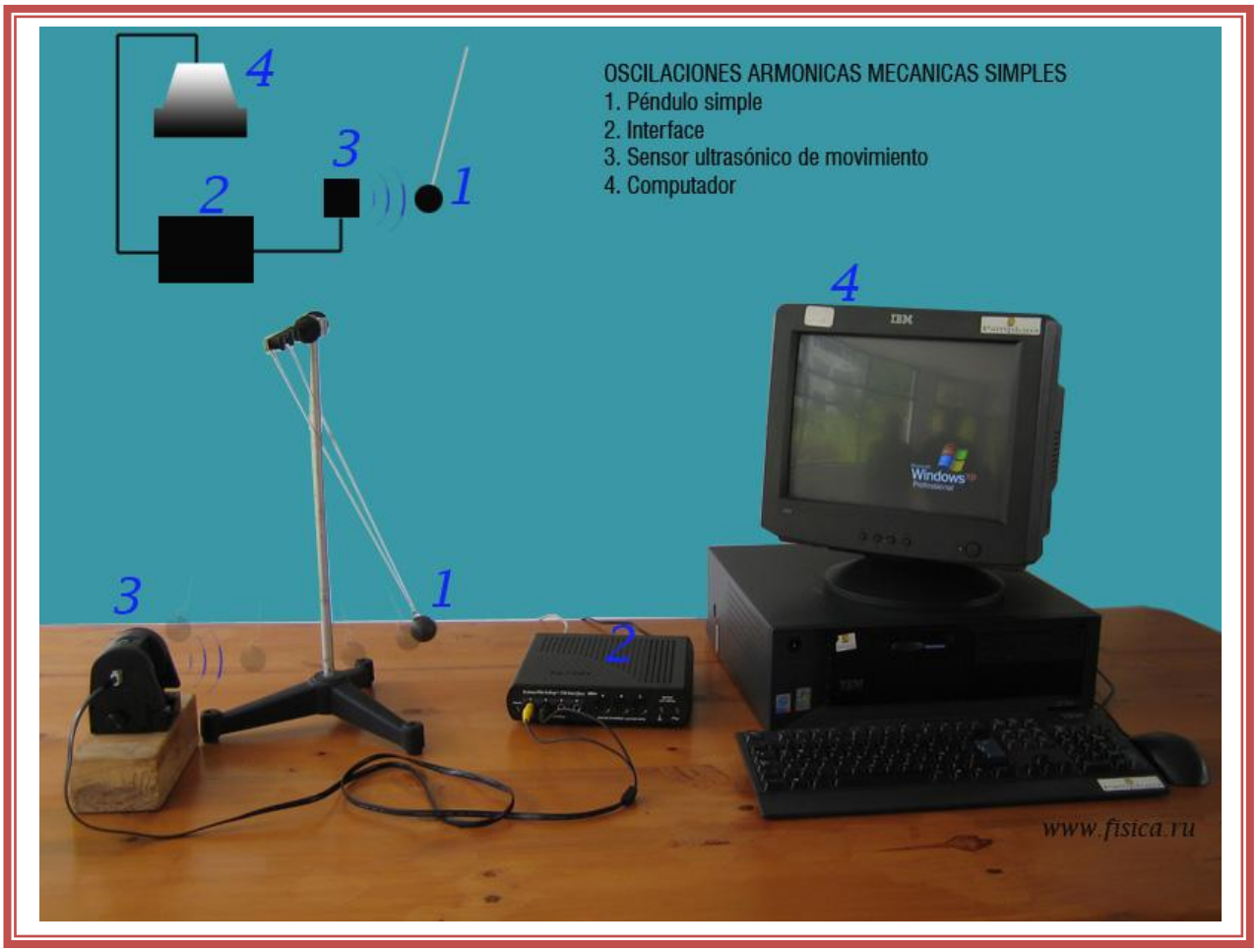
CAPÍTULO II

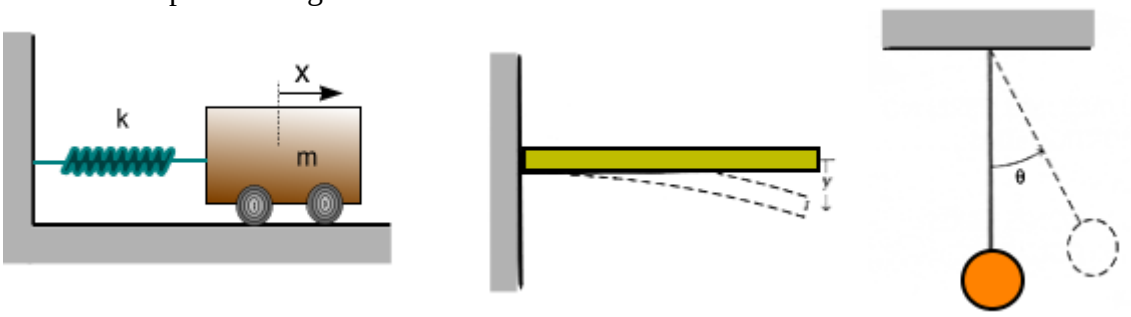
VIBRACIONES MECÁNICAS



2.1 INTRODUCCIÓN

Las vibraciones mecánicas se refieren a la oscilación de un cuerpo o un sistema mecánico alrededor de su posición de equilibrio. Algunas vibraciones son deseables, como por ejemplo el movimiento pendular que controla el movimiento de un reloj, o la vibración de una cuerda de un instrumento musical. En cambio en muchas aplicaciones mecánicas no se desea la presencia de las vibraciones. Así por ejemplo la vibración excesiva de máquinas y estructuras puede ocasionar que se aflojen las uniones y las conexiones llegando en algunos casos a producir el colapso de la estructura.

El estudio de las vibraciones es muy amplio de tal manera que existe un conjunto de publicaciones e investigaciones destinados al tema. Nuestra intención en este trabajo es presentar los principios básicos de las vibraciones que deben ser entendidos por los alumnos de ciencias e ingeniería y que sirven de base para el estudio de otros cursos de su especialidad. En este sentido solo estudiaremos las vibraciones con un solo grado de libertad, es decir aquel movimiento en el cual la posición se puede expresar con una sola coordenada por ejemplo *x*, o *y* en la figura 2.1a, o 2.1b y por θ en el movimiento pendular figura 2.1c.



(a) (b) (c)

Figura 2.1. ***Vibraciones mecánicas con una sólo grado de libertad.***

Las dos componentes básicas en toda vibración son la masa y la fuerza recuperadora. Esta última que con frecuencia es proporcionada por un mecanismo elástico, tiende a regresar a la masa a su posición de equilibrio cuando ella es separada de dicha posición y liberada. En forma general las vibraciones se clasifican en *vibraciones libres* y *vibraciones forzadas.