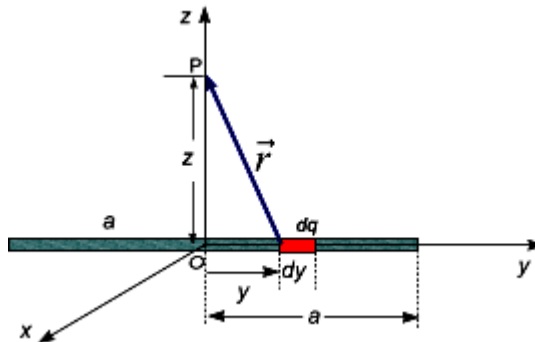


Figura 4.7.2. Potencial eléctrico de una distribución lineal finita de carga.

Solución

Consideremos un elemento diferencial de longitud dy el cual lleva una carga $dq = \lambda dy = \frac{Q}{2a}$, como se muestra en la figura 4.7.2. El elemento que produce el potencial está localizado en $(0, y, 0)$ mientras que el punto en donde se determina el potencial está en el eje z en $(0, 0, z)$. La distancia del elemento diferencial al punto P es $|\vec{r}| = \sqrt{y^2 + z^2}$. Entonces la contribución al potencial está dado por

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} = \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + z^2)^{1/2}}$$

Tomando al potencial en el infinito como cero, el potencial neto debido a la distribución entera es

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dy}{(y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[y + \sqrt{y^2 + z^2} \right]_{-a}^a$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{a + \sqrt{a^2 + z^2}}{-a + \sqrt{a^2 + z^2}} \right]$$

En el límite cuando $z \ll a$, se tiene

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{a + a\sqrt{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}}{-a + a\sqrt{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}}{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{1 + \left(1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^{1/2}}{-1 + \left(1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^{1/2}} \right]$$

$$V \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{4a^2}{z^2} \right] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{2a}{z} \right]$$

Por otro lado si $z \gg a$, tenemos

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{a+z}{-a+z} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{z \left(1 + \frac{a}{z} \right)}{z \left(1 - \frac{a}{z} \right)} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{\left(1 + \frac{a}{z} \right)}{\left(1 - \frac{a}{z} \right)} \right]$$

$$V \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln \left(1 + \frac{a}{z} \right) - \ln \left(1 - \frac{a}{z} \right) \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{z} - \left(-\frac{a}{z} \right) \right) = \frac{2\lambda a}{4\pi\epsilon_0 z}$$

$$V \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}$$

Ejemplo 4.7

Un anillo de radio R cargado uniformemente con una carga por unidad de longitud λ , se encuentra sobre el plano xy con su eje a lo largo del eje z . Determine el potencial eléctrico en cualquier punto del eje z debido a la distribución.

Solución

En la figura se muestra el anillo en el plano xy . Para determinar el potencial se divide a la distribución en pequeños elementos diferenciales de carga dq de longitud $ds = R d\phi$. El elemento tiene una carga

$$dq = \lambda ds = \lambda R d\phi$$

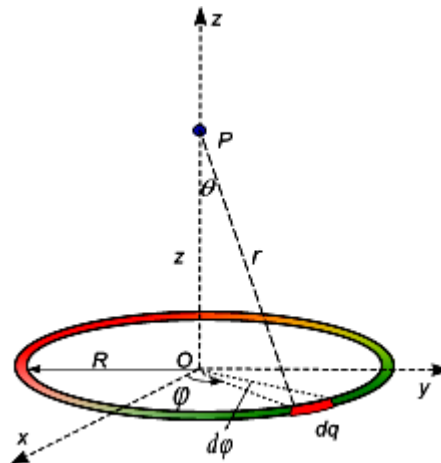


Figura 4.7.3. Potencial eléctrico de una distribución lineal de carga en forma de anillo

El potencial producido por el elemento diferencial es

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |r|} = \frac{\lambda R d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$

Tomando al potencial en el infinito como cero, el potencial neto debido a la distribución entera es

$$V = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$V = \frac{2\pi\lambda R}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}}$$

Donde la carga total del anillo es $Q = 2\pi R\lambda$. En el límite cuando $z \gg R$, se tiene

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2\left[\left(\frac{R}{z}\right)^2 + 1\right]}}$$

$$V \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}$$

Ejemplo 4.8

Un disco de radio R cargado uniformemente con una carga por unidad de área σ , se encuentra sobre el plano xy con su eje a lo largo del eje z . Determine el potencial eléctrico en cualquier punto del eje z debido a la distribución.

Solución

Se divide a la distribución de carga en elementos dq en forma de anillos de radio a y espesor da tal como se muestra en la figura 4.7.4, tal que la carga del elemento dq está dada por

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA} \rightarrow dq = \sigma dA = \sigma(2\pi a da) \Rightarrow dq = 2\pi\sigma a da$$

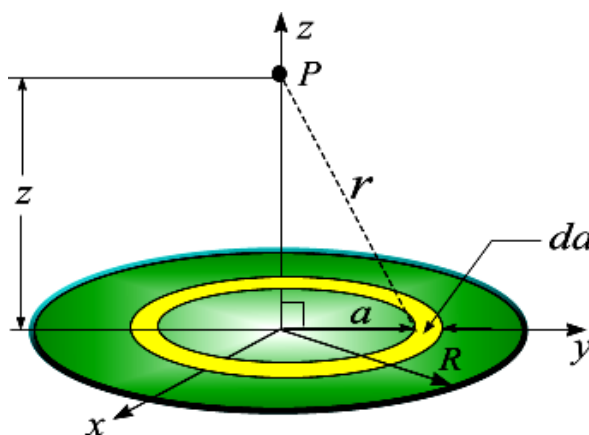


Figura 4.7.4. Potencial eléctrico de una distribución superficial de carga en forma de anillo

El potencial producido por el elemento diferencial es

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0|r|} = \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}}$$

Tomando al potencial en el infinito como cero, el potencial neto debido a la distribución entera es

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{a^2 + z^2} \right]_0^R$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right]$$

En el límite cuando $|z| \gg R$

$$\sqrt{R^2 + z^2} = |z| \left[1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right]^{1/2} = |z| \left[1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{R}{z} \right)^2 \right) + \dots \right]$$

Remplazando este valor en el potencial del disco, se tiene

$$V \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[|z| + \frac{|z|R^2}{2z^2} - |z| \right] = \frac{\pi\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0 |z|}$$

$$V \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |z|}$$

Determinemos ahora el potencial en el centro del disco

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{(R^2 + z^2)} - |z| \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{(R^2 + 0)} - 0 \right]$$

$$V = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$$

Ejemplo 4.9

Una corteza delgada esférica de radio R posee una carga total Q con una densidad superficial uniforme de carga σ en la superficie. Mediante integración directa, determine el potencial eléctrico en términos de la distancia r desde el centro de la corteza.

Solución

Se divide a la distribución en elementos diferenciales de carga en forma de anillos de radio y , espesor ds y carga dq como se muestra en la figura. Dicho elemento diferencial tiene una carga dq dado por

$$dq = \sigma dA = \sigma(2\pi y)(Rd\theta) = \sigma(2\pi R \sin\theta)(Rd\theta)$$

$$dq = 2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta \quad (a)$$

El potencial eléctrico producido por el elemento diferencial dq en el punto P situado a una distancia r del centro del cascarón es

$$dV = k \frac{dq}{S} = k \frac{2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta}{S} \quad (b)$$

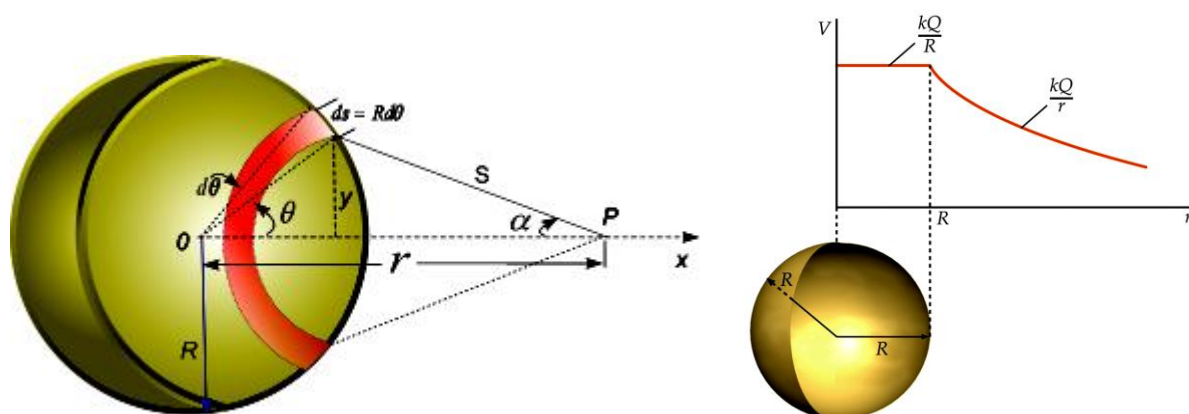


Figura 4.7.5. Potencial eléctrico de un cascarón esférico cargado

Antes de proceder a integrar la ecuación (b) es necesario eliminar una de las dos variables S y θ . En este caso las variables se remplazan en función de S

Aplicando la ley de cosenos en el triángulo OPA

$$S^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta \quad (c)$$

Derivando la expresión (e), tenemos

$$2SdS = 2rR \sin \theta d\theta$$

$$\sin \theta d\theta = \frac{SdS}{rR} \quad (d)$$

Remplazando la ecuación (d) en (e), se tiene

$$dV = k \frac{dq}{S} = k \frac{2\pi\sigma R^2 \left(\frac{SdS}{rR} \right)}{S} = k \frac{2\pi\sigma R}{r} dS \quad (f)$$

Tomando al potencial en el infinito como cero, el potencial neto debido a la distribución esférica completa es

$$V = \frac{2\pi k \sigma R}{r} \int_{r-R}^{r+R} dS = \frac{2\pi k \sigma R}{r} [S]_{r-R}^{r+R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(4\pi\sigma R^2)}{r}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

El potencial en la superficie de la corteza será.

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (g)$$

El potencial en puntos interiores es

$$V = \frac{2\pi k \sigma R}{r} \int_{R-r}^{R+r} dS = \frac{2\pi k \sigma R}{r} [S]_{R-r}^{R+r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2\pi\sigma R)}{r} [R+r - (R-r)]$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(4\pi\sigma r R)}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(4\pi\sigma R^2)}{R}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Esta ecuación indica que el potencial en puntos interiores es constante e igual al potencial en la superficie.

4.8 ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA DE SISTEMAS DE CARGAS.

4.8.1 Energía de dos cargas puntuales.

Consideremos a una carga puntual fija q en el espacio y una carga q_0 que se desplaza de A hacia B tal como se muestra en la figura 4.8.1.

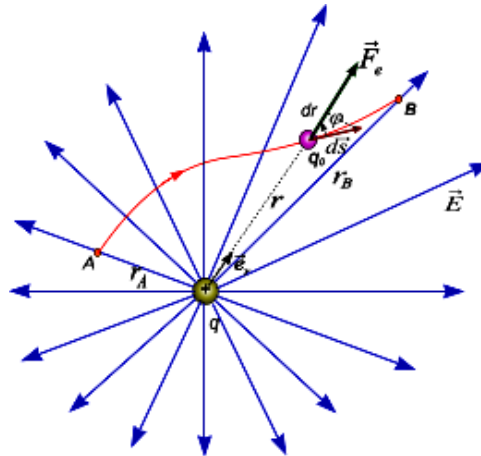


Figura 4.8.1. Energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales.

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica sobre la carga q_0 al moverse de A hasta B es

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = \int_{r_A}^{r_B} \left(\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r \right) \cdot (dr\hat{e}_r + r d\varphi \hat{e}_\varphi)$$

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (4.32)$$

Se observa que el trabajo de una fuerza eléctrica es independiente de la trayectoria seguida por lo tanto dicha fuerza es conservativa y como tal el trabajo puede expresarse como una variación de la energía potencial, esto es

$$\Delta U = -W_{A \rightarrow B} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (4.33)$$

La energía potencial U cuando la carga de prueba q_0 está en cualquier distancia r de q , es

$$U = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.34)$$

La ecuación (4.34) es válida para cualquier combinación de signos. La energía potencial es positiva si las cargas q y q_0 son del mismo signo (figura 4.8.2a) y negativa si tienen signos opuestos (figura 4.8.2b).

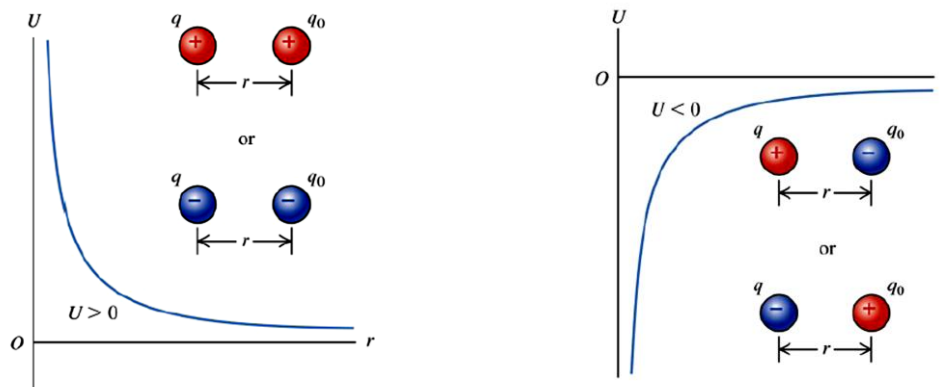


Figura 4.8.2. Gráficas de la energía potencial U en función de r para dos cargas puntuales: (a) q y q_0 tienen el mismo signo y (b) q y q_0 tienen diferente signo.

La energía potencial siempre se define con respecto a un punto de referencia en el cual $U = 0$. En la ecuación (4.34), la energía potencial es nula cuando las cargas q y q_0 están separadas una distancia muy grande esto es $r = \infty$. Por lo tanto, U representa el trabajo que el campo eléctrico de la carga q realiza sobre la carga testigo q_0 si esta se desplaza desde una distancia inicial r hasta el infinito.

4.8.2 Energía potencial de varias cargas puntuales.

Para determinar la energía potencial de un sistema de cargas puntuales consideremos en primer lugar que se desea ensamblar un sistema de dos cargas mediante un agente externo, entonces $\Delta U = -W_{i \rightarrow f} = +W_{ext}$. Esto es, el cambio en la energía potencial del sistema es igual trabajo realizado por un agente externo para ensamblar la configuración. En nuestro caso, las cargas son traídas lentamente desde el infinito, sin aceleración, esto es, ellas están en reposo al final del proceso. Empezaremos el ensamblaje con dos cargas q_1 y q_2 para ello consideremos que la región i está libre de cargas y el campo eléctrico debe ser nulo en todas las partes y posteriormente traemos una a una a las cargas hasta ubicarlas en las posiciones mostradas. De la figura 4.8.3, se observa que el trabajo requerido para colocar la primera carga q_1 en el punto A es cero ($W_1 = 0$), debido a que en la región no existe campos eléctricos. El trabajo requerido para colocar la segunda carga q_2 en la posición B es igual al producto de la carga q_2 por el potencial en el punto B debido a q_1 , es decir ($W_2 = q_2 V_{B,1}$).

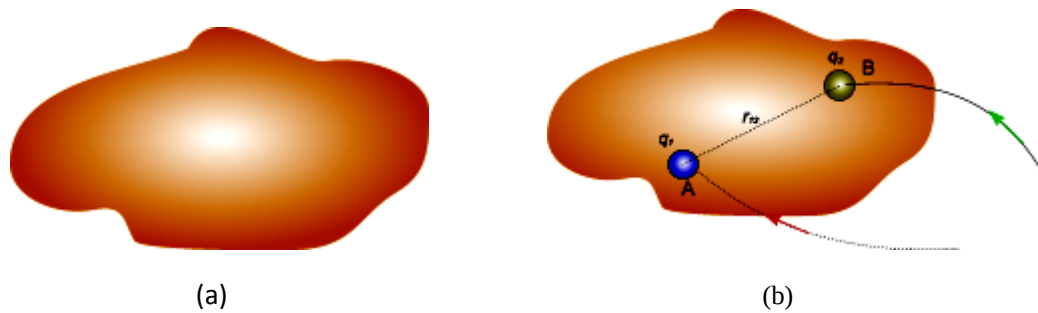


Figura 4.8.3. (a) Región del espacio sin cargas; (b) Traslado secuencial de cargas desde el infinito para formar la configuración mostrada.

Por lo tanto, el trabajo es

$$W_E = W_1 + W_2 = 0 + q_2 V_{B,1} = q_2 V_{B,1} \quad (4.35)$$

Debido a que el potencial de q_1 en el punto B es $V_{B,1} = q_1 / 4\pi\epsilon_0 r$, donde r es la distancia medida desde q_1 hasta B. entonces la energía potencial será

$$U_{12} = W_E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.36)$$

Si ahora añadimos una tercera carga al sistema tal como se muestra en la figura 4.8.4, el trabajo requerido es

$$W_3 = q_3 (V_{C,1} + V_{C,2}) \quad (4.37)$$

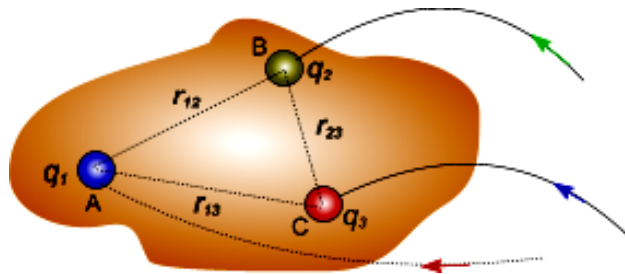


Figura 4.8.3. Traslado secuencial de cargas para ensamblar la configuración de tres cargas.

En este caso el trabajo desarrollado por el agente para ensamblar dicha configuración es

$$W_E = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + q_2 V_{B,1} + q_3 (V_{C,1} + V_{C,2}) \quad (4.38)$$

La energía potencial para esta configuración es entonces

$$U = W_E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right) \quad (4.39)$$

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} = U_{12} + U_{13} + U_{23} \quad (4.40)$$

La ecuación muestra que la energía potencial total es simplemente la suma de las contribuciones de distintos pares. Generalizando para un sistema de N cargas, tenemos.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (4.41)$$

Donde la limitación $j > i$ se utiliza para evitar la doble contabilidad de cada par. Alternativamente se puede contar dos veces cada par y dividir el resultado entre dos. Esto conduce a

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(r_i) \quad (4.42)$$

Donde $V(r_i)$, es el potencial en la localización de q_i debido a todas las demás cargas.

Ejemplo 4.10

Consideremos un cuadrado de lado a , con una carga en cada esquina $+q$ y una carga $-q$ en el centro. Determine la energía electrostática total del sistema de cinco cargas

Solución

En la figura 4.8.4 se muestra la ubicación de las carga

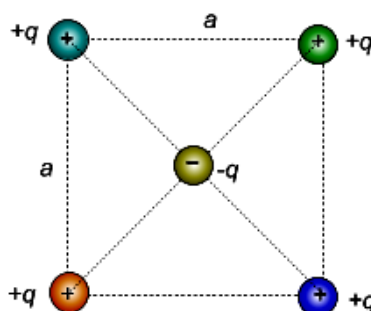


Figura 4.8.4. Ensamblaje del sistema de cinco cargas en un cuadrado.