* Las primeras son originadas y mantenidas por fuerzas elásticas o las gravitatorias y las segundas son producidas por fuerzas periódicas aplicadas exteriormente.

Las vibraciones libres y forzadas se dividen a su vez en *amortiguadas y sin amortiguamiento.* Cuando las fuerzas que se oponen a la fuerza recuperadora son despreciables se dice que la vibración es sin amortiguamiento. Cuando las fuerzas como el rozamiento del tipo viscoso no es despreciable se denominan vibración con amortiguamiento

Es sabido que en todo sistema real está presente las fuerzas disipativas como el rozamiento que tiende a extinguir la vibración. Sin embargo, en muchos sistemas la pérdida de energía debido al rozamiento es tan pequeña que a menudo pueden ser despreciables resultando entonces una vibración libre.

2.2 VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS DE UNA PARTÍCULA.

Consideremos una partícula de masa sujeta a un resorte ideal de rigidez *k* tal como se muestra en la figura 2.2. Si el movimiento descrito por *m* es vertical, la vibración es de un solo grado de libertad. Cuando *m* está en equilibrio estático, las fuerzas que actúan sobre ella son el peso, $W = mg$ y la fuerza elástica $F_e = k\delta_{st}$. Si se aplica las ecuaciones de equilibrio al DCL, se tiene

$$\sum F_x = 0$$

$$mg - k\delta_{st} = 0 \qquad (2.1)$$

Si ahora se desplaza a *m* un desplazamiento x_m menor que δ_{st} desde la posición de equilibrio y se suelta sin velocidad inicial la partícula se moverá hacia arriba y hacia abajo alrededor de la posición de equilibrio generando de esta forma una vibración libre.

Para determinar las ecuaciones que gobiernan a la vibración consideremos a la partícula en una posición arbitraria *x* medida a partir de la posición de equilibrio como se muestra en la figura 2.2b,

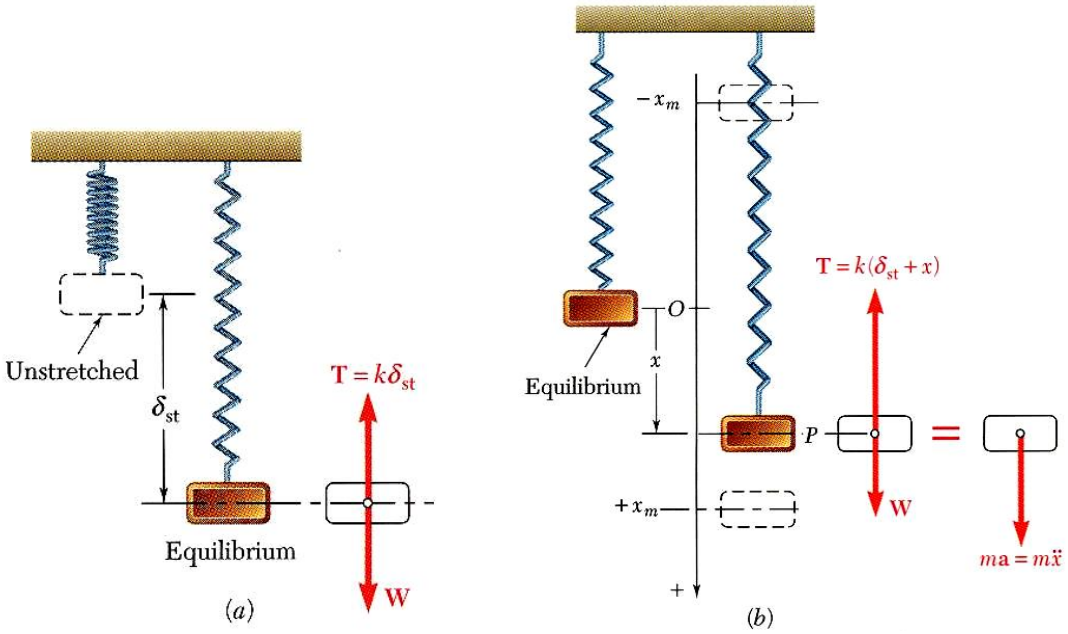


Figura 2.2. ***Diagrama de cuerpo libre de m: (a) en equilibrio estático y (b) en movimiento.***

Del diagrama de cuerpo libre y cinético se observa que la ecuación de movimiento de la masa es

$$\sum F_x = ma_x$$
$$mg - k(\delta_{st} + x) = m\ddot{x} \qquad (2.2)$$

Al remplazar la ecuación (1) en (2), resulta

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (2.3)^*$$

El movimiento definido por la ecuación (3)* se conoce como *movimiento armónico simple* y se caracteriza por que la aceleración es proporcional y de sentido opuesto al desplazamiento. También se puede escribir en la forma

$$\ddot{x} + \omega_n x = 0 \qquad (2.4)$$

En donde ω_n se denomina frecuencia natural circular o pulsación natural, y se expresa

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2.5)$$

La solución de la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes dada por la ecuación (2.4) es de la forma

$$x = Asen(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t) \qquad (2.6)$$

Donde *A* y *B* son constantes que se determinan de las condiciones iníciales.

A veces es más conveniente escribir la ecuación (2.6) en una forma alternativa dada por

$$x = x_m sen(\omega_n t + \varphi) \qquad (2.7)$$

La velocidad y la aceleración están dadas por

$$v = \dot{x} = x_m \omega_n \cos(\omega_n t + \varphi) \qquad (2.8)$$

$$a = \ddot{x} = -x_m \omega_n^2 sen(\omega_n t + \varphi) \qquad (2.9)$$

La gráfica de la posición *x* en función del tiempo *t* muestra que la masa *m* oscila alrededor de su posición de equilibrio. La cantidad x_m se le denomina *amplitud de la vibración,* y el ángulo φ se denomina *ángulo de fase*. Como se muestra en la figura 2.3, τ es el *período de la vibración*, es decir el tiempo que tarda un ciclo.