Imaginemos que las cargas se traen una a una desde el infinito hasta dejarlas en su posición final. Entonces el trabajo realizado por un agente externo es

$$U_{tot} = W_{neto} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5$$

$$U_{tot} = 0 + q_2 V_{2,1} + q_3 (V_{3,1} + V_{3,2}) + q_4 (V_{4,1} + V_{4,2} + V_{4,3}) + q_5 (V_{5,1} + V_{5,2} + V_{5,3} + V_{5,4})$$

Determinando los potenciales y remplazando tenemos

$$U_{tot} = q_2 \left(\frac{kq_1}{a} \right) + q_3 \left[\frac{kq_1}{a} + \frac{kq_2}{a\sqrt{2}} \right] + q_4 \left[\frac{kq_1}{a\sqrt{2}} + \frac{kq_2}{a} + \frac{kq_3}{a} \right] + q_5 \left[\frac{kq_1}{a\sqrt{2}/2} + \frac{kq_2}{a\sqrt{2}/2} + \frac{kq_3}{a\sqrt{2}/2} + \frac{kq_4}{a\sqrt{2}/2} \right]$$

$$U_{tot} = \frac{2kq^2}{a} + \frac{2kq^2}{a\sqrt{2}} + \frac{2kq^2}{a} - \frac{8kq^2}{a\sqrt{2}} = \frac{4kq^2}{a} - \frac{6kq^2}{a\sqrt{2}} = \frac{4kq^2}{a} - \frac{3kq^2\sqrt{2}}{a}$$

$$U_{tot} = -\frac{kq^2}{a}(3\sqrt{2} - 4)$$

4.8.3 Energía potencial de de una distribución continua de carga.

Si en lugar de una distribución de carga discreta tenemos una distribución continua de carga, podemos generalizar la ecuación (4.42), simplemente haciendo que la suma se extienda hasta el infinito en este caso $\sum \rightarrow \int$; $q_i \rightarrow dq$ y $V(r_i) \rightarrow V(r)$. Entonces se tiene

$$U = \frac{1}{2} \int_v V(r) dq = \frac{1}{2} \iiint_v \rho(r) V(r) dv \quad (4.43)$$

Donde $\rho(r)$, es la densidad de carga por unidad de volumen; $V(r)$ es el potencial y dv es el diferencial de volumen.

En el caso de una distribución lineal o superficial de carga, la integral se convierte de acuerdo a la distribución.

Debido a que la integral es sobre la distribución de carga, esta puede ser extendida a todo el espacio mediante la definición de la densidad de carga nula fuera de la distribución, tal que la contribución a la integral es la debida solamente a la región del espacio donde existe carga.

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\text{todo el espacio}} \rho(r) V(r) dv \quad (4.44)$$

De la forma diferencial de la ley de Gauss tenemos $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, entonces tenemos

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{todo el espacio}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V(r) dv \quad (4.45)$$

Usando el vector intensidad

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{V}\vec{E}) = V\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V \Rightarrow V\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}\vec{E}) - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V$$

$$V\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}\vec{E}) - |\vec{E}|^2$$

Donde se ha remplazado $\vec{E} = -\nabla V$. Entonces la energía se escribe

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{todo el espacio}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}\vec{E}) dv + \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{todo el espacio}} |\vec{E}|^2 dv \quad (4.47)$$

Podemos expandir las fronteras de la superficie S_1 a S_2 debido a que en la región comprendida entre S_1 y S_2 no existe carga y como tal su contribución a la integral de la ecuación (4.43) es nula. Sin embargo, el campo eléctrico en esta región no es cero. Así si observamos la ecuación (4.47) el volumen se incrementa conforme S_2 es mucho mayor.

Entonces podemos tomar la superficie a distancias infinitas donde el campo eléctrico es cero. Como resultado el primer término de la ecuación (4.47) se desprecia, es decir

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{todo el espacio}} |\vec{E}|^2 dv \quad (4.48)$$

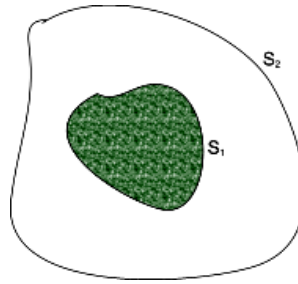


Figura 4.8.4. La superficie S_1 encierra la distribución de carga y la región comprendida entre S_1 y S_2 no existe cargas.

4.9 CAMPOS ELECTRICOS A PARTIR DE POTENCIALES.

La ecuación 4.13, establece la relación entre el campo eléctrico y la diferencia de potencial mediante la ecuación $\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$, con esta ecuación se puede determinar la diferencia de potencial si es que se conoce el campo eléctrico. Sin embargo, dicha ecuación también se puede utilizar para determinar el campo eléctrico a partir de potenciales, para esto consideremos que el punto A es muy cercano a B, de tal manera que la diferencia de potencial será

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.49)$$

Ecuación que nos da el potencial para un desplazamiento $d\vec{s}$. Por otro lado, debido a que el potencial es un campo escalar, entonces depende de las coordenadas, es decir $V(x, y, z)$. En consecuencia si se considera a dV como el cambio de potencial al pasar de un punto de coordenadas (x, y, z) a otro muy cercano $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Entonces se tiene

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (4.50)$$

Por otro lado el campo eléctrico y el desplazamiento se escriben

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} \\ d\vec{s} &= dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Y el producto escalar de ambos es

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (4.52)$$

Al remplazar la ecuación (4.50) y (4.52) en la ecuación (4.49)

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

Por lo tanto las componentes del campo eléctrico son

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (4.53)$$

Al remplazar estas componentes en el campo eléctrico se tiene

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \\ \vec{E} &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)V \\ \vec{E} &= -\nabla V\end{aligned}\quad (4.54)$$

Siguiendo la misma secuencia se puede encontrar las componentes radial y transversal, esto es

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (4.55)$$

Ejemplo 4.11

El potencial eléctrico en un punto en el plano xy está dado por $V = [2x^2 - 3y^2]\text{Vol}/m^2$. Determine la expresión vectorial del campo eléctrico en el punto $(3,0\text{ m}, 2,0\text{ m})$.

Solución

Las componentes del campo eléctrico son

$$\begin{aligned}E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial [2x^2 - 3y^2]}{\partial x} = -4x \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial [2x^2 - 3y^2]}{\partial y} = +6y\end{aligned}$$

La expresión vectorial será

$$\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} = -4x\hat{i} + 6y\hat{j}$$

El campo en el punto $(3\text{ m}, 2\text{ m})$ será

$$\vec{E} = -4(3)\hat{i} + 6(2)\hat{j} = (-12\hat{i} + 12\hat{j})\text{volt} / m$$

Ejemplo 4.12

Un campo eléctrico está dado por la expresión $\vec{E} = bx^3\hat{i}$, donde $b = 2,00\text{kV}/m^4$. Determine la diferencia de potencial entre el punto en $x = 1,00\text{ m}$ y el punto $x = 2,00\text{ m}$. ¿Cuál de estos puntos está a un potencial más alto?.

Solución

Debido a que $V(x)$ y E_x están relacionados mediante la ecuación $E_x = -\partial V/\partial x$, se puede encontrar V a partir de E mediante integración

$$E_x = bx^3 = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Debido a que el campo solo depende de x , entonces la derivada parcial se convierte en ordinaria y se procede a separar variables e integrar. Es decir,

$$dV = -bx^3 dx$$

$$\int_A^B dV = -b \int_{1m}^{2m} x^3 dx$$

$$V_B - V_A = b \frac{x^4}{4} \Big|_{1m}^{2m} = -\frac{b}{4} (2^4 - 1^4) = -\frac{2 \cdot 10^3 V/m^4}{4} (15m^4)$$

$$V_B - V_A = -7500 \text{ volt}$$

El punto que está a mayor potencial es A ($x = 1 \text{ m}$)

Ejemplo 4.13

El campo eléctrico en el interior de una esfera no conductora de radio R con carga distribuida uniformemente a través de su volumen, está radialmente dirigido y tiene una magnitud de $E(r) = qr/4\pi\epsilon_0 R^3$. Donde q (positiva o negativa) es la carga total dentro de la esfera y r es la distancia medida desde el centro de la esfera. (a) Considerando $V = 0$ en el centro de la esfera, determine el potencial eléctrico $V(r)$ dentro de la esfera, (b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre un punto sobre la superficie y el centro de la esfera?. (c) Si q es positiva, cuál de éstos dos puntos está a un mayor potencial?.

Solución

Parte (a) En este caso debido a que el campo eléctrico solo depende de r , podemos utilizar la ecuación $E(r) = -dV/dr$, entonces se tiene

$$dV = -E_r dr = -\frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} dr$$

Teniendo en cuenta que $V_0 = 0$, en $r = 0$ (punto de referencia, el potencial para cualquier punto r dentro de la esfera será $V(r)$ se obtiene integrando la ecuación anterior

$$\int_{V_0=0}^{V(r)} dV = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_0^r r dr$$

$$V(r) - 0 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^r = -\frac{qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$V(r) = -\frac{qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

Parte (b). Usando el resultado de la parte (a), la diferencia de potencial entre un punto en la superficie y el centro de la esfera es

$$V(r) - V(0) = -\frac{qR^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} - \left(-\frac{q(0)^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} \right)$$

$$V(r) - V(0) = -\frac{qR^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

Parte (c). Para cuando la carga q es positiva, la respuesta a la parte (b) es un *número negativo*. Por lo tanto el centro de la esfera está a un mayor potencial.

Ejemplo 4.14

Una carga q es distribuida uniformemente a través de un volumen esférico de radio R . (a) Asumiendo que $V = 0$ en el infinito, muestre que el potencial a una distancia r del centro, donde $r < R$, está dado por $V = q(3R^2 - r^2)/8\pi\epsilon_0 R^3$. (b) ¿Porqué este resultado difiere de aquel encontrado en el *ejemplo 4.13*? (c) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre un punto en la superficie y el centro de la esfera? (d) ¿Porqué este resultado difiere de aquel encontrado en el *ejemplo 4.13*?

Solución

Parte (a) Se determina primero el campo en el exterior e interior de la esfera:

Campo para $r > R$. Aplicado la ley de Gauss tenemos

$$\epsilon_0 \oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = Q_{enc} \Rightarrow \epsilon_0 E(4\pi r^2) = q$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



Figura 4.9.1 Superficies gaussianas para $r > R$ y para $r < R$, utilizadas para determinar $\vec{E}$

Campo para $r < R$. Aplicado la ley de Gauss tenemos

$$\epsilon_0 \oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = Q_{enc}$$

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = \int_0^r \rho dV = \rho \int_0^r 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3} \pi \rho r^3$$

Teniendo en cuenta que $\rho = q/\frac{4}{3}\pi R^3$, se tiene

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = \frac{4}{3} \pi \left[\frac{q}{\frac{4}{3} \pi R^3} \right] r^3$$

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Potencial para puntos exteriores ($r > R$). Debido a que el campo solo depende de r , se usa la ecuación

$$dV = -E_r dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$\int_{V_\infty=0}^{V(r)} dV = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}$$

$$V(r) - 0 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} + \frac{1}{\infty} \right]$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Potencial para puntos interiores ($r < R$). Debido a que el campo solo depende de r , se usa la ecuación

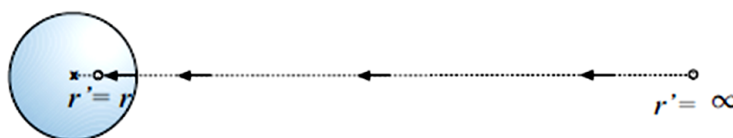


Figura 4.9.2 Determinación de la diferencia de potencial para puntos interiores

$$dV = -E_r dr = -\frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} dr$$

$$\int_{V(R)}^{V(r)} dV = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_R^r r dr$$

$$V(r) - V(R) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\frac{r^2}{2} \right]_R^r = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right]$$

$$V(r) = V(R) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} [R^2 - r^2]$$

$$V(r) = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

Parte (b). La diferencia entre este resultado y aquel obtenido en el ejemplo previo es debido a los diferentes puntos de referencia utilizados. Aquí no existe problema alguno ya que solamente las diferencias de potencial tienen importancia física.

Parte (c). Las diferencias de potencial entre un punto en la superficie y el centro, es

$$V(R) - V(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q(3R^2 - 0^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$V(R) - V(0) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

El resultado es el mismo que aquel obtenido en el ejemplo anterior

Parte (d). Las diferencias en el potencial eléctrico no dependen en realidad del punto de referencia escogido, la respuesta podría ser la misma que el ejemplo anterior.... Si el potencial es calculado correctamente.

4.10 SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES.

Consideremos una carga puntual $+q$ fija en la posición mostrada en la figura 4.10.1a, cuyas líneas de campo eléctrico son radiales y salientes. Procedamos a determinar la diferencia de potencial entre dos puntos A y B ubicados sobre la circunferencia de radio r

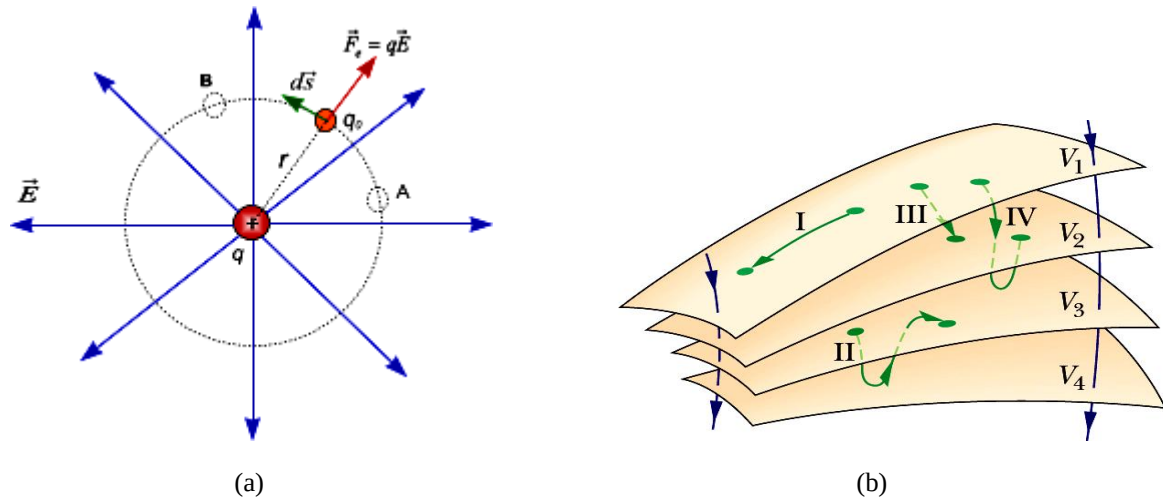


Figura 4.10.1. Cuando se mueve q_0 de A a B a lo largo de la circunferencia la diferencia de potencial entre estos puntos es nula.

El trabajo hecho por el campo eléctrico cuando se mueve la carga testigo desde A hasta B, es

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_A^B E \cos 90^\circ ds$$

$$W_{A \rightarrow B} = 0$$

La variación de energía potencial desde A hasta B será

$$\Delta U = -W_{A \rightarrow B} = 0$$

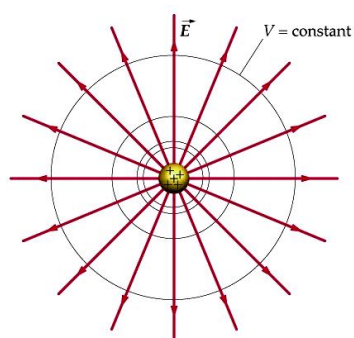
Sabemos además que la variación de potencial (diferencia de potencial es la variación de energía potencial por unidad de carga. Por tanto se tiene

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q_0} = \frac{0}{q_0} = 0$$

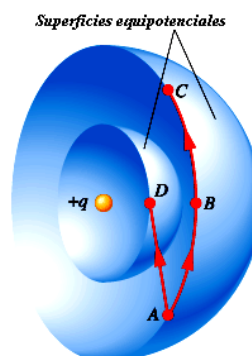
$$V_B = V_A \quad (4.56)$$

La ecuación (4.56) indica que la diferencia de potencial entre dos puntos que están sobre una circunferencia concéntrica a la carga $+q$ es cero; es decir los puntos A y B están al mismo potencial. Por lo tanto, todos los puntos sobre esta circunferencia se encuentran al mismo potencial. Es a esta circunferencia que se le denomina *línea equipotencial*. En general, cuando no se realiza trabajo para mover una carga de prueba lentamente de un lugar a otro sobre una superficie como lo es la trayectoria I de la figura 4.10.1b, se dice que todos los puntos de dicha superficie están al mismo potencial y a una superficie como esta se denomina *superficie equipotencial*.

En la figura 4.10.2a se muestra las líneas equipotenciales de una carga puntual y en la figura 4.10.2b se muestran dos superficies equipotenciales para una carga puntual $+q$.



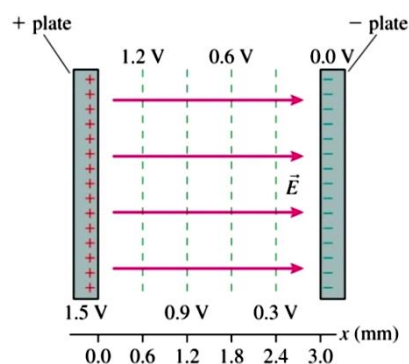
(a)



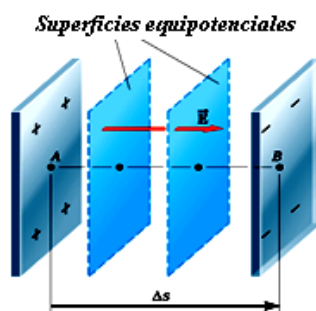
(b)

Figura 4.10.2. (a) Líneas equipotenciales y líneas de fuerza para una carga puntual q . (b) superficies equipotenciales para la carga q .

En la figura 4.10.3a se muestra las líneas equipotenciales (líneas de color verde) en la región comprendida entre dos placas cargadas con cargas iguales y de signos opuestos y en la figura 4.10.2b se muestran dos superficies equipotenciales para la misma configuración



(a)



(b)

Figura 4.10.3. (a) Líneas equipotenciales y líneas de fuerza para dos planos paralelos cargados. (b) superficies equipotenciales para la distribución de planos paralelos

En la figura 4.10.4a se muestra las líneas equipotenciales (líneas de color naranja) en la región comprendida entre dos cargas puntuales de igual valor pero diferente signo (dipolo) y en la figura 4.10.4b se muestran dos superficies equipotenciales dos cargas puntuales de igual valor y signo.

Las propiedades de las superficies equipotenciales pueden resumirse como sigue.