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (2.10)$$

La frecuencia natural de vibración que representa el número de ciclos descritos por unidad de tiempo está dada por

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2.11)$$

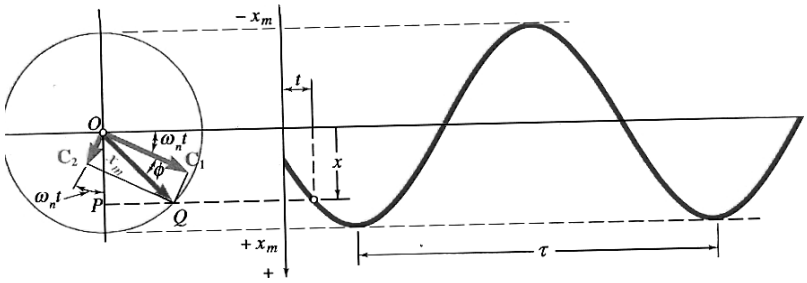
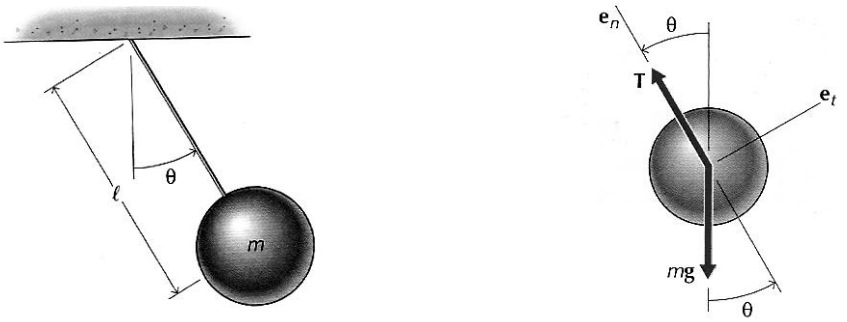


Figura 2.3. ***Gráfica desplazamiento en función del tiempo para una oscilación libre***

2.2.1 Péndulo simple.

Un péndulo simple se define como una partícula de masa *m* suspendida de un punto fijo por medio de una cuerda de longitud *l* y de masa despreciable (figura 2.4). Si la partícula se desplaza un ángulo θ_0 de su posición de equilibrio y luego se suelta, el péndulo oscilará simétricamente respecto a su posición de equilibrio.



Fígura 2.4. ***Péndulo simple: (a) Instalación y (b) Diagrama de cuerpo libre*.**

Aplicando las ecuaciones de movimiento al DCL de la masa *m* resulta.

$$\sum F_t = ma_t$$

$$-mgsen\theta = ml\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sen\theta = 0 \qquad (2.12)$$

Para ángulos pequeños, $sen\theta \approx \theta$, donde θ se expresa en radianes. Entonces la ecuación (12), se escribe en la forma

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad (2.13)$$

Por tanto, el péndulo describe un movimiento armónico simple de frecuencia circular dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (2.14)$$

El período de la vibración pendular se expresa en la forma

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (2.15)$$

2.2.2 Péndulo compuesto.

Un péndulo compuesto es un cuerpo de dimensiones finitas que oscila alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por un punto del cuerpo debido a la acción de la fuerza gravitacional (peso). El cuerpo rígido oscilará en un plano vertical cuando se le separe de su posición de equilibrio un ángulo θ_0 y se suelte. Para determinar las ecuaciones que gobiernan a este movimiento consideremos un cuerpo de forma arbitraria tal como se muestra en la figura 2.5 en donde ZZ' es un eje horizontal y C es su centro de masa situado a una distancia *b* del punto de oscilación O.

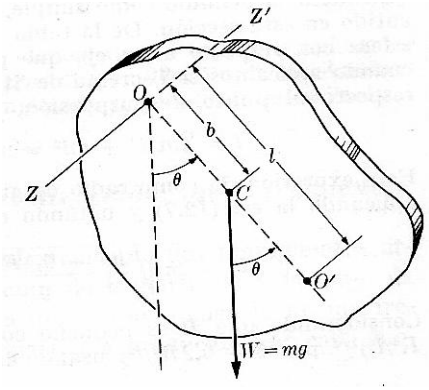


Figura 2.5. ***Diagrama esquemático de un péndulo físico***

Para una posición angular θ, respecto a la vertical las fuerzas que actúan sobre el sólido son su peso *mg* y la reacción en el punto de oscilación. Aplicando las ecuaciones de movimiento al diagrama se encuentra