- Las líneas de campo eléctrico son perpendiculares a las equipotenciales
- Por simetría, las superficies equipotenciales producidas por cargas puntuales son una familia de esferas concéntricas, y para campos eléctricos uniformes, una familia de planos perpendiculares a las líneas de campo.
- La componente tangencial del campo eléctrico a lo largo de la superficie equipotencial es cero, por otra parte ningún trabajo puede hacerse para mover una carga de un punto a otro en una superficie.

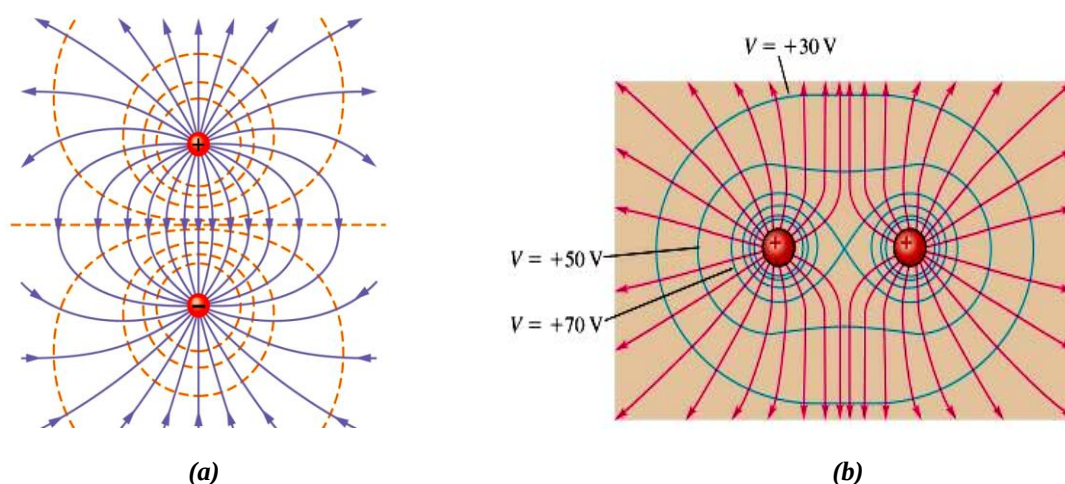


Figura 4.10.1. (a) Superficies equipotenciales y líneas de fuerza para un dipolo. (b) superficies equipotenciales y líneas de campo para dos cargas iguales

Un uso análogo a las curvas equipotenciales son los mapas topográficos (figura 4.10.5) utilizados por los alpinistas y excursionistas. En un mapa topográfico se trazan curvas de nivel que pasan por los puntos que tienen una misma elevación. Cada línea de contorno matemáticamente se expresa como $z = f(x, y) = \text{constante}$. Debido a que el potencial gravitacional cerca a la superficie terrestre es $V_g = gz$, estas curvas corresponden a equipotenciales gravitacionales.

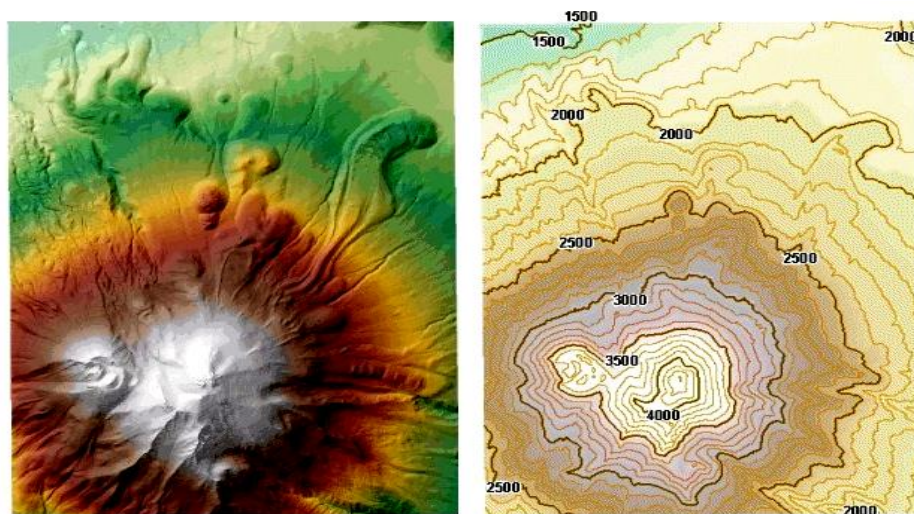


Figura 4.10.5. Mapas topográficos de un volcán

4.11 EQUIPOTENCIALES Y CONDUCTORES.

En el capítulo anterior, usando la ley de Gauss se demostró que cuando se alcanza el equilibrio electrostático permanente, una carga adicional que se coloque en un conductor aislado se moverá a la superficie exterior. Podemos asegurar que la carga q se distribuirá en esta superficie de tal manera que todos los puntos del conductor, incluyendo los de la superficie y los interiores tienen el mismo potencial. Por lo tanto, el campo eléctrico $\vec{E}$ es siempre perpendicular a la superficie del conductor (figura 4.11.1).

Por otro lado, si un conductor contiene una cavidad y no existe carga en el interior de ésta, entonces *no puede haber carga neta en ninguna parte de la superficie de la cavidad*. Esto significa que si una persona está en el

interior de una caja conductora con carga (figura 4.11.1b), puede tocar sin peligro alguno cualquier punto de las paredes interiores a la caja sin sufrir descarga. **¡Demuestre este teorema!**

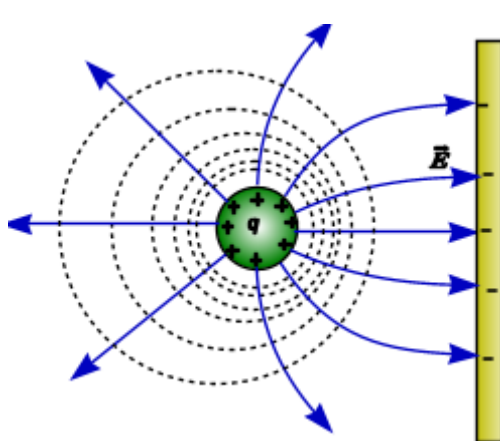


Figura 4.10.1. (a) En equilibrio electrostático las líneas de campo son perpendiculares a las superficies equipotenciales. (b) Un hombre en el interior al tocar la caja metálica no experimenta descarga a pesar que en la parte exterior existe una descarga intensa.

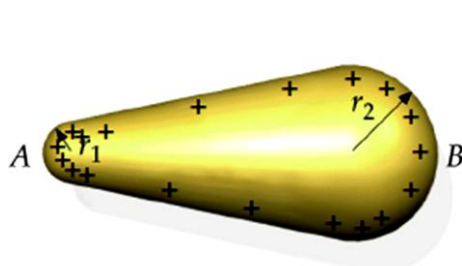
Finalmente, establecemos que la distribución de carga en un conductor es proporcional al inverso del radio de curvatura del conductor, esto es

$$\sigma \propto \frac{1}{R} \quad (4.57)$$

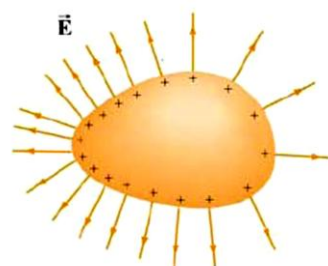
Donde σ es la densidad de carga superficial y R el radio de curvatura de la superficie en el punto en cuestión. Es decir, la carga tiende a acumularse en las partes más aguzadas del conductor, en donde el radio de curvatura es pequeño. Por otro lado, debido a que el campo eléctrico es proporcional a la densidad de carga σ y por consiguiente, es proporcional a $(1/R)$. Por tanto $\vec{E}$ puede alcanzar valores muy elevados cerca de las puntas aguzadas. Este hecho es utilizado en el diseño de dispositivos de alto voltaje. Puede además ocurrir una descarga corona en estos objetos si su potencial es muy alto.

Podemos entender este efecto considerando un conductor de forma no esférica (figura 4.10.2b), la superficie de este será equipotencial, pero la densidad de carga y el campo justamente fuera del conductor varían de un punto a otro. Así por ejemplo en A la densidad de carga y el campo serán grandes mientras que en B estas cantidades son mucho menores. Esto se entiende cualitativamente asumiendo que el extremo A es esférico y B tiene un radio de curvatura mayor. Por tanto, si σ es la densidad de carga, entonces el potencial será

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (4.58)$$



(a)



(b)

Figura 4.10.2 (a) En el conductor de forma arbitraria las cargas se concentran en aquella zona donde el radio de curvatura es menor, (b) El campo es más intenso en las zonas de menor radio de curvatura

Pero la densidad de carga está relacionada con el radio y la carga mediante $q = 4\pi r^2 \sigma$. Entonces al remplazar este valor en el potencial se tiene

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi r^2 \sigma}{r} = \frac{\sigma r}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V}{r} \quad (4.59)$$

Debido a que ambas “esferas” está al mismo potencial, la de menor radio tendrá mayor densidad superficial de carga. Y como el campo está dado por $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, el campo es mucho mayor en los puntos sobre el conductor donde el radio de curvatura es mínimo (véase la figura 4.10.2b).

Ejemplo 4.15

¿Cuáles son (a) la carga y (b) la densidad de carga sobre la superficie de un conductor de forma esférica de radio $R = 20 \text{ cm}$ el cual posee un potencial de 500 V (con $V = 0$ en el infinito)?

Solución.

Parte a. Para determinar la carga en la superficie del conductor primero se determina el campo eléctrico fuera del conductor, posteriormente se determina el potencial en puntos exteriores $r > R$ y después el potencial en la superficie de dicho conductor.

Campo para $r > R$. La figura 4.10.3 se muestra el conductor rodeada por la superficie gaussiana de radio $r > R$.

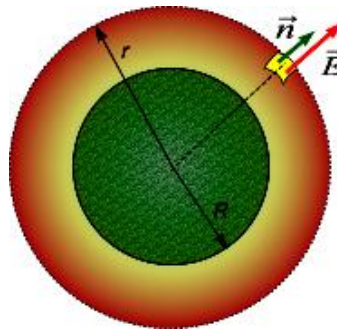


Figura 4.10.3 Superficie gaussiana para determinar E en puntos exteriores al conductor

Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\epsilon_0 \oint_{S,G} \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q_{enc} \Rightarrow \epsilon_0 E (4\pi r^2) = q$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Potencial para $r > R$. Debido a que el campo eléctrico solo depende de r y teniendo en cuenta que $V(\infty) = 0$, se tiene

$$dV = -E_r dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$\int_{V_\infty=0}^{V(r)} dV = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}$$

$$V(r) - 0 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} + \frac{1}{\infty} \right]$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

El potencial en la superficie del conductor será

$$V_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Entonces la carga en la superficie será

$$V_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$q = 4\pi\epsilon_0 R V_R = 4\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2)(0,20\text{m})(500\text{V})$$

$$q = 11,12 \text{ nC}$$

Parte (b) La densidad de carga en la superficie es

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{11,12 \text{ nC}}{4\pi(0,2\text{m})^2}$$

$$\sigma = 5,6 \text{ nC} / \text{m}^2$$

Ejemplo 4.16

El potencial eléctrico de una placa metálica aislada muy grande es V_0 . Ésta lleva una distribución de carga uniforme sobre su superficie con una densidad σ (C/m^2). Determine el potencial V a una distancia x de la placa. Considere que el punto x está lejos de los bordes y asumir que x es mucho menor que las dimensiones de las placas.

Solución

En la figura se muestra la placa cargada positivamente.

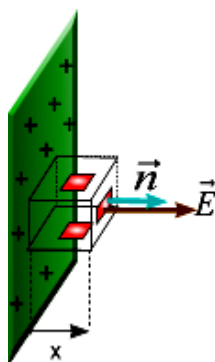


Figura 4.10.3 Aplicación de la ley de Gauss a un plano conductor cargado

Aplicando la ley de Gauss a la superficie en forma de paralelepípedo y teniendo en cuenta que el flujo en una de las caras es nulo por estar en el conductor, además en las otras caras paralelas al campo eléctrico tampoco existe flujo y sólo hay flujo en la cara situada a una distancia x del plano, se tiene:

$$\oint_{S,G} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow \int (E_x \hat{i}) \cdot (dA \hat{i}) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E_x A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

El potencial a una distancia x se obtiene a partir de la ecuación $E_x = -\frac{dV}{dx}$, esto es

$$dV = -E_x dx = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} dx$$

$$\int_{V_0}^V dV = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^x dx \Rightarrow V - V_0 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} x$$

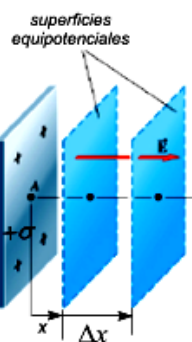
$$V = V_0 - \frac{\sigma}{\epsilon_0} x$$

Problema 01

Una lámina no conductora infinita tiene una densidad de carga $\sigma = 25 \text{ nC/m}^2$ sobre un lado. ¿Qué distancia se encuentran separadas dos superficies equipotenciales cuyos potenciales difieren en 25 V.

Solución.

En la figura se muestra la lámina y las dos superficies equipotenciales



Despreciando el efecto de los bordes y considerando que la intensidad del campo eléctrico para un plano infinito es uniforme y esta dado por $\vec{E} = \sigma/2\epsilon_0 \vec{i}$. Entonces la diferencia de potencial será

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} \right) \cdot (dx \vec{i})$$

$$\int_A^B dV = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{x_A}^{x_B} dx$$

$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_B - x_A) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Delta x$$

$$V_A - V_B = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Delta x$$

Entonces la separación entre las equipotenciales es

$$\Delta x = \frac{2\epsilon_0(V_A - V_B)}{\sigma} = \frac{2(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2)(25\text{V})}{25 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2}$$

$$\Delta x = 17,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Problema 02

Una partícula tiene una masa de $m_1 = 3 \text{ mg}$ y una carga $q_1 = 8,0 \mu\text{C}$. Una segunda partícula tiene una masa de $m_2 = 6 \text{ mg}$ y la misma carga. Las dos partículas están inicialmente en reposo separadas cierta distancia y entonces soltadas. Debido a la repulsión electrostática las partículas se separan, y cuando dicha

separación entre ellas es de 10 cm, la velocidad de la partícula m_1 es 125 m/s. Encuentre la separación inicial entre las partículas.

Solución

La fuerza que actúa sobre las dos partículas es la fuerza eléctrica y ésta es conservativa. Por lo tanto, la energía total (cinética más potencial eléctrica) se conserva cuando las partículas se separan. En suma, la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema de dos partículas es nula (las fuerzas eléctricas que se ejercen las partículas entre sí son fuerzas internas). Así el momento lineal del sistema también se conserva. Entonces podemos utilizar la conservación de la energía y la conservación del momento lineal para encontrar la separación inicial.

Aplicando la conservación de energía se tiene

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 + \frac{k q_1 q_2}{r_i} = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 + \frac{k q_1 q_2}{r_f}$$

Resolviendo esta ecuación para determinar $\frac{1}{r_1}$ y teniendo en cuenta que $v_{1,i} = v_{2,i} = 0$, se tiene

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r_f} + \frac{1}{k q_1 q_2} \left[\frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 \right] \quad (a)$$

Aplicando la conservación del momento lineal para encontrar la relación entre las velocidades finales se tiene

$$(p_i)_{\text{sistema}} = (p_f)_{\text{sistema}}$$

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

$$0 = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

$$v_{2,f} = -\frac{m_1}{m_2} v_{1,f} = -\frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{6 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} (125 \text{ m/s})$$

$$v_{2,f} = -62,5 \text{ m/s} \quad (b)$$

Remplazando (b) en (a) y simplificando se tiene

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{0,1} + \frac{1}{9 \cdot 10^9 (8 \cdot 10^{-6})^2} \left[\frac{1}{2} (3 \cdot 10^{-3}) (125)^2 + \frac{1}{2} (3 \cdot 10^{-3}) (-62,5)^2 \right]$$

$$r_i = 1,41 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Problema 03

El potencial eléctrico en la superficie de una esfera uniformemente cargada es 450 V. En un punto fuera de la esfera a una distancia radial de 20 cm desde su

superficie, el potencial eléctrico es 150 V. Asumiendo que el potencial para puntos muy alejados de la esfera es cero. ¿Cuál es el radio de la esfera, y cuál es la carga de la esfera?

Solución

Sea R el radio de la esfera y Q su carga. Podemos expresar el potencial de las dos ubicaciones dadas y resolver las ecuaciones simultáneamente para determinar R y Q

El potencial en la superficie de la esfera es

$$V_R = \frac{kQ}{R} = 450V \quad (a)$$

El potencial a una distancia de 20 cm de la superficie será

$$V_r = \frac{kQ}{R} = \frac{kQ}{R+0,20m} = 150V \quad (b)$$

Dividiendo las dos ecuaciones anteriores se tiene

$$\frac{\frac{kQ}{R}}{\frac{kQ}{R+0,20m}} = \frac{450V}{150V}$$

$$R = 10cm$$

Al remplazar este valor en (a) se tiene

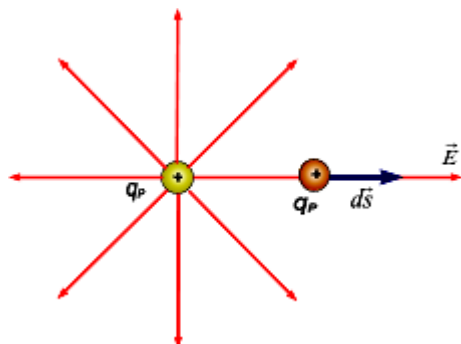
$$Q = \frac{450V(0,10m)}{9 \cdot 10^9 N \cdot m^2 / C^2} = 5nC$$

Problema 04

Encuentre el cambio en la energía potencial eléctrica cuando dos protones inicialmente separados $0,100 \text{ nm}$ se apartan hasta estar completamente separados.

Solución

Asumimos que un protón está fijo y el otro se va a mover en el campo del primer protón



El cambio en la energía potencial eléctrica está dado por

$$\Delta U = -q_p \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{s} = -q_p \int_R^\infty \left(\frac{kq_p}{r^2} \hat{i} \right) \cdot (dr \hat{i})$$

$$\Delta U = -kq_p^2 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = -kq_p^2 \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty$$

$$\Delta U = -\frac{q_p^2}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{9 \cdot 10^9 N \cdot m^2 / C^2 (1,6 \cdot 10^{-19} C)^2}{0,1 \cdot 10^{-9}}$$

$$\Delta U = -2,3 \cdot 10^{-18} J$$

Note que $\Delta U = U(\infty) - U(R)$. Es habitual considerar $U(\infty) = 0$ de tal manera que podemos decir que la energía potencial de los protones fue $U(R) = +2,3 \cdot 10^{-18} J$. Estos protones originalmente tienen una alta energía potencial por ello ellos tienden a separarse cuando se les da la oportunidad.

Problema 05

Una gota esférica de agua lleva una carga de 30 pC tiene un potencial de 500 V en su superficie (con $V = 0$ en el infinito). (a) ¿Cuál es el radio de la gota?. Si dos gotas con la misma carga y radios iguales se combinan para formar una sola gota, ¿Cuál el potencial de la superficie de la nueva gota?.

Solución

- (a) Consideremos a la gota como un conductor, de tal manera que el potencial está dado por

$$V = \frac{kQ}{R} \Rightarrow R = \frac{kQ}{V} = \frac{9 \cdot 10^9 (30 \cdot 10^{-12})}{500}$$

$$R = 54mm$$

- (b) Cuando se combinan dos gotas, la gota nueva tiene otro radio, el mismo que se determina a partir de la conservación de la masa

$$M = 2m_0$$

$$\rho \left(\frac{4}{3} \pi R_1^3 \right) = 2\rho \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$$

$$R_1 = R\sqrt[3]{2} = 54\sqrt[3]{2} = 76,37mm$$

El potencial de la nueva gota será

$$M = 2m_0$$

$$\rho \left(\frac{4}{3} \pi R_1^3 \right) = 2\rho \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$$

$$R_1 = R(2^{1/3})$$

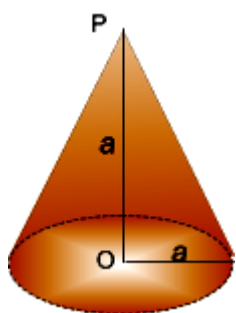
$$V_1 = \frac{kQ_1}{R_1} = \frac{k(2q)}{R(2^{1/3})} = \frac{2}{(2^{1/3})} V_0$$

$$V_1 = \frac{2}{(2^{1/3})} (500V)$$

$$V_1 = 793,7V$$

Problema 06

Encuentre la diferencia de potencial entre la parte superior (P) y el centro de la base (O) de un cono de radio a y altura a , el cual lleva una densidad de carga σ sobre el área lateral.

**Solución**

Debido a la geometría el ángulo del cono es 45° . Para encontrar el potencial primero dividamos a la superficie lateral en rebanadas de radio x a una profundidad z (desde el vértice del cono). Por ser el ángulo de 45° el radio x es igual a la altura z . La longitud del elemento diferencial a lo largo de la pendiente es $dS = \sqrt{2}dz$ y el área del pequeño elemento diferencial es $dA = (2\pi z)\sqrt{2}dz$. Por lo tanto la contribución del elemento diferencial al potencial es

$$dV = \frac{k\sigma(2\sqrt{2}\pi z dz)}{\sqrt{z^2 + (a-z)^2}}$$

La diferencia de potencial entre los puntos P y O se determina integrando la ecuación anterior, es decir

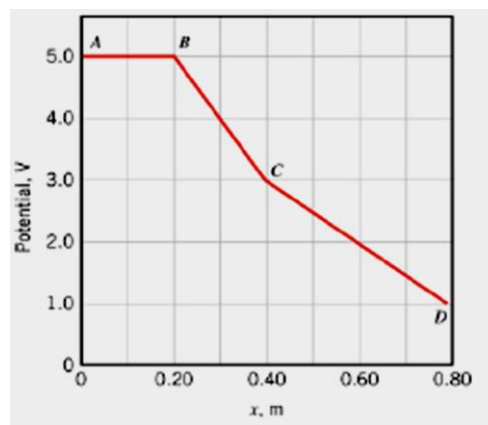
$$\int_{V_P}^{V_O} dV = \frac{2\sqrt{2}\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{z=0}^{z=a} \frac{z dz}{\sqrt{z^2 + (a-z)^2}}$$

$$V_O - V_P = \frac{\sigma a}{\sqrt{2}\epsilon_0} \ln \left(\frac{a\sqrt{2} + a}{a\sqrt{2} - a} \right)$$

Problema 07

El potencial eléctrico (V) como una función de la distancia es graficado en la figura. Determine la

magnitud del campo eléctrico en las regiones (a) A a B; (b) B a C y (c) C a D.

**Solución**

El campo eléctrico entre puntos en el espacio es proporcional a la diferencia de potencial entre puntos dividida por la distancia entre ellos. Esto es

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

Parte (a). Campo entre A y B

$$E_1 = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{5,0V - 5V}{0,2m - 0,0m} = -0V/m$$

Parte (b). Campo entre B y C

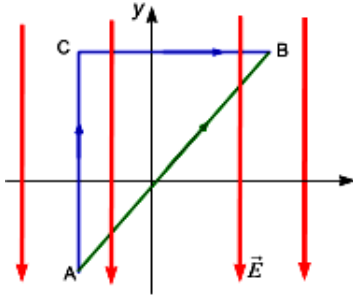
$$E_2 = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{3,0V - 5,0V}{0,4m - 0,2m} = 10V/m$$

Parte (b). Campo entre B y C

$$E_3 = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{1,0V - 3,0V}{0,8m - 0,4m} = 5V/m$$

Problema 08

Un campo eléctrico uniforme de magnitud 325 V/m está dirigido en dirección negativa de las y y como se muestra en la figura. Las coordenadas del punto A son $(-0,2 \text{ m}, -0,3 \text{ m})$ y las coordenadas del punto B es $(-0,4 \text{ m}, -0,5 \text{ m})$. Determine la diferencia de potencial: (a) utilizando la trayectoria ACB, (b) utilizando la trayectoria recta AB y (c) ¿Cuál punto está a mayor potencial?.

**Solución**

Parte (a) Diferencia de potencial para el trayecto ACB

$$\begin{aligned}\int_A^B dV &= -\int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{s} - \int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ V_B - V_A &= -\int_A^C (-E\hat{j}) \cdot (ds\hat{j}) - \int_C^B (-E\hat{j}) \cdot (ds\hat{i}) \\ V_B - V_A &= +E(s_C - s_A) - 0 \\ V_B - V_A &= (325 \text{ N/C})(0,8 \text{ m}) = 260 \text{ V}\end{aligned}$$

Parte (b) Diferencia de potencial para el trayecto AB

$$\begin{aligned}\int_A^B dV &= -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ V_B - V_A &= -\int_A^B (-E\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) \\ V_B - V_A &= E \int_A^B dy = E(y_B - y_A) \\ V_B - V_A &= (325 \text{ N/C})(0,8 \text{ m}) = 260 \text{ V}\end{aligned}$$

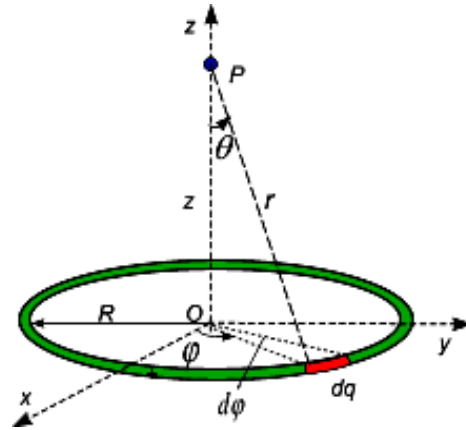
Problema 09

Con una barra plástica se ha formado un aro de radio R . Éste tiene una carga $+Q$ distribuida uniformemente a lo largo de un cuarto de circunferencia y una carga negativa $-6Q$ ha sido distribuida a lo largo del resto del anillo. Considerando a $V = 0$ en el infinito, determine el potencial eléctrico: (a) en el centro del anillo y (b) en un punto O , el cual está sobre el eje del anillo a una distancia z del centro.

Solución

Parte (b). Debido a que la parte (a) es un caso particular de (b) entonces comenzamos con la última para ello dividimos a la distribución en elementos de carga dq de longitud ds , entonces el potencial será

$$\begin{aligned}dV &= k \frac{dq}{r} = k \frac{(\lambda_+) ds}{r} + k \frac{(\lambda_-) ds}{r} \\ dV &= k \frac{(\lambda_+ R) d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2}} + k \frac{(\lambda_- R) d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2}}\end{aligned}$$



El campo total se obtiene integrando la ecuación anterior, esto es

$$\begin{aligned}V &= \frac{\lambda_+ R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{\lambda_- R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \int_{\pi/2}^{2\pi} d\theta \\ V &= \frac{\lambda_+ R \left(\frac{\pi}{2}\right)}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{\lambda_- R \left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \\ V &= \frac{\lambda_+ R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\lambda_- R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ V &= \frac{\left(\frac{+Q}{2\pi R/4}\right) R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(\frac{-6Q}{6\pi R/4}\right) R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ V &= \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{6Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}\end{aligned}$$

$$V = -\frac{5Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$

Parte (a). El potencial en el centro del anillo será

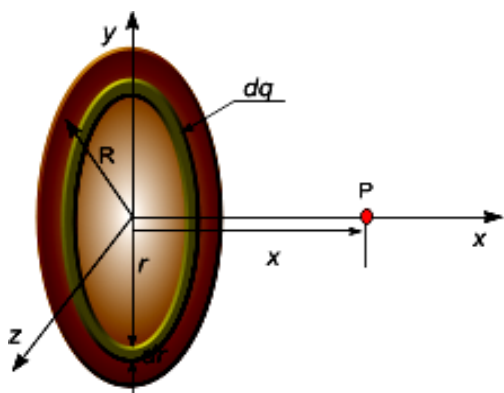
$$\begin{aligned}V &= -\frac{5Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} = -\frac{5Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + 0^2}} \\ V_o &= -\frac{5Q}{4\pi\epsilon_0 R}\end{aligned}$$

Problema 10

Un disco de radio R tiene una densidad de carga superficial dada por $\sigma = \sigma_0 R/r$. Donde σ_0 es una constante y r es la distancia desde el centro del disco. Encuentre: (a) la carga total sobre el disco. (b) una expresión para el potencial eléctrico a una distancia x desde el centro del disco sobre el eje que pase a través del centro del disco y es perpendicular a su plano.

Solución

Podemos encontrar Q mediante integración de la carga sobre un anillo de radio r y espesor dr desde $r = 0$ hasta $r = R$ y el potencial en el eje del disco mediante integración de la expresión del potencial en el eje de un anillo de carga entre los mismos límites.



Parte (a). La expresión para la carga de un anillo de radio r y espesor dr está dada por

$$dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r dr) = \frac{\sigma_0 R}{r}(2\pi r dr)$$

$$dq = 2\pi\sigma_0 R dr$$

La carga total del anillo se obtiene integrando la expresión anterior, esto es

$$Q = \int dq = 2\pi\sigma_0 R \int_0^R dr$$

$$Q = 2\pi\sigma_0 R^2$$

El potencial producido por dq en el punto P es

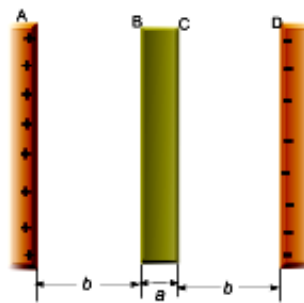
$$dV = k \frac{dq}{|r|} = k \frac{2\pi\sigma_0 R dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

El potencial neto en P se obtiene integrando la ecuación anterior

$$V = \frac{\sigma_0 R}{2\epsilon_0} \ln \left[\frac{R + \sqrt{R^2 + x^2}}{x} \right]$$

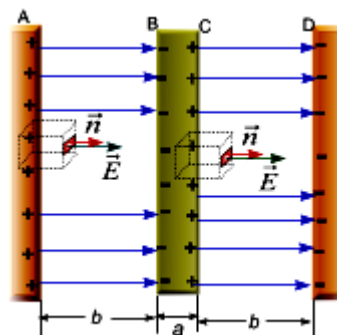
Problema 11

Las tres placas conductoras mostradas en la figura están, cada una separadas por una distancia b . Si las cargas sobre las dos placas extremas son $\pm\sigma$ como se muestra en la figura. Determine la diferencia de potencial entre las placas extremas



Solución

Debido a que las placas son conductoras en la placa CD se inducen cargas $-\sigma$ en el lado B y $+\sigma$ en el lado C.



Además usando la ley de Gauss se determina el campo $\vec{E}$ entre las láminas AB y CD, esto es

$$\oint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E(A) = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

La diferencia de potencial entre A y B es

$$\int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B (E \hat{i}) \cdot (dx \hat{i})$$

$$V_B - V_A = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_B - x_A) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} d \quad (1)$$

La diferencia de potencial entre C y D es

$$\int_C^D dV = -\int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_C^D (E \hat{i}) \cdot (dx \hat{i})$$

$$V_D - V_C = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_D - x_C) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

Debido a que la placa central es conductora, el campo en su interior es cero y como tal todos los puntos están al mismo potencial por tanto $V_C = V_B$. Entonces se tiene

$$V_D - V_B = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} d \quad (2)$$

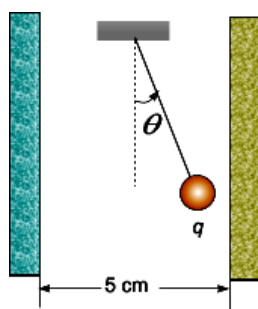
Sumando las ecuaciones se tiene

$$V_D - V_A = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}d - \frac{\sigma}{\epsilon_0}d$$

$$V_D - V_A = -\frac{2\sigma}{\epsilon_0}d$$

Problema 12

Una pequeña esfera de 3,2 g de masa cuelga de un hilo de seda entre dos placas conductoras paralelas verticales separadas 5 cm. La carga en la esfera es 5,8 μC . ¿Qué diferencia de potencial entre las placas hará que el hilo forme un ángulo de $\theta = 30^\circ$ con la vertical.



Solución

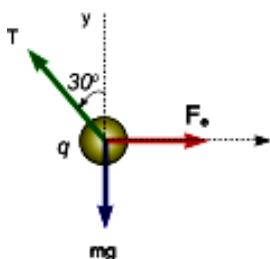
Debido a que la carga $+q$ se desvía hacia la derecha, entonces el campo eléctrico entre las placas debe estar dirigido hacia la derecha, por ello la placa izquierda es positiva y la derecha negativa. Entonces la diferencia de potencial será

$$\int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B (E\vec{i}) \cdot (dx\vec{i})$$

$$V_B - V_A = -Ed$$

$$V_A - V_B = +Ed \quad (a)$$

En la figura se muestra el DCL de la carga, sobre ella actúan el Peso (mg); la tensión en el hilo (T) y la fuerza eléctrica debido al campo ($F_e = qE$).



Aplicando las ecuaciones de equilibrio según los ejes mostrados se tiene

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T \cos 30^\circ = mg$$

$$T = \frac{mg}{\cos 30^\circ} \quad (b)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow qE = T \sin 30^\circ \quad (c)$$

Remplazando (b) en (c) se tiene

$$qE = mgtg30^\circ \quad (d)$$

Remplazando la ecuación (a) en (d), resulta

$$q \left(\frac{\Delta V}{d} \right) = mgtg30^\circ$$

$$\Delta V = \frac{mgtg30^\circ}{q} = \frac{3,2 \cdot 10^{-3} (9,8) (5 \cdot 10^{-2}) tg30^\circ}{5,8 \cdot 10^{-6}}$$

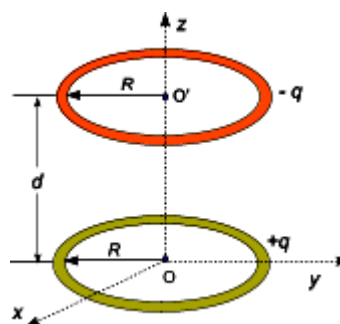
$$\Delta V = 156V$$

Problema 13

Se tiene dos anillos finos de alambre de radio R , cuyos ejes coinciden. Sus cargas son iguales a q y $-q$. Determine la diferencia de potencial entre sus centros, siendo la distancia entre ellos igual a d .

Solución

En la figura se muestra a ambos anillos



En el ejemplo se demostró que el potencial para un anillo en puntos sobre su eje es

$$V = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

El potencial en el punto O' es la suma de los potenciales del anillo $+q$ y del anillo $-q$. es decir

$$V_{O'} = V_{+q, O'} + V_{-q, O'}$$

$$V_{O'} = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{kq}{R}$$

El potencial en el punto O es la suma de los potenciales del anillo $+q$ y del anillo $-q$. es decir

$$V_O = V_{+q,O} + V_{-q,O}$$

$$V_O = \frac{kq}{R} - \frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

La diferencia de potencial entre sus centros será.

$$V_{O'} - V_O = \left(\frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{kq}{R} \right) - \left(\frac{kq}{R} - \frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

$$V_{O'} - V_O = \frac{2kq}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$

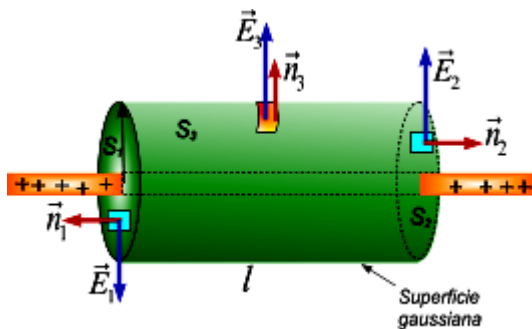
$$V_{O'} - V_O = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$

Problema 14

Se tiene un hilo recto y muy largo, cargado con una densidad lineal de carga $\lambda = 0,40 \mu\text{C/m}$. Determine la diferencia de potencial en los puntos A y B si el punto B dista $\eta = 2,0$ veces más del hilo, que el A.

Solución

En la figura se muestra el hilo recto y muy largo conjuntamente con una superficie gaussiana cilíndrica que permite evaluar el campo producido por el hilo



$$\oint_{S,G} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi r l) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Como el campo solo depende de la distancia r al alambre, la diferencia de potencial entre los puntos A y B será

$$dV = -E dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

$$\int_A^B dV = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r}$$

$$V_B - V_A = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\eta r_A}{r_A}\right)$$

$$V_A - V_B = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(\eta)$$

Remplazando valores se tiene

$$V_A - V_B = \frac{0,40 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{2\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2)} \ln 2$$

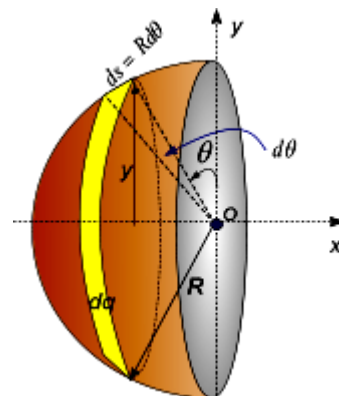
$$V_A - V_B = 5,0 \text{ kV}$$

Problema 15

Halle el potencial eléctrico en el centro de una semiesfera de radio R , cargada con una densidad superficial de carga σ

Solución

Para determinar el potencial de la distribución de carga en O, se divide a ésta en anillos de radio y con un espesor $ds = R d\theta$ como se muestra en la figura



El potencial del elemento diferencial será

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma(2\pi y ds)}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma(R \cos \theta)(R d\theta)}{2\epsilon_0 R}$$

$$dV = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \cos \theta d\theta$$

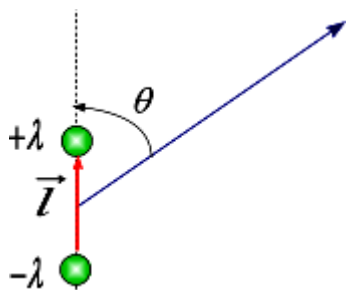
El potencial neto en el punto O se obtiene integrando la expresión anterior

$$V = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} [\sin \theta]_0^{\pi/2}$$

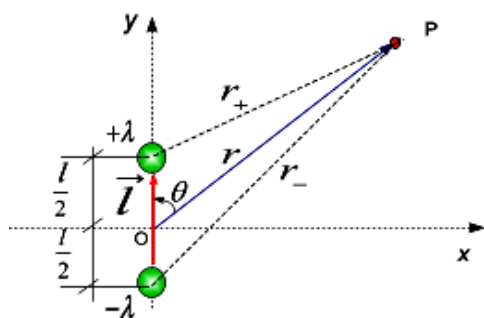
$$V = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$$

Problema 16

Dos hilos finos y paralelos que distan l se cargan uniformemente hasta la densidad lineal λ y $-\lambda$. Determine el potencial eléctrico a la distancia $r \gg l$ bajo un ángulo θ al vector $\vec{r}$ como se muestra en la figura.