$$\sum M = I_O\alpha$$

$$-mgbsen\theta = I_O\ddot{\theta} \qquad (2.16)$$

Donde I_O es el momento de inercia del cuerpo con respecto al punto O y $\ddot{\theta}$ es la aceleración angular, el signo menos se debe a que el peso produce un momento de restitución. Para ángulos pequeños, $sen\theta \approx \theta$, entonces la ecuación (16) se escribe

$$I_O\ddot{\theta} + mgb\theta = 0 \qquad (2.17)$$

La ecuación (2.17) es la ecuación diferencial de un MAS y la solución de la ecuación diferencial es de la forma

$$\theta = \theta_0 sen(\omega_n t + \varphi) \qquad (2.18)$$

Por tanto, el péndulo describe un movimiento armónico simple de frecuencia circular dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgb}{I_O}} \qquad (2.19)$$

El período de la vibración pendular se expresa en la forma

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgb}} \qquad (2.20)$$

Por otro lado el momento de inercia con respecto al punto de oscilación se puede expresar utilizando el teorema de los ejes paralelos en función del momento de inercia con respecto al centro de masa, esto es

$$I_O = I_C + mb^2 \qquad (2.21)$$

Teniendo en cuanta la definición de radio de giro, $K_C = \sqrt{I_O / m}$, la ecuación anterior se puede escribir

$$I_O = mK_C^2 + mb^2 \qquad (2.22)$$

Al remplazar la ecuación (2.22) en la ecuación (2.20) se obtiene

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{mK_C^2 + mb^2}{mgb}}$$

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{K_C^2 + b^2}{gb}} \qquad (2.23)^*$$

Esta ecuación es muy importante porque nos permite determinar en el laboratorio la aceleración de la gravedad y el radio de giro del ***péndulo físico***.

2.2.3 Péndulo de torsión.

Este péndulo está constituido por un cuerpo rígido soportado por un eje en la forma indicada en la figura 2.6. Si el ángulo de torsión es pequeño y el sistema inicia su movimiento desde el reposo, los esfuerzos desarrollados en el eje producen y mantienen un movimiento angular armónico simple. Suponga que

el movimiento vibratorio del cuerpo B se iniciara induciendo en el péndulo el ángulo de torsión θ, pequeño y liberándolo a continuación.

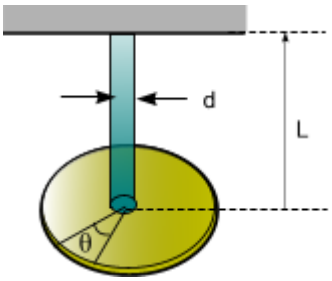


Figura 2.6. ***Representación de un péndulo de torsión***

En la mecánica de materiales se demuestra que si no se excede el límite de proporcionalidad del material de un eje macizo circular, el momento de torsión que se aplica al eje es proporcional al ángulo de torsión y se determina mediante la ecuación.

$$M = \frac{I_P G}{L}\theta = \frac{\pi r^2 G}{2L} = k\theta \qquad (2.24)$$

Donde $I_P = \pi r^4/2$, es el momento polar de inercia del área de la sección transversal del eje macizo, *G* es el módulo de rigidez del material, *L* es la longitud del eje y θ es ángulo de torsión.

La ecuación que describe el movimiento de éste péndulo es

$$\sum M_z = I_z \alpha$$
$$-M = I_Z \ddot{\theta}$$

Al remplazar el valor del momento de torsión en esta ecuación, resulta

$$-k\theta = I_Z \ddot{\theta}$$

$$I_Z \ddot{\theta} + k\theta = 0 \qquad (2.25)$$

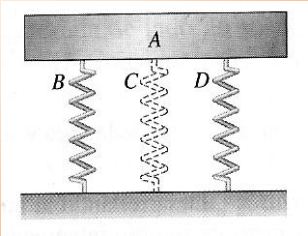
La ecuación (2.25) indica que el movimiento es angular y armónico con una frecuencia circular natural dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{I_Z}} = \sqrt{\frac{\pi r^4 G}{2LI_Z}} \qquad (2.26)$$