**Solución.**

En la figura se muestra el punto P donde se halla V



En el problema N° 10 se ha demostrado que el potencial para un alambre infinito está dado por

$$V = -2k\lambda \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

Donde el potencial cero se considera en un punto de referencia $r = a$.

El potencial debido al alambre que transporta una densidad $+\lambda$, será

$$V_+ = 2k\lambda \ln\left(\frac{a}{r_+}\right)$$

El potencial debido al alambre que transporta una densidad $-\lambda$, será

$$V_- = -2k\lambda \ln\left(\frac{a}{r_-}\right)$$

El potencial total en el punto P será

$$V = V_+ + V_- = 2k\lambda \ln\left(\frac{a}{r_+}\right) - 2k\lambda \ln\left(\frac{a}{r_-}\right)$$

$$V = 2k\lambda \left[-\ln r_+ + \ln r_- \right] = 2k\lambda \left[\ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right) \right]$$

Haciendo uso de la ley de cosenos se tiene

$$r_+^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - 2r\left(\frac{l}{2}\right)\cos\theta$$

$$r_-^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2r\left(\frac{l}{2}\right)\cos\theta$$

El potencial se escribe ahora en la forma

$$V = 2k\lambda \ln \left[\frac{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - 2r\left(\frac{l}{2}\right)\cos\theta}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2r\left(\frac{l}{2}\right)\cos\theta}} \right]$$

$$V = 2k\lambda \ln \left[\frac{\left(1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{l}{r}\cos\theta\right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{l^2}{4r^2} + \frac{l}{r}\cos\theta\right)^{1/2}} \right]$$

Teniendo en cuenta que para $r \gg l$, $\frac{l^2}{4r^2} \approx 0$, se tiene

$$V \approx 2k\lambda \left[\ln\left(1 + \frac{l}{r}\cos\theta\right)^{1/2} - \ln\left(1 - \frac{l}{r}\cos\theta\right)^{1/2} \right]$$

$$V \approx k\lambda \left[\ln\left(1 + \frac{l}{r}\cos\theta\right) - \ln\left(1 - \frac{l}{r}\cos\theta\right) \right]$$

Usando la relación $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$

$$\ln\left(1 + \frac{l}{r}\cos\theta\right) = \frac{l}{r}\cos\theta - \left(\frac{l}{r}\cos\theta\right)^2 + \dots$$

$$\ln\left(1 - \frac{l}{r}\cos\theta\right) \approx -\frac{l}{r}\cos\theta$$

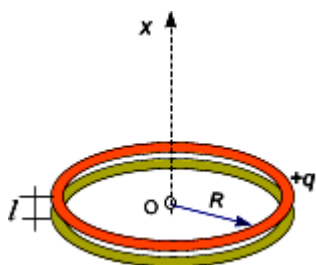
Remplazando este desarrollo en la ecuación para el potencial total se tiene.

$$V \approx k\lambda \left[\frac{l}{r} \cos \theta + \frac{l}{r} \cos \theta \right] = \frac{2k\lambda l}{r} \cos \theta$$

$$V \approx \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0 r} \cos \theta$$

Problema 17

Dos anillos coaxiales finos de alambre de radios R cada uno se encuentran a una pequeña distancia l uno de otro ($l \ll R$) y tienen cargas $+q$ y $-q$. Determine el potencial eléctrico en el eje del sistema como función de la coordenada x (véase la figura).

**Solución**

El potencial para un anillo está dado por la ecuación

$$V = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + x^2}} \quad (a)$$

El potencial en un punto P sobre el eje x producido por los anillos cargados es

$$V_+ = \frac{kq}{\sqrt{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + R^2}} \quad \text{y} \quad V_- = \frac{kq}{\sqrt{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + R^2}}$$

El potencial neto en cualquier punto sobre el eje x es

$$V = V_+ + V_- = \frac{kq}{\sqrt{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + R^2}} - \frac{kq}{\sqrt{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + R^2}}$$

$$V = kq \left[\frac{\left(x^2 + R^2 + xl + \frac{l^2}{4}\right)^{1/2} - \left(x^2 + R^2 - xl + \frac{l^2}{4}\right)^{1/2}}{\left(x^2 + R^2 + xl + \frac{l^2}{4}\right)^{1/2} \left(x^2 + R^2 - xl + \frac{l^2}{4}\right)^{1/2}} \right]$$

$$V = \frac{kQ\sqrt{x^2 + R^2}}{x^2 + R^2} \left[\frac{\left(1 + \frac{lx}{x^2 + R^2} + \frac{l^2}{4(x^2 + R^2)}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{lx}{x^2 + R^2} + \frac{l^2}{4(x^2 + R^2)}\right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{lx}{x^2 + R^2} + \frac{l^2}{4(x^2 + R^2)}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{lx}{x^2 + R^2} + \frac{l^2}{4(x^2 + R^2)}\right)^{1/2}} \right]$$

Si $R \gg l$, entonces $\frac{l^2}{4(x^2 + R^2)}$ entonces se tiene

$$V \approx \frac{kQ(x^2 + R^2)}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \left[\frac{\left(1 + \frac{lx}{x^2 + R^2}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{lx}{x^2 + R^2}\right)^{1/2}}{\left(1 - \left(\frac{lx}{x^2 + R^2}\right)^2\right)^{1/2}} \right]$$

Usando el binomio de newton tenemos

$$V \approx \frac{kQ(x^2 + R^2)}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{lx}{x^2 + R^2}\right) + \dots\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{lx}{x^2 + R^2}\right) + \dots\right)}{\left(1 - \left(\frac{lx}{x^2 + R^2}\right)^2\right)^{1/2}} \right]$$

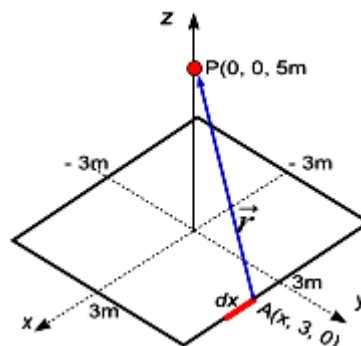
Simplificando resulta

$$V \approx \frac{kQ(x^2 + R^2)}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \left[\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{lx}{x^2 + R^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{lx}{x^2 + R^2}\right)}{\left(1 - \left(\frac{lx}{x^2 + R^2}\right)^2\right)^{1/2}} \right]$$

$$V \approx \frac{ql}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Problema 18

Una carga lineal uniforme $\lambda = 1 \text{ nC/m}$ está arreglada en forma de un cuadrado de 6 m de lado, como se muestra en la figura. Determine: (a) El potencial en el punto $P(0, 0, 5 \text{ m})$ (b) en el centro del cuadrado; (c) el trabajo necesario para trasladar una carga de $600 \mu\text{C}$ desde el punto P hasta el centro del cuadrado.

**Solución**

Parte (a) El potencial en el punto P debido al elemento diferencial de carga $dq = \lambda dx$ es

$$dV = \frac{k dq}{\sqrt{x^2 + 34}} = \frac{k \lambda dx}{\sqrt{x^2 + 34}}$$

El potencial debido a este lado del cuadrado será la suma (integración) del potencial diferencial

$$V_p = k \lambda \int_{-3}^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 34}}$$

$$V_p = 8,89V$$

El potencial debido al cuadrado completo en P será

$$V_{tot,P} = 4V_p = 4(8,89V) = 35,56V$$

Parte (b) El potencial en el punto O debido a un lado es

$$V_O = k \lambda \int_{-3}^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$V_O = 15,84V$$

El potencial debido al cuadrado completo en O será

$$V_{tot,O} = 4V_p = 4(15,84V) = 63,36V$$

Parte (c) El trabajo es

$$W_{P \rightarrow O} = q_{movil} (V_{tot,O} - V_{tot,P})$$

$$W_{P \rightarrow O} = 600 \cdot 10^{-6} (63,36 - 35,56)$$

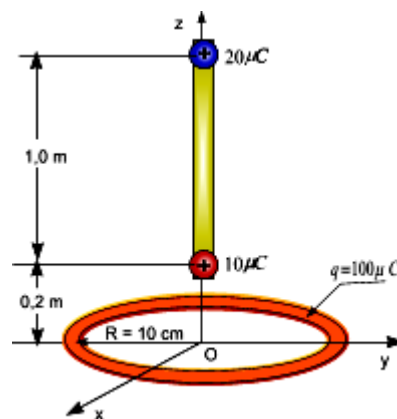
$$W_{P \rightarrow O} = 16,68 \cdot 10^{-3} J$$

Problema 19

Un anillo cargado uniformemente con una carga total de $100 \mu C$ y un radio de 10 cm yace en el plano xy con su centro en el origen. Una regla de metro tiene una carga puntual de $10 \mu C$ en el extremo marcado con el O y una carga puntual de $20 \mu C$ en el extremo marcado con 100 cm . ¿Qué trabajo hay que realizara para transportar la regla de metro desde una distancia muy grande hasta una posición a lo largo del eje z con el extremo marcado con O en $z = 0,2 \text{ m}$ y el otro extremo en $z = 1,2 \text{ m}$.

Solución

En la figura se muestra al anillo y a la regla con las cargas puntuales en su posición final.



El trabajo realizado para traer la regla con las cargas desde un punto muy alejado y colocarlo en dicha configuración es

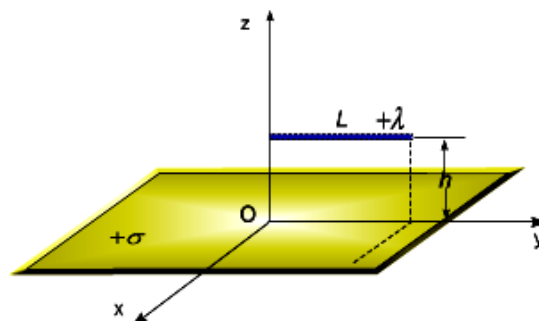
$$W_{\infty \rightarrow P} = q_{mov} V_p = q_1 \left(\frac{k q_{anillo}}{\sqrt{0,1^2 + 0,2^2}} \right) + q_2 \left(\frac{k q_{anillo}}{\sqrt{0,1^2 + 1,2^2}} \right)$$

$$W_{\infty \rightarrow P} = \frac{9 \cdot 10^9 (10 \cdot 10^{-6}) (100 \cdot 10^{-6})}{\sqrt{0,1^2 + 0,2^2}} + \frac{9 \cdot 10^9 (20 \cdot 10^{-6}) (100 \cdot 10^{-6})}{\sqrt{0,1^2 + 1,2^2}}$$

$$W_{\infty \rightarrow P} = 55,19 J$$

Problema 20

Una carga lineal de longitud L (m) y densidad de carga uniforme λ C/m, está situada paralelamente a una lámina infinita la que lleva una densidad superficial σ C/m², tal como se indica en la figura. Determine el trabajo necesario para girar la carga lineal un ángulo de 90° hasta situarla sobre el eje z



Solución

Se ha demostrado que el campo eléctrico para una distribución plana infinita es

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_n$$

El potencial eléctrico será

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -\left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}\right) \cdot (dz \hat{k}) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz$$

$$\int_{V_i}^{V_f} dV = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{z_i}^z dz$$

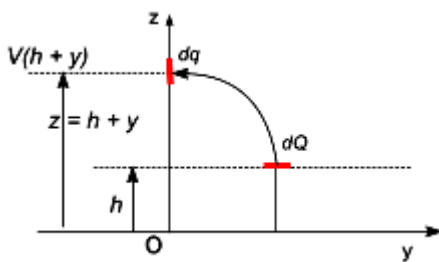
$$V_f = V_i - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z - z_i)$$

$$V = cte - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$$

El trabajo del campo eléctrico para trasladar el elemento de carga $dq = \lambda dy$ desde el punto inicial al final, está dado por la ecuación

$$dW_{i \rightarrow f} = dq(V_i - V_f)$$

Al girar la carga lineal, el elemento de carga $dq = \lambda dy$ situado a una distancia y del origen, pasa del potencial $V_i = V(h)$ al potencial $V_f = V(z) = V(h + y)$



$$dW_{i \rightarrow f} = \lambda(V_i - V_f) dy = \frac{\sigma \lambda}{2\epsilon_0} y dy$$

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{\sigma \lambda}{2\epsilon_0} \int_0^a y dy$$

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{\sigma \lambda a^2}{4\epsilon_0}$$

Problema 21

Una distribución de carga con simetría esférica cuya densidad está dada por $\rho(r) = Ar$ C/m³ para $r \leq R$, y $\rho(r) = 0$ para $r \geq R$, siendo k una constante. La carga total contenida en la esfera de radio R es Q . Determine: (a) el valor de la constante k en función de Q y R ; (b) la intensidad de campo eléctrico en puntos interiores y exteriores de la esfera, y (c) el potencial en la superficie $V(R)$ y el potencial en el origen $V(0)$.

Solución

Parte (a). Se divide a la distribución volumétrica en elementos de carga en forma de cascaras esféricas de radio r y espesor dr , entonces la carga de este elemento diferencial será

$$dq = \rho(r)dV = Ar(4\pi r^2 dr) = 4\pi Ar^3 dr$$

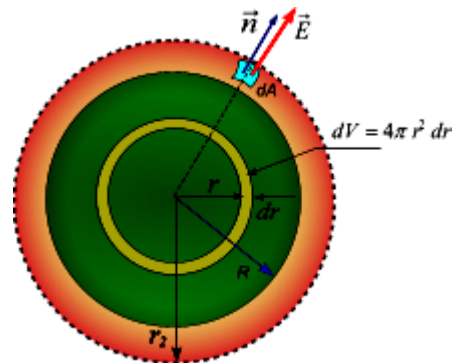
$$Q = 4\pi A \int_0^R r^3 dr$$

$$Q = \pi AR^4$$

Despejando el valor de la constante A se tiene

$$A = \frac{Q}{\pi R^4}$$

Parte (b). Campo para puntos exteriores

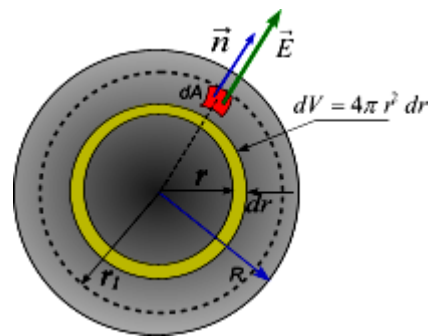


La ley de Gauss nos da

$$\oint_{S,G} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Campo para puntos interiores



La ley de Gauss nos da

$$\oint_{S,G} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\pi R^4} \right) \int_0^r r^3 dr$$

$$E = \frac{Qr^2}{4\pi\epsilon_0 R^4}$$

Parte (c). Potencial para puntos exteriores

$$dV = -E dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$\int_{V_\infty}^V dV = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_\infty^r r^{-2} dr \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

El potencial en la superficie es

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Potencial para puntos interiores

$$dV = -E dr = -\frac{Qr^2}{4\pi\epsilon_0 R^4} dr$$

$$\int_{V_R}^V dV = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^4} \int_R^r r^2 dr$$

$$V - V_R = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^4} \left[\frac{r^3}{3} \right]_R^r$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^3}{3R^3} \right)$$

$$V = \frac{Q}{12\pi\epsilon_0 R} \left(4 - \frac{r^3}{R^3} \right)$$

El potencial en el centro de la esfera es ($r = 0$)

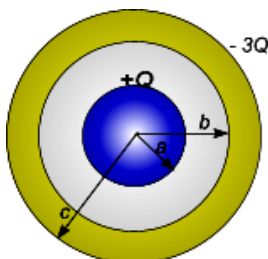
$$V(0) = \frac{Q}{3\pi\epsilon_0 R}$$

Problema 22

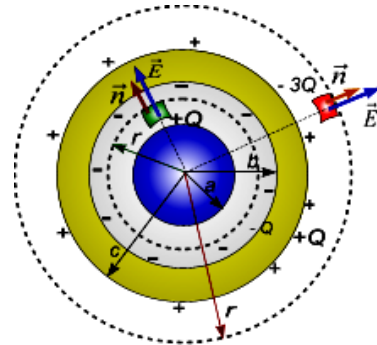
Una corteza conductora esférica de radio interno b y radio externo c rodea concéntricamente una pequeña esfera metálica de radio $a < b$. La esfera metálica tiene una carga positiva $+Q$ mientras que la carga total de la esfera conductora es $-3Q$. (a) ¿Cuál es el potencial de la corteza esférica?. (b) ¿Cuál es el potencial de la esfera metálica?.

Solución

En la figura se muestra al sistema



Primero se halla el campo eléctrico usando la ley de Gauss



Campo para $a < r < b$

$$\oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{+Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Campo para $b < r < c$

$$\oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{+Q - Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{0}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

Campo para $r > c$

$$\oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{+Q - Q + Q - 3Q}{\epsilon_0}$$

$$E = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Potencial eléctrico para puntos exteriores

$$dV = -E dr = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$\int_{V_\infty}^V dV = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \int_\infty^r r^{-2} dr$$

$$V - 0 = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_\infty^r \Rightarrow V = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

El potencial en la superficie del cascaron es

$$V_C = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 c}$$

Debido a que el campo en el interior del cascarón es nulo, el potencial permanece constante, entonces

$$V_b = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 c}$$

Potencial eléctrico para $b < r < c$

$$dV = -E dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$\int_{V_b}^{V_a} dV = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a r^{-2} dr$$

$$V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_b^a \Rightarrow V_a = V_b + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

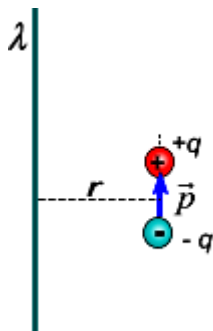
$$V_a = \frac{-2Q}{4\pi\epsilon_0 c} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{2}{c} \right]$$

Problema 23

A la distancia r de un filamento largo, cargado con la densidad lineal de carga λ , se encuentra un dipolo, cuyo momento dipolar eléctrico es $\vec{p}$. Determine la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre el dipolo, si el vector $\vec{p}$ se orienta: (a) a lo largo del filamento; (b) a lo largo del radio vector $\vec{r}$.

Solución

Parte (a) En la figura se muestra al alambre y el dipolo



El campo eléctrico para una línea cargada uniformemente a una distancia r es

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Fuerza sobre la carga positiva

$$\vec{F}_+ = q\vec{E} = +q \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{i}$$

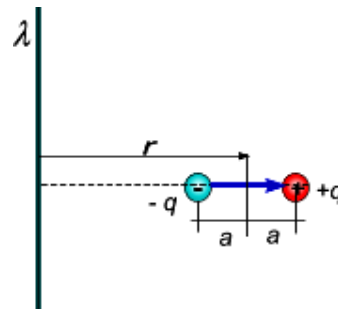
La fuerza sobre la carga negativa es

$$\vec{F}_- = q\vec{E} = -q \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{i}$$

La fuerza resultante sobre el dipolo es

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= \vec{F}_+ + \vec{F}_- = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{i} - \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{i} \\ \vec{F}_R &= 0 \end{aligned}$$

Parte (b) En la figura se muestra al alambre y el dipolo



La fuerza sobre $-q$ es

$$\vec{F}_- = q\vec{E} = -\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0(r-a)} \vec{i}$$

La fuerza sobre $+q$ es

$$\vec{F}_+ = q\vec{E} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0(r+a)} \vec{i}$$

La fuerza resultante sobre el dipolo es

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= \vec{F}_+ + \vec{F}_- = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0(r+a)} \vec{i} - \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0(r-a)} \vec{i} \\ \vec{F}_R &= \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r+a} - \frac{1}{r-a} \right) \vec{i} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{-2a}{(r+a)(r-a)} \right) \vec{i} \end{aligned}$$

Debido a $r \gg a$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= -\frac{2qa\lambda}{2\pi\epsilon_0 \left[r^2 \left(1 + \frac{a}{r} \right) \left(1 - \frac{a}{r} \right) \right]} \vec{i} \\ \vec{F}_R &= -\frac{\lambda \vec{p}}{2\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

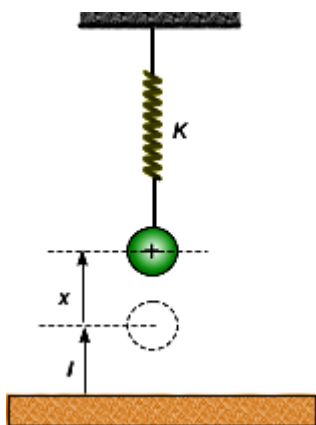
Problema 24

Sobre un plano conductor ilimitado cuelga, de un hilo elástico aislante de rigidez K , una pequeña bola. Una

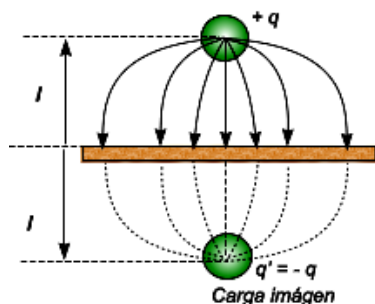
vez que la bola se cargó ésta descendió x cm, y su distancia hasta el plano conductor llegó a ser igual a l . Determine la carga de la bola.

Solución

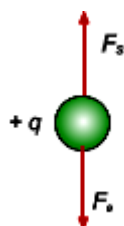
En la figura se muestra la disposición de los elementos según el enunciado.



Para resolver el problema usamos el método de imágenes, es decir al colocar la carga $+q$ cerca del plano los electrones libres de éste se redistribuyen quedando el plano cargado con carga de signo contrario a la carga inductora $+q$. Las líneas de fuerza salen de la carga positiva y terminan en el plano conductor. El plano conductor se comporta como una superficie equipotencial, debido a la simetría de las líneas de fuerza podemos “IMAGINAR” que las líneas convergen en donde se encuentra la carga imagen q' , tal que $q' = -q$.



Ahora el sistema inicial se reduce a la interacción entre dos cargas puntuales para ello se traza el DCL de la bola con carga $+q$ en donde se observa que sobre ella actúan la fuerza elástica ($F_s = Kx$) y la fuerza eléctrica ($F_e = q/4\pi\epsilon_0 (2l)^2$), observe que el peso se desprecia



Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

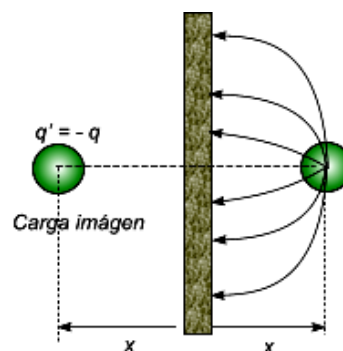
$$\begin{aligned}\sum F_v &= 0 \Rightarrow F_e = F_s \\ \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2l)^2} &= Kx \\ q &= 4l\sqrt{\pi\epsilon_0 Kx}\end{aligned}$$

Problema 25

A la distancia l de un plano conductor ilimitado se encuentra una carga puntual q . ¿Qué trabajo se necesita realizar contra las fuerzas eléctricas para separar lentamente esta carga a una gran distancia del plano?

Solución

En la figura se muestra el plano infinito conjuntamente con la carga $+q$. Además se usa el método de imágenes para evaluar el problema, es decir a una distancia x está q y a la izquierda la carga imagen $q' = -q$ a una distancia idéntica $-x$.



La fuerza eléctrica entre la carga $+q$ y la carga imagen será

$$\vec{F}_e = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2x)^2} \vec{i} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} \vec{i}$$

El trabajo necesario será

$$\begin{aligned}W_{i \rightarrow \infty} &= \int_l^\infty \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = \int_l^\infty \left(-\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} \vec{i} \right) \cdot dx \vec{i} \\ W_{i \rightarrow \infty} &= -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_l^\infty x^{-2} dx = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x} \right]_l^\infty \\ W_{i \rightarrow \infty} &= -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l}\end{aligned}$$

El trabajo hecho por un agente externo es

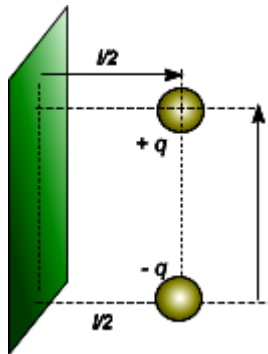
$$W_{\text{agen}} = -W_{i \rightarrow \infty, \text{campo}} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l}$$

Problema 26

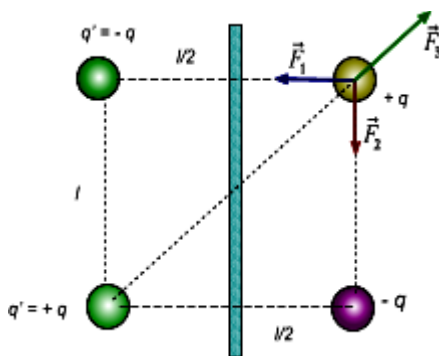
Las carga puntuales $+q$ y $-q$ se sitúan a la distancia l una de la otra y a unas distancias idénticas $l/2$ de un mismo lado de un plano conductor ilimitado. Determine el módulo del vector fuerza sobre la carga positiva $+q$.

Solución

En la figura se muestra la ubicación de las cargas y el plano infinito



Las cargas imagen se muestra en la figura



La fuerzas eléctricas sobre $+q$ serán

$$\vec{F}_1 = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2} \vec{i}$$

$$\vec{F}_2 = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2} \vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2} \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_3 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (l\sqrt{2})^2} \cos\theta \vec{i} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (l\sqrt{2})^2} \sin\theta \vec{j} \\ \vec{F}_3 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (l\sqrt{2})^2} \left(\frac{l}{l\sqrt{2}}\right) \vec{i} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (l\sqrt{2})^2} \left(\frac{l}{l\sqrt{2}}\right) \vec{j} \\ \vec{F}_3 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2 (2l^2)\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2 (2l^2)\sqrt{2}} \vec{j} \end{aligned}$$

La fuerza eléctrica resultante es

$$\vec{F}_R = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \right] (\vec{i} + \vec{j})$$

El módulo de la resultante será

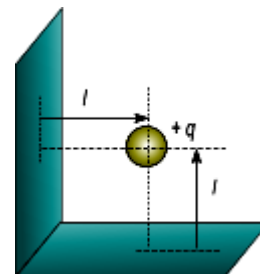
$$|\vec{F}_R| = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 l^2} (2\sqrt{2} - 1)$$

Problema 27

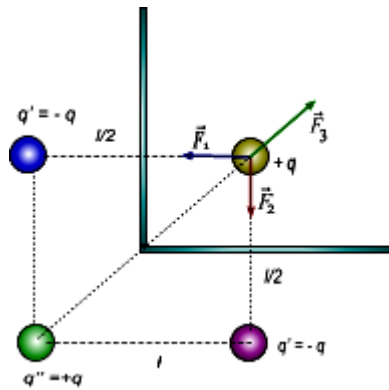
Entre dos semiplanos conductores mutuamente perpendiculares se encuentra una carga puntual $+q$, distante una distancia l de ambos. Determine la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga

Solución

En la figura se muestra la ubicación de la carga y los planos



La carga $+q$ induce cargas en los planos de tal manera que estos se comportan como superficies equipotenciales, entonces se traza las cargas imágenes como se muestra en la figura.



La fuerzas eléctricas sobre $+q$ serán

$$\vec{F}_1 = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2l)^2} \vec{i}$$

$$\vec{F}_1 = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2l)^2} \vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2l)^2} \cos\theta \vec{i} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(l\sqrt{2})^2} \sin\theta \vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(l\sqrt{8})^2} \left(\frac{2l}{l\sqrt{8}}\right) \vec{i} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(l\sqrt{8})^2} \left(\frac{2l}{l\sqrt{8}}\right) \vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0^2(8l^2)\sqrt{8}} \vec{i} + \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0^2(8l^2)\sqrt{8}} \vec{j}$$

La fuerza eléctrica resultante es

$$\vec{F}_R = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 \sqrt{8}} [1 - \sqrt{8}] (\vec{i} + \vec{j})$$

El módulo de la resultante será

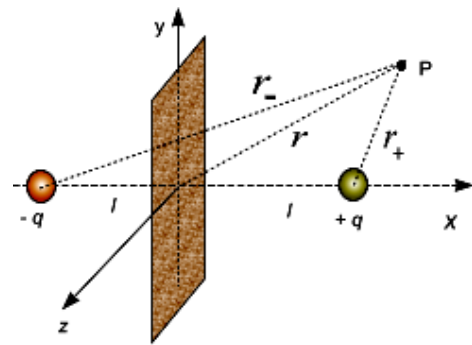
$$|\vec{F}_R| = \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 l^2} (2\sqrt{2} - 1)$$

Problema 28

Una carga puntual $+q$ se encuentra a la distancia l de un plano conductor ilimitado. Determine la densidad superficial de cargas, inducidas en el plano, en función de la distancia r desde la base de la perpendicular bajada de la carga al plano.

Solución

En la figura se muestra al plano, la carga $+q$ y la carga imagen correspondiente, y un punto arbitrario del espacio en donde se halla el potencial.



El potencial electrostático en el punto P será

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+l)^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

La densidad superficial es

$$\sigma_{yz} = \epsilon_0 E_{x=0} = \epsilon_0 \left[-\frac{\partial V}{\partial x} \right]_{x=0}$$

$$\sigma_{yz} = -\epsilon_0 q \frac{\partial}{\partial x} \left[((x-l)^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} - ((x+l)^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right]$$

$$\sigma_{yz} = -\epsilon_0 q \left[\frac{-(x-l)}{((x-l)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{(x+l)}{((x+l)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right]_{x=0}$$

Remplazando $x = 0$

$$\sigma_{yz} = -\frac{q}{4\pi} \left[\frac{l}{(l^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{l}{(l^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

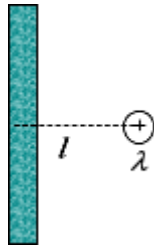
$$\sigma_{yz} = -\frac{q}{2\pi} \frac{l}{(l^2 + r^2)^{3/2}}$$

Problema 29

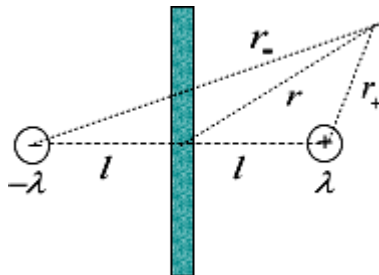
Un hilo fino de longitud ilimitada tiene una carga por unidad de longitud λ y se sitúa paralelamente a un plano conductor infinito. la distancia entre el hilo y el plano es igual a l . Determine: (a) el módulo del vector de la fuerza que actúa por unidad de longitud del hilo; (b) La distribución de la densidad superficial de carga $\sigma(r)$ en el plano, donde x es la distancia hasta el plano perpendicular a la superficie conductora y que pasa a través del hilo.

Solución

En la figura se muestra las dos distribuciones de carga



Para determinar la fuerza se usa el método de imágenes, para esto el plano se considera como una superficie equipotencial. Entonces la fuerza $\vec{F}$ que la carga ejerce sobre la placa es del mismo valor pero de sentido contrario a la fuerza que la placa (o la imagen q') ejerce sobre la carga



Parte (a) Fuerza entre la carga imagen $-\lambda$ y la carga $+\lambda$. Para ello determinamos el campo eléctrico por la carga imagen en el punto de ubicación de la carga lineal positiva

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{i} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (2l)} \vec{i}$$

$$\vec{F} = (\lambda L) \left(-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (2l)} \vec{i} \right)$$

$$\frac{F}{L} = -\frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0 l} \vec{i}$$

Parte (b) Para determinar la densidad superficial de carga se determina primero el potencial en un punto arbitrario

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_+ - \ln r_-)$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln(\sqrt{(x-l)^2 + y^2 + z^2}) - \ln(\sqrt{(x+l)^2 + y^2 + z^2}) \right]$$

La densidad de carga superficial es

$$\sigma_{yz} = \epsilon_0 E_{x=0} = \epsilon_0 \left[-\frac{\partial V}{\partial x} \right]_{x=0}$$

$$\sigma_{yz} = -\epsilon_0 \left(-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left[\ln[(x-l)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} - \ln[(x+l)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} \right]$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{(x-l)}{[(x-l)^2 + y^2 + z^2]} - \frac{(x+l)}{[(x+l)^2 + y^2 + z^2]} \right]_{x=0}$$

$$\sigma_{yz} = -\frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{l}{(l^2 + y^2 + z^2)} + \frac{l}{(l^2 + y^2 + z^2)} \right]$$

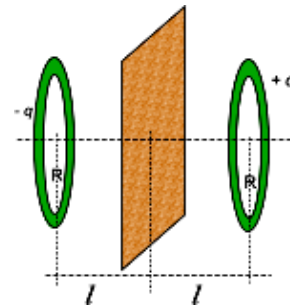
$$\sigma_{yz} = -\frac{\lambda}{\pi} \frac{l}{(l^2 + r^2)}$$

Problema 30

Un anillo de alambre fino de radio R tiene una carga q . El anillo se sitúa paralelamente a un plano conductor ilimitado a la distancia l , determine el potencial y la intensidad de campo eléctrico en el centro del anillo.

Solución

En la figura se muestra las distribuciones conjuntamente con la carga imagen que en este caso es un anillo que lleva una carga $-q$.



Primero determinamos el potencial en el centro del anillo positivo en este caso el plano es sustituido por la carga imagen.

$$V_o = \frac{kq}{R} - \frac{kq}{\sqrt{R^2 + 4l^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2l}{R}\right)^2}} \right)$$

El campo eléctrico será

$$E = -\frac{\partial V}{\partial l} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{\partial}{\partial l} \left[1 - \left(1 + \left(\frac{2l}{R} \right)^2 \right)^{-1/2} \right]$$

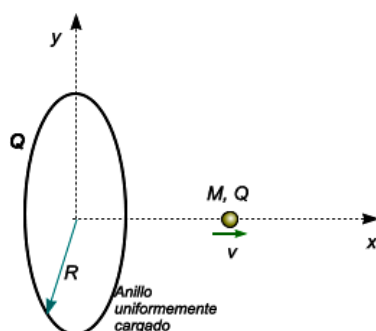
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2l}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \quad (4l)$$

$$E = \frac{ql}{2\pi\epsilon_0 R} \left(1 + \left(\frac{2l}{R} \right)^2 \right)^{-3/2}$$

Problema 31.

El eje de las x es el eje de simetría de un anillo estacionario uniformemente cargado de radio R y de carga Q , véase la figura. Inicialmente en el centro del anillo se ubica una carga

puntual Q de masa M . Cuando ésta es desplazada ligeramente, la carga puntual se acelera a lo largo del eje x hacia el infinito. Demuestre que la rapidez final de la carga puntual es $v = (2kQ^2/MR)^{1/2}$.



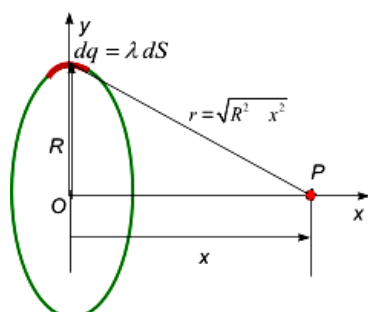
Solución

Primero se determina el potencial eléctrico en cualquier punto P sobre el eje x . Para esto se divide la distribución en elementos de carga dq , tal como se muestra en la figura y está dado por

$$dq = \lambda dS = \frac{Q}{2\pi R} ds$$

El potencial en P debido a la distribución es

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda dS}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\frac{Q}{2\pi R} dS}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$



El potencial neto se obtiene integrando la ecuación anterior, es decir

$$V_x = \frac{\frac{Q}{2\pi R}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} \int_0^S dS = \frac{\frac{Q}{2\pi R}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} (2\pi R)$$

$$V_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$

El potencial en el centro del anillo será

$$V_{(x=0)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Debido a que la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa, entonces, se aplica la conservación de la energía para determinar la inquietud solicitada en el enunciado, esto es

$$T_i + U_{e,i} = T_f + U_{e,f}$$

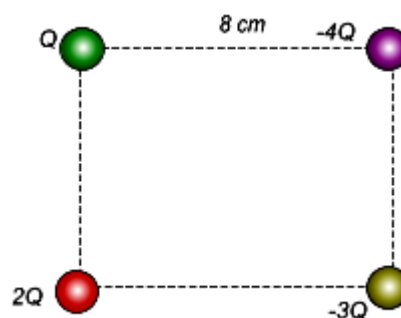
$$\frac{1}{2} Mv_i^2 + QV_i = \frac{1}{2} Mv_f^2 + QV_f$$

$$\frac{1}{2} Mv_0^2 + QV_0 = \frac{1}{2} Mv_\infty^2 + QV_\infty$$

$$0 + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{2} Mv^2 + Q(0)$$

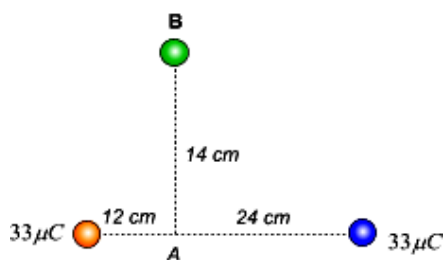
$$v = \sqrt{\frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 MR}}$$

eléctrica almacenada en el sistema, relativa a $U = 0$ a una separación infinita.