El período de la vibración pendular se expresa en la forma

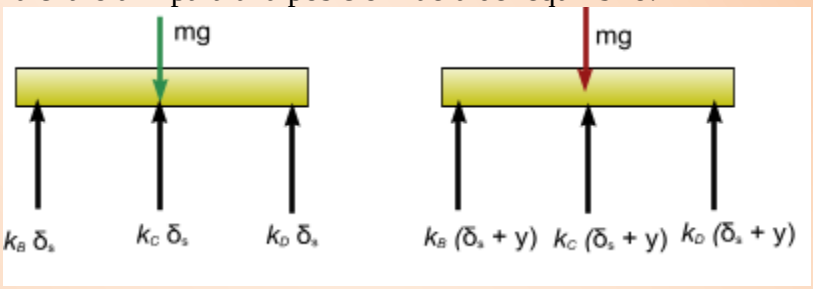
$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{2LI_Z}{\pi r^4 G}} \qquad (2.27)$$

Ejemplo 2.1. Una charola A está unida a tres resortes como se muestra en la figura. El período de vibración de la charola vacía es de 0,75 s. Después de que el resorte central C se ha suprimido se observa que el período es de 0,9 s. Si se sabe que la constante del resorte central es 100 N/m. Determine la masa *m* de la charla.



Solución

En la figura (a) se muestra el DCL de la charola en posición de equilibrio y en (b) el DCL de la charola A para una posición fuera del equilibrio.



(a) (b)

Aplicando las ecuaciones de equilibrio a (a), se tiene

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow mg - \left(k_B + k_C + k_D\right)\delta_s = 0 \qquad (1)$$

Aplicando las ecuaciones de movimiento a (b) resulta

$$\downarrow \sum F_y = ma_y \Rightarrow mg - \left(k_B + k_C + k_D\right)(\delta_s + y) = m\ddot{y} \qquad (2)$$

Remplazando la ecuación (1) en la ecuación (2), obtenemos

$$m\ddot{y} + \left(k_B + k_C + k_D\right)y = 0 \qquad (3)$$

La ecuación (c) es la ecuación diferencial de un M.A.S con frecuencia circular

$$\omega = \sqrt{\frac{k_B + k_C + k_D}{m}} \qquad (4)$$

El período de vibración será

$$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k_B + k_C + k_D}} \qquad (5)$$

Remplazando el valor de k_C se tiene

$$T_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k_B + 100N/m + k_D}} \qquad (6)$$

Cuando no existe el resorte C, el período es

$$T_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k_B + k_D}} \qquad (7)$$

Dividiendo las ecuaciones (5) y (6) resulta

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{k_B + 100N/m + k_D}{k_B + k_D}}$$

$$\frac{0,9}{0,75} = \sqrt{\frac{k_B + k_D + 100N/m}{k_B + k_D}}$$

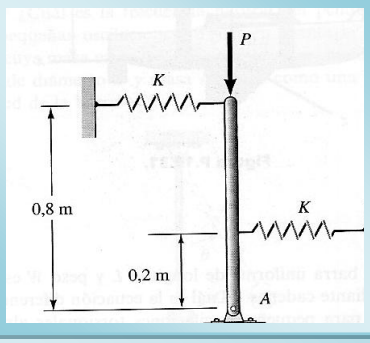
$$k_B + k_D = 227,27\,N/m$$

Remplazando esta última expresión en la ecuación

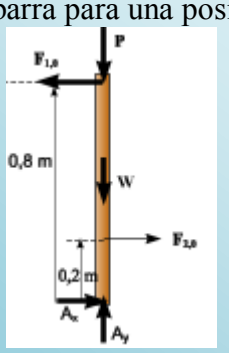
$$0,9 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{227,27}}$$

$$m = 4,66\ \text{kg} \qquad \text{Rta}$$

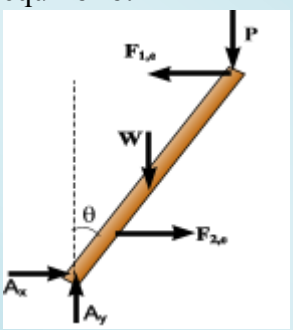
Ejemplo 2.1. Una barra de 0,8 m de longitud y 60 N de peso se mantiene en posición vertical mediante dos muelles idénticos cada uno de los cuales tiene una constante k igual a 50 000 N/m. ¿Qué fuerza vertical P hará que la frecuencia natural de la barra alrededor de A se aproxime a un valor nulo para pequeñas oscilaciones.