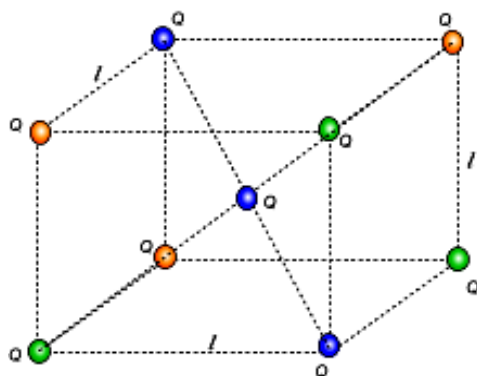


Problemas propuestos

- Una carga puntual de $+33 \mu\text{C}$ es localizada a 36 cm de una carga idéntica de $+33 \mu\text{C}$. Una carga puntual de $-1,5 \mu\text{C}$ es movida desde el punto A al punto B, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el cambio en la energía potencial.

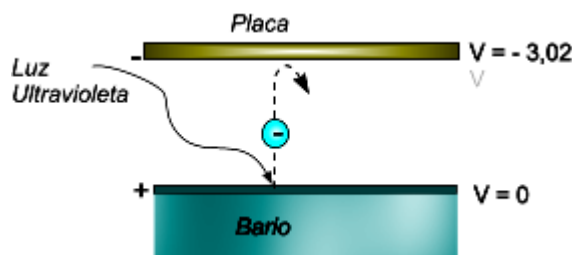


- En cada una de las esquinas y en el centro de un cubo de lado l hay una carga puntual Q , como se muestra en la figura. (a) ¿Cuál es el potencial en centro del cubo ($V = 0$ en $r = \infty$)?. (b) ¿Cuál es el potencial en cada una de las esquinas debido a las otras ocho cargas?. (c) ¿Cuál es la energía potencial del sistema?.



- Cuatro cargas puntuales están localizadas en las esquinas de un cuadrado que tiene $8,0 \text{ cm}$ de lado. Las cargas Q , $2Q$, $-3Q$, y $-4Q$ son colocadas sucesivamente alrededor del cuadrado como se muestra en la figura. ¿Cuál es la energía potencial

- En una fotocelda, la luz ultravioleta provee suficiente energía a algunos electrones en la placa de bario para emerger de la superficie a alta velocidad como se muestra en la figura. Para medir la máxima energía de los electrones, se colocó otra placa sobre la placa de bario la misma que está a un suficiente potencial de tal manera que los electrones emitidos son lentamente detenidos y retornados a la superficie de la placa de bario. Si el potencial de la placa superior es $-3,02 \text{ V}$ (comparado a la de bario) cuando los electrones son detenidos. ¿Cuál fue la velocidad de estos electrones cuando ellos fueron emitidos?.

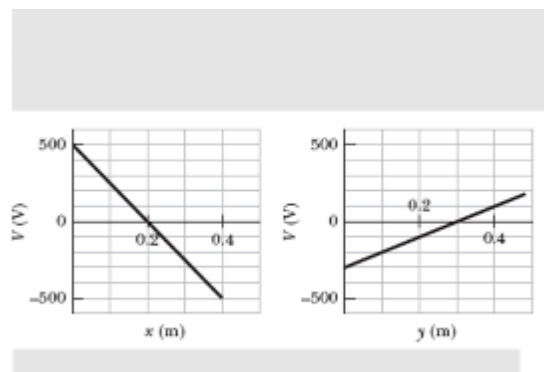


- El potencial en cierta región del espacio está dada por la ecuación

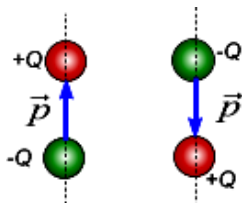
$$V = V_0 + V_1(3x - y) + \frac{V_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Donde $(x^2 + y^2 + z^2) \neq 0$ y $V_0 = 3,2 \cdot 10^2 \text{ V}$, $V_1 = 6,89 \cdot 10^2 \text{ V/m}$, $V_2 = 9,80 \cdot 10^2 \text{ V/m}$. Derivar una expresión para el campo eléctrico $\vec{E}(x, y, z)$ en algún punto. Calcular la magnitud de la intensidad de campo en el punto $(0, 1, -1)$ donde todas las distancias están dadas en metros.

- Un electrón es localizado en el plano xy donde el potencial eléctrico depende de x e y como se muestra en la figura (el potencial no depende de z). Usando la notación de vectores unitarios determine la fuerza eléctrica sobre el electrón.



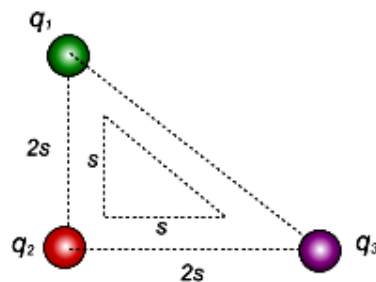
7. Una esfera no conductora de radio a posee una carga q_a . Rodeando a ésta hay dos cascarones conductores delgados, de radios b y c , $a < b < c$ los que llevan cargas q_b y q_c . El cascarón más externo está conectado a tierra. Obtenga expresiones para el potencial de las otras dos esferas.
8. Dos dipolos, cada uno con momento dipolar de $6 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$, están localizados como se muestra en la figura, siendo su separación $0,4 \text{ nm}$. Determine la energía potencial de los dipolos.



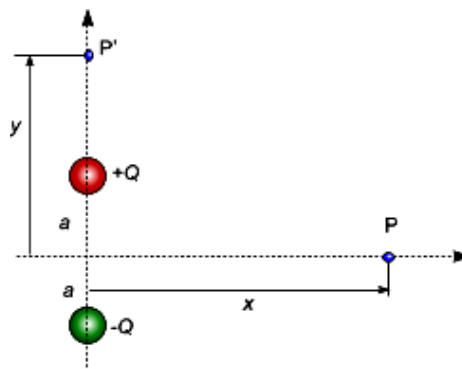
9. Si ahora los dipolos se colocan en línea recta como se muestra en la figura, determine la energía potencial de los dipolos.



10. Dos cargas eléctricas puntuales guardan la relación $q_1 = 3q_2 = 6,78 \mu\text{C}$. La carga q_1 está fija en el origen de un sistema coordenado. La carga q_2 está inicialmente localizada en un punto cuya posición es $\vec{r}_{2,i} = -3,0 \text{ m } \vec{i} - 5,0 \text{ m } \vec{j}$. Determine el trabajo hecho por la fuerza eléctrica si q_2 es movido a la posición dada por $\vec{r}_{2,f} = -6,0 \text{ m } \vec{i} + 3,0 \text{ m } \vec{j}$.
11. Tres cargas eléctricas idénticas están relacionadas por $q_1 = q_2 = q_3 = q = 4,339 \mu\text{C}$. Las cargas están fijas en los vértices de un triángulo rectángulo isósceles para el cual $2s = 2,0 \text{ m}$, como se representa en la figura. Determine la cantidad de trabajo que se puede hacer en conjunto para mover las cargas hasta ocupar la configuración final donde $s = 1,0 \text{ m}$

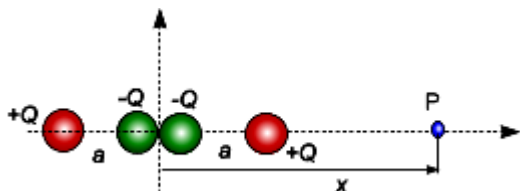


12. Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas puntuales de igual magnitud y signos opuestos que están separados por una distancia $l = 2a$. Uno de estos dipolos es representado en la figura. (a) Determine el potencial en un punto arbitrario P' sobre el eje y tal que $y > a$; (b) Determine la forma que esta expresión toma cuando $y \gg a$; (c) Usando la expresión de la parte (a) calcular el potencial cuando $y = 3a$, si q tiene una magnitud de $q = 2,48 \text{ nC}$ y el valor de a es $a = 0,0650 \text{ m}$; (d) Derivar una expresión para el potencial en el punto P sobre el eje x . (e) Determine la forma de la expresión cuando $x \gg a$; (f) Usando la respuesta de la parte (d) determine el potencial en $x = 3a$ para los mismos valores a q y a dados en la parte (c).

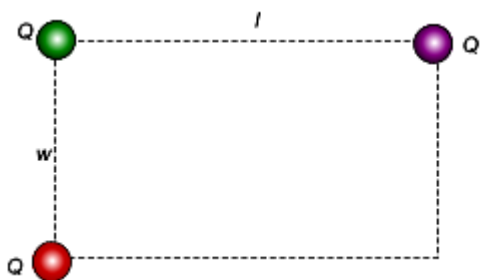


13. Un núcleo de helio de carga $Q_{He} = 2e$ y que tiene una masa $M_{He} = 6,646 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ es liberado desde el reposo en una región del espacio donde hay un campo eléctrico uniforme de magnitud $E = 5 \text{ kN/C}$ dirigido hacia el norte. Determine: (a) la velocidad del núcleo de helio en el instante en que se ha movido una distancia $l = 0,765 \text{ m}$; (b) el cambio en el potencial eléctrico durante su desplazamiento.
14. Un electrón de carga $Q_e = -e$ y que tiene una masa $M_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ es liberado desde el reposo en una región del espacio donde hay un campo eléctrico uniforme de magnitud $E = 5 \text{ kN/C}$ dirigido hacia el este. Determine: (a) la velocidad del electrón en el instante en que se ha movido una distancia $l = 1,0 \text{ m}$; (b) el cambio en el potencial eléctrico durante su desplazamiento.

15. Para el cuadrupolo eléctrico representado en la figura. (a) Derivar una expresión del potencial eléctrico en un punto arbitrario P sobre el eje x tal que $x > a$; (b) determine la forma de esta ecuación cuando el valor de x es mucho mayor que el valor de a , es decir, cuando $x \gg a$; (c) determine el potencial neto en P si $Q = 8,0 \text{ nC}$, $a = 0,00286 \text{ m}$ y $x = 2a$; (d) determine la energía potencial eléctrica para esta configuración de cargas.

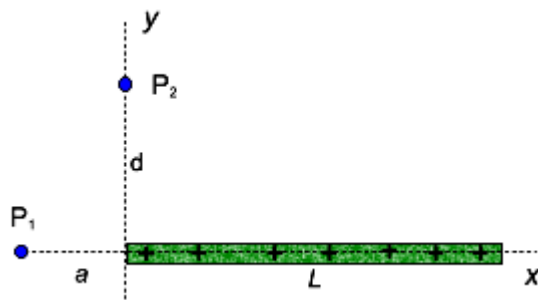


16. Tres cargas idénticas $q = 2,6 \mu\text{C}$ están fijas en los vértices de un rectángulo de dimensiones $l = 3w = 0,12 \text{ m}$, como se muestra en el diagrama. Determine: (a) El potencial eléctrico neto en el cuarto vértice, (b) el trabajo neto hecho para ensamblar dicha configuración, (c) la cantidad de trabajo hecho por el campo eléctrico durante el desplazamiento de una cuarta carga idéntica desde el infinito hasta el cuarto vértice.

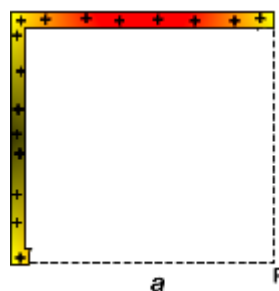


17. Un conductor esférico de radio R_1 está cargado a 20 kV . Cuando se conecta mediante un fino y largo alambre a una segunda esfera conductora situada lejos de él, su potencial cae a 12 kV . ¿Cuál es el radio de la segunda esfera?
18. Un anillo cargado uniformemente, de radio a y carga Q , se encuentra sobre el plano yz con su eje a lo largo del eje x . Una carga puntual se coloca Q_0 se sitúa sobre el eje x en $x = 2a$. (a) Determine el potencial eléctrico en cualquier punto del eje x debido al sistema de cargas. (b) Determine el campo eléctrico para cualquier punto sobre el eje x .

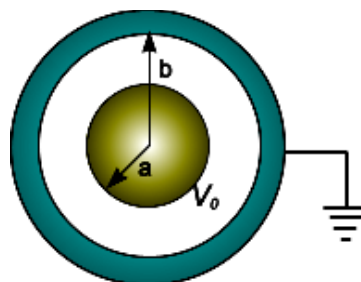
19. La varilla de plástico ilustrada en la figura tiene una longitud L , sobre ella se ha distribuido una carga con una densidad lineal no uniforme dada por $\lambda = \beta x$ donde β es una constante positiva. Considerando que $V = 0$ en el infinito, determine: (a) el potencial en el punto P_1 y (b) el potencial en P_2 ; (c) Si una carga q_0 se mueve desde P_1 hasta P_2 ¿Cuál es el trabajo desarrollado?



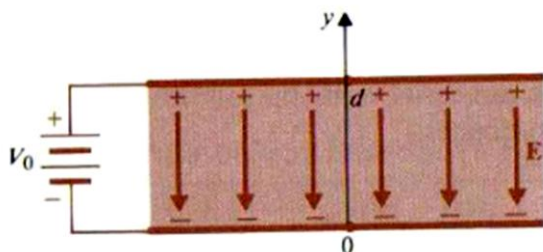
20. Un cilindro no conductor tiene una distribución de carga dada por una densidad de carga volumétrica $\rho = \rho_0(1 - \alpha r^2)$ para $r < R_0$ y $\rho = 0$ para $r > R_0$ (α es una constante). (a) encuentre el potencial eléctrico en puntos exteriores e interiores a la distribución de carga, (b) ¿Cuál es el valor de α ?
21. Dos lados de un no conductor cuadrado cuya longitud de sus lados es a son cargados positivamente con una densidad $\lambda = 3,70 \text{ nC/m}$. (a) Calcular el potencial eléctrico en el punto P. P está en la esquina del cuadrado. (b) calcular el trabajo sobre un protón para desplazarlo desde el infinito hasta el punto P



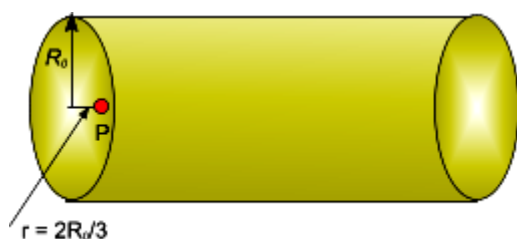
22. A lo largo del eje de un disco uniformemente cargado, en un punto situado a $0,6 \text{ m}$ del centro del disco, el potencial es 80 V y la magnitud del campo eléctrico es 80 V/m ; a una distancia de $1,5 \text{ m}$, el potencial es 40 V y el campo tiene un módulo de $23,5 \text{ V/m}$. Determine la carga total residente en el disco.
23. Considere un cable coaxial muy largo. El conductor interior tiene a y es mantenido a un potencial V_0 . El conductor exterior tiene un radio exterior b y está conectado a tierra. Determine la función potencial en el espacio entre los conductores.



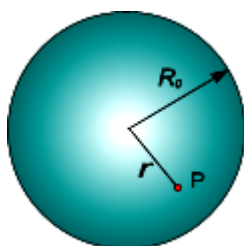
24. Las dos placas de un condensador están separadas una distancia d y mantenidas a potenciales 0 y V_0 . Asumiendo despreciable el efecto de los bordes, determine: (a) el potencial en cualquier punto dentro de las placas y (b) las densidades de cargas superficiales en las placas



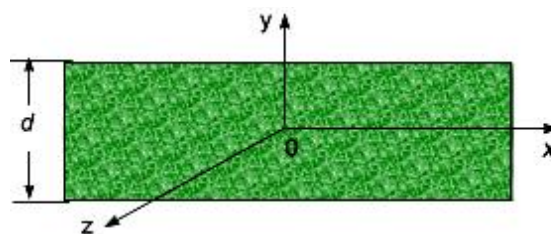
25. Dos esferas metálicas tienen 3,0 cm de radio y llevan cargas de +10 nC y -30 nC, respectivamente, asumiendo que las cargas son distribuidas uniformemente y que sus centros están separados 2,0 m. (a) Determine el potencial en el punto medio de la línea que une sus centros. (b) encuentre el potencial sobre cada esfera.
26. Considere un cilindro de material no conductor cuyo radio es R_0 y su longitud es infinita con una densidad de carga volumétrica $\rho = Ar^2$ donde r es la distancia medida desde el eje del cilindro. Calcular la diferencia de potencial entre un punto P y la superficie del cilindro. P está a un valor de $r = \frac{2R_0}{3}$. Asuma que el cilindro es cargado positivamente y establezca claramente el signo de la diferencia de potencial $V(P) - V(0)$.



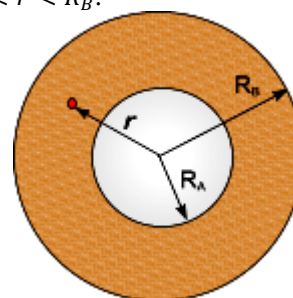
27. Una esfera no conductora es cargada negativamente con una densidad de carga dada por $\rho = Ar^3$, donde A es una constante. Si el radio de la esfera es R_0 . (a) calcule la magnitud de la diferencia de potencial entre la superficie de la esfera y un punto P situado a una distancia $r < R_0$ de su centro. (b) Establezca el signo de la diferencia de potencial $V(r) - V(R_0)$ y dar una explicación física clara (no matemática) para este signo. Si la carga total de la esfera es Q, calcule A.



28. Considere una plancha no conductora con un espesor d en la dirección y extendiéndose al infinito en las direcciones x y z, la plancha lleva una densidad de carga uniforme $\rho = 1,45 \mu C/m^3$. Si $d = 1,25$ m y el punto medio está en $y = 0$, encuentre la diferencia de potencial entre $y = 0$ y $y = +0,45$ m



29. Un tubo cilíndrico hueco de radio interno R_A y radio externo R_B es hecho de un material no conductor y tiene una densidad de carga $\rho = Ar^{-3}$ entre R_A y R_B y la densidad de carga es cero en todas las demás regiones. (a) Determine el campo eléctrico a una distancia arbitraria r desde el eje del tubo tal que $R_A < r < R_B$. (b) Si el potencial en R_A es $V = 0$, calcule la diferencia de potencial entre un punto en R_A y un punto a una distancia arbitraria r donde $R_A < r < R_B$.



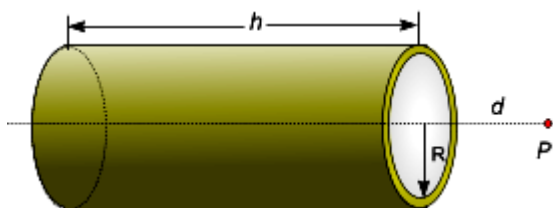
30. Una esfera no conductora de radio $R = 4$ cm tiene una densidad de carga $\rho = \rho_0(1 - Ar^5)$, donde ρ_0 y A son constantes. Si la carga total de la esfera es $3,3 \mu C$ y la densidad de carga tiende a cero en su superficie. (a) determine el valor numérico de las constantes ρ_0 y A. (b) Encuentre el valor numérico del potencial eléctrico en la superficie de la esfera. (c) Cuál es el valor numérico del campo eléctrico en un punto a 3,00 cm del centro
31. Una densidad de carga esférica es modelada como $\rho = Ar^2$, donde A es una constante y r es la distancia desde el centro de la esfera. El radio de la esfera R_0 . (el signo de la carga es incluido en A). (a) si tomamos $V = 0$ en $r = 0$ (el centro de la esfera), encuentre el potencial en $r = R_0/3$. (b) Si la carga total de la esfera es Q_T , encuentre el valor de A en función de R_0 , Q_T y ϵ_0 .
32. Se tienen dos cilindro coaxiales muy largos, que tienen cargas opuestas. El cilindro interior con carga negativa se encuentra a un potencial de -20 kV, mientras que el cilindro exterior, con carga

positiva, a $+10\text{ KV}$. Una fuerza externa mueve una carga puntual de $1\text{ }\mu\text{C}$, uniformemente, desde el cilindro negativo al positivo. ¿Cuánto trabajo efectúa la fuerza externa?

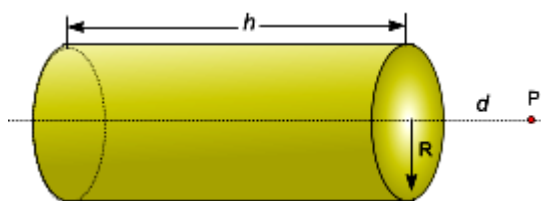
33. Encuentre el potencial eléctrico en el límite de un disco delgado de radio R , sobre el cual se distribuye uniformemente una carga, cuya densidad superficial es σ

34. Se tiene un condensador plano de placas circulares delgadas de radio R situadas a una distancia d ($d \ll R$) una de la otra y cargadas uniformemente hasta la densidad de carga σ y $-\sigma$. Determine el potencial en el eje del sistema en función de la distancia z hasta las placas, si $z \gg d$. Analice las expresiones para $z \gg R$.

35. Un cascarón cilíndrico uniformemente cargado tiene una carga total Q , un radio R y una altura h . Determine el potencial eléctrico en el punto P que se encuentra a una distancia d del extremo derecho del cilindro, como se muestra en la figura.



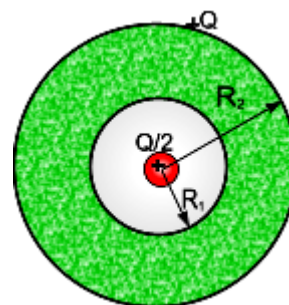
36. Un cilindro uniformemente cargado tiene una carga total Q , un radio R y una altura h . Determine el potencial eléctrico en el punto P que se encuentra a una distancia d del extremo derecho del cilindro, como se muestra en la figura.



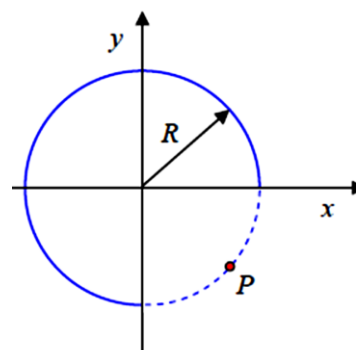
37. Una esfera conductora de 32 cm de diámetro es cargada a 680 V respecto a $V = 0$ en $r = \infty$. (a) ¿Cuál es la densidad de carga superficial? (b) ¿A qué distancia el potencial debido a la esfera será solamente 25 V ?

38. Un conductor esférico aislado de radio R_1 lleva una carga Q . Una segunda esfera conductora de radio R_2 e inicialmente descargada es entonces conectada a la primera mediante un alambre conductor muy largo. (a) Después de la conexión, ¿qué podría Ud. decir acerca de potencial eléctrico de cada esfera? (b) ¿Cuánta carga es transferida a la segunda esfera?

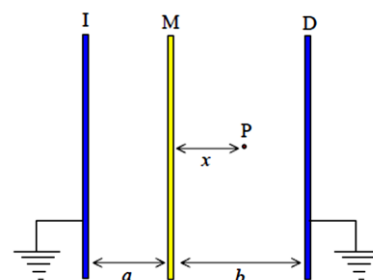
39. Un conductor esférico que tiene un radio interno R_1 y un radio externo $R_2 = 2R_1$ lleva una carga neta $+Q$. Si en el centro del conductor se coloca una carga puntual $Q/2$ como se muestra en la figura. Determine: (a) la intensidad de campo eléctrico en todas las regiones como una función de r , la distancia desde el centro, (b) el potencial eléctrico en las tres regiones y (c) grafique el potencial V en función de la distancia r desde $r = 0$ hasta $r = 2R_2$



40. El alambre curvado tiene una densidad de carga λ uniformemente distribuida a lo largo de su longitud. El radio de curvatura es R . Derive una expresión para el potencial eléctrico en un punto P el cual es el centro del arco.

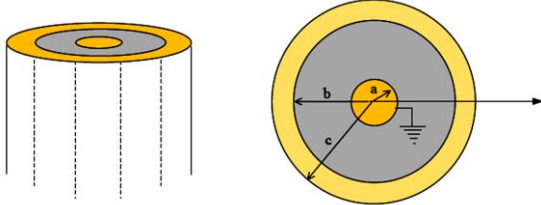


41. Considere un conjunto de tres placas metálicas planas paralelas cada una de área A . Las placas izquierda (I) y derecha (D) están conectadas a tierra y en la placa del medio (M) se deposita una carga Q . Determine el potencial en el punto P como función de la variable x .

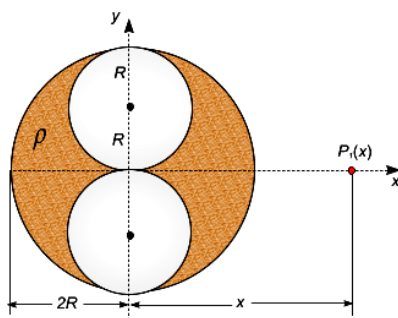


42. La figura muestra el perfil de un conjunto de cilindros muy largos. El cilindro interior de radio a es metálico y tiene una carga $+Q$. Entre a y b existe

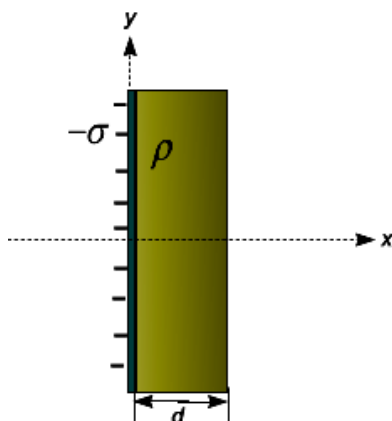
un cascarón cilíndrico dieléctrico cuya densidad de carga varía radialmente en la forma $\rho(r) = \alpha/r$, donde α es una constante positiva. Entre b y c existe un cascarón cilíndrico metálico de carga $-Q$. Halle el potencial eléctrico en todo el espacio en función de la distancia radial al eje del sistema de cilindros.



43. Un cilindro dieléctrico de radio $2R$ largo e infinito tiene una densidad volumétrica de carga radialmente uniforme, es decir $\rho(\vec{r}) = cte$. Si se le hacen dos agujeros cilíndricos infinitamente largos, cada uno de radio R , hallar el potencial eléctrico $V(x)$ en el punto $P_1(x)$ en función de la distancia radial x mostrada en la figura.

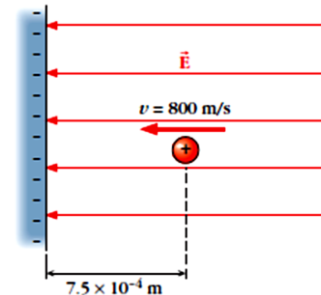


44. Una placa dieléctrica de extensión infinita tiene un espesor d y lleva una densidad volumétrica de carga $\rho = \alpha x$, donde α es una constante positiva. Esta placa dieléctrica infinita está pegada a un plano infinito con densidad superficial de carga uniforme $-\sigma$. Determine el potencial eléctrico para (a) $x \leq 0$; (b) $0 \leq x \leq d$ y (c) $x \geq d$

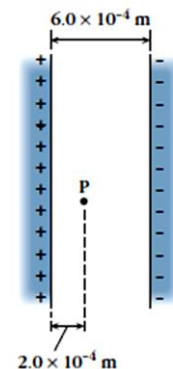


45. El campo eléctrico de un plano uniformemente cargado tiene una magnitud de 400 N/C . En un instante particular, una partícula cargada está en la

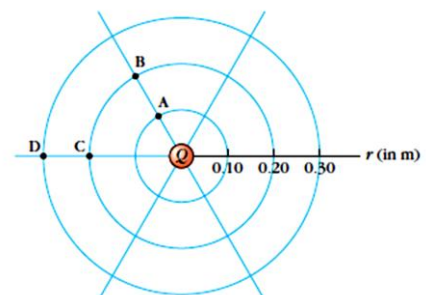
posición mostrada en la figura y tiene una velocidad de 800 m/s dirigida hacia la placa. (a) Si la partícula cargada es un ión positivo y la placa plana está cargada negativamente. (a) Encuentre el cambio en la energía potencial con que la partícula viaja desde su posición inicial hasta impactar sobre la placa. (b) Encuentre el cambio en la energía cinética y (c) si el ión tiene una masa de 2.10^{-26} kg determine la velocidad con la cual impacta en la placa.



46. El campo eléctrico entre dos placas planas paralelas cargadas uniformemente con signos opuestos como se muestra en la figura tiene una magnitud de 1500 N/C . (a) Si un protón es liberado desde el punto P en la figura, cuál placa podría impactarlo y con qué velocidad lo hace?. (b) Si un electrón es liberado en P cuál de las placas podría impactarlo y con qué velocidad?).

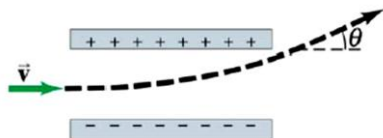


47. En la figura, la carga Q sobre el objeto ubicado en el centro es de $1\mu\text{C}$. Calcule el cambio en el potencial si vamos: (a) desde A hacia B; (b) desde C a D y (c) desde A a D. Brevemente discutir cuál es la relación que hay entre la última respuesta y sus respuestas de los apartados (a) y (b).

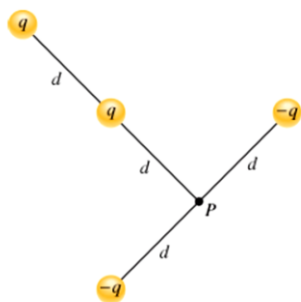


48. Un electrón es acelerado desde el reposo en un tubo de rayos catódicos por una diferencia de potencial

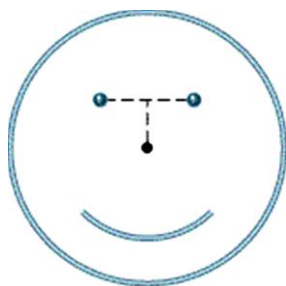
de 5500 V. Posteriormente el electrón se mueve entre dos placas horizontales de 6,5 cm de longitud y separadas 1,3 cm las mismas que se mantienen a una diferencia de potencial de 250 V, como se muestra en la figura. ¿Con qué ángulo θ abandona las placas el electrón?



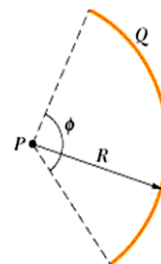
49. Cuatro cargas puntuales con $q = 2 \mu\text{C}$ separadas por una distancia $d = 0,96 \text{ m}$ son distribuidas como se muestra en la figura. Encuentre el potencial total en el punto P. Asuma que el potencial de una carga puntual es cero en el infinito.



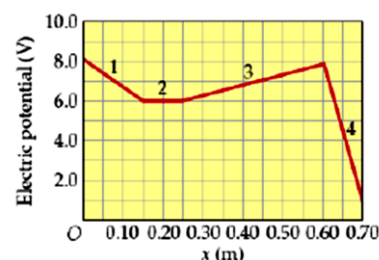
50. ¿Cuál es la magnitud del potencial eléctrico neto en el centro? Si el sistema está compuesto por (i) Una varilla delgada en forma de circunferencia de radio 6,00 cm y que lleva una carga de $-3\mu\text{C}$; (ii) Una varilla en forma de arco de radio 4,00 cm subtendiendo un ángulo de 90° y que lleva una carga de $+2 \mu\text{C}$ y (iii) Un dipolo eléctrico con un momento dipolar que es perpendicular a la línea radial y qué tiene una magnitud de $1,28 \cdot 10^{-21} \text{ C}\cdot\text{m}$



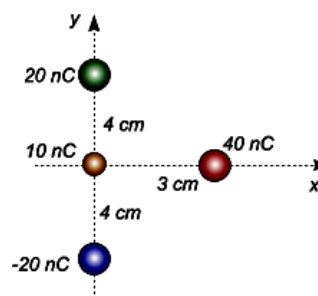
51. Considerando el potencial cero en el infinito. ¿Cuál es el potencial en P, centro de curvatura de la varilla uniformemente cargada?



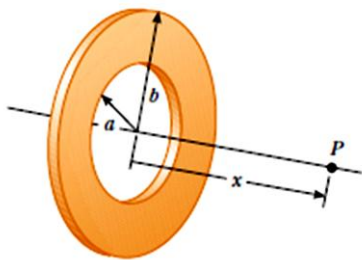
52. El potencial eléctrico de un sistema como una función de la posición a lo largo del eje x se muestra en la figura. (a) en cuál de las regiones 1, 2, 3, o 4 podría esperarse que E_x es el más grande? ¿En cuál región la magnitud de E_x es mucho más grande? Explique. (b) Calcular E_x en cada una de las regiones 1, 2, 3 y 4.



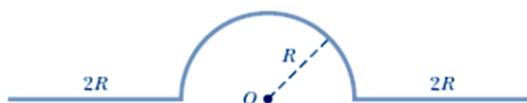
53. Dos partículas, con cargas de 20 nC y -20 nC están colocadas en las coordenadas $(0, 4)\text{cm}$ y $(0, -4)\text{cm}$, como se muestra en la figura. El origen se encuentra una partícula con carga de 10 nC . (a) determine la energía potencial eléctrica de la configuración de las tres cargas fijas. (b) Una cuarta partícula, con una masa de $2 \cdot 10^{-13} \text{ kg}$ y una carga de 40 nC , se libera desde el reposo en el punto $(3, 0)\text{cm}$. Determine su velocidad después de haberse movido libremente hasta una distancia muy lejana.



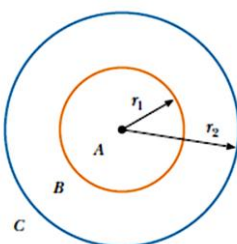
54. Determine el potencial eléctrico en el punto P sobre el eje del anillo mostrado en la figura el cual lleva una densidad de carga $\sigma = Ar$, donde r es la distancia medida a lo largo del radio del disco.



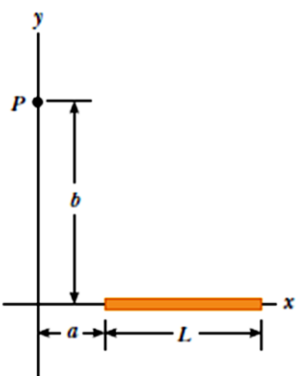
55. Un alambre que transporta una densidad de carga uniforme λ es doblado en la forma mostrada en la figura. Determine el potencial eléctrico en el punto O (centro de la semicircunferencia de radio R).



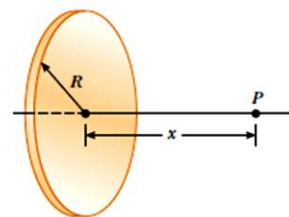
56. Considere dos cascarones esféricos conductores delgados cuya sección transversal es mostrada en la figura. El cascarón interior tiene un radio $r_1 = 15,0$ cm y una carga de $10,0$ nC. El cascarón exterior tiene un radio $r_2 = 30$ cm y una carga de $-15,0$ nC. (a) Encuentre el campo eléctrico $\vec{E}$ y (b) el potencial eléctrico V en las regiones A, B, y C, considerando al potencial $V = 0$ en $r = \infty$



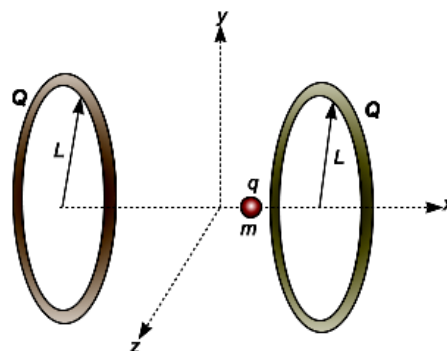
57. La varilla delgada uniformemente cargada que se muestra en la figura tiene una densidad de carga lineal λ . Encuentre una expresión para el potencial eléctrico en el punto P.



58. El disco de radio R mostrado en la figura tiene una densidad de carga superficial $\sigma = Cr$, donde C es una constante positiva y r se mide a partir del centro del disco. Determine el potencial eléctrico del disco en el punto P.



59. Una partícula de masa m que posee una carga positiva q está restringida a moverse a lo largo del eje x . En los puntos $x = L$ y $x = -L$ existen dos anillos cargados de radios L . Cada uno de estos anillos está centrado en el eje x y localizado perpendicularmente al mismo, siendo ambos portadores de una carga $+Q$. (a) Obtenga una expresión del potencial entre las cargas anulares en función de x para $-L < x < L$. (b) Demostrar que en esta región $V(x)$ pasa por un mínimo para $x = 0$. (c) Demostrar que para $x \ll L$, el potencial es de la forma $V(x) = V(0) + \alpha x^2$. (c) Deducir una expresión para la frecuencia angular de oscilación de la masa m si se desplaza ligeramente desde el origen y se deja libre.



60. Un disco plástico es cargado en un lado con una densidad de carga σ uniforme y entonces es removido el tercer cuadrante del disco. Asumiendo que el potencial $V = 0$ en el infinito, ¿Cuál es el potencial eléctrico debido a la distribución de carga restante en el punto P, el cual se encuentra sobre el eje central del disco original a una distancia z desde el origen central?
61. Un cascarón esférico delgado de radio R , es colocado sobre un soporte aislante y cargado hasta alcanzar un potencial $-V$. Entonces es lanzado un electrón desde un punto P a una distancia r desde el centro del cascarón ($r \gg R$) con una velocidad v_0 , radialmente dirigida hacia ella. ¿Qué velocidad v_0 se necesitara darle al electrón para que alcance a las justas la superficie de la cáscara antes de invertir su movimiento?
62. En cierta región del espacio, la función potencial está dada por la expresión $V(x, y, z) = x^2 + xy$, donde el potencial es medido en voltios y la

distancia en metros. Determine el campo eléctrico en el punto (2, 1).

63. El potencial en cierta región del espacio está dado por la expresión $V(x, y, z) = xy^2z^3$, con respecto al punto de referencia. Encuentre la componente y del campo eléctrico en el punto $P(1, -3, 2)$ m.

64.