En la figura (a) se muestra el DCL de la barra en posición de equilibrio y en (b) el DCL de la barra para una posición (θ) fuera del equilibrio.



(a)



(b)

Aplicando la segunda condición de equilibrio se tiene

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -k_2\delta_2(0,2) + k_1\delta_1(0,8) = 0 \qquad (1)$$

Aplicando la segunda ley de newton para el movimiento de rotación de la varilla

$$\sum M_A = I_A\alpha$$

$$k_2(\delta_2 - x_2)(0,2\cos\theta) - k_1(\delta_1 + x_1)(0,8\cos\theta) + W(0,4sen\theta) + P(0,8sen\theta) = I_A\ddot{\theta} \qquad (2)$$

Para ángulos pequeños $\cos\theta \simeq 1$ y $\text{sen}\theta \simeq \theta$, entonces la ecuación (2) se escribe

$$k_2(\delta_2 - x_2)(0,2) - k_1(\delta_1 + x_1)(0,8) + W(0,4\theta) + P(0,8\theta) = I_A\ddot{\theta} \qquad (3)$$

Remplazando la ecuación (1) en (2), resulta

$$-k_2(x_2)(0,2) - k_1(x_1)(0,8) + W(0,4\theta) + P(0,8\theta) = I_A\ddot{\theta}$$

$$-k_2(0,2\theta)(0,2) - k_1(0,8\theta)(0,8) + W(0,4\theta) + P(0,8\theta) = I_A\ddot{\theta}$$

Teniendo en cuenta que $k_1 = k_2 = k$ y $\text{I}_\text{A} = \frac{1}{2}ml^2$, resulta

$$k(0,04\theta) - k(0,64\theta) + W(0,4\theta) + P(0,8\theta) = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + [0,68k - 0,4W - 0,8P]\theta = 0$$

Remplazando valores se tiene

$$\frac{1}{3}\left(\frac{60}{9,8}\right)(0,8)^2\ddot{\theta} + [0,68(5000) - 0,4(60) - 0,8P]\theta = 0$$

$$1,306\ddot{\theta} + (3376 - 0,8P)\theta = 0$$

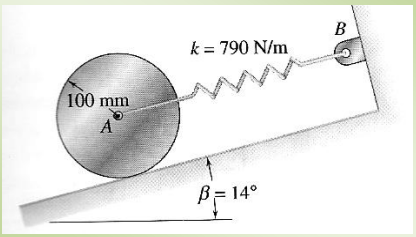
La frecuencia circular será

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3376 - P}{1,306}}$$

Para que la frecuencia sea cero se tiene

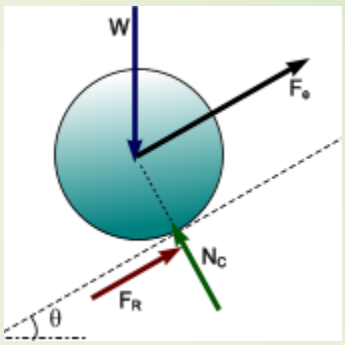
$$P = 3376N \qquad \text{Rta.}$$

Ejemplo 2.3. Un cilindro uniforme de 7 kg puede rodar sin deslizarse por un plano inclinado y está sujeto por un muelle como se muestra. Si su centro se mueve 10 mm plano abajo y se suelta, hallar: (a) el período de la oscilación y (b) la velocidad máxima del centro del cilindro.



Solución

En la figura (a) se muestra el DCL del cilindro en la posición (x_G) fuera del equilibrio.



Aplicando las ecuaciones de equilibrio al DCL de la figura para una posición de equilibrio estático se tiene

$$\sum F_x = ma_{G,x} = m(o) = 0$$
$$mgsen14° - F_{roz} - F_{e,0} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum M_G = I_G\alpha = I_G(0) = 0$$
$$F_{roz}(r) - F_{e,0}(r) = 0 \qquad (2)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2), resulta

$$mgsen14° - 2F_{e,0} = 0$$
$$mgsen14° - 2k\delta_s = 0 \qquad (3)$$

La ecuación de movimiento de traslación en la dirección x, nos da

$$\sum F_x = ma_{G,x}$$
$$mgsen14° - F_{roz} - F_e = m\ddot{x}_G$$
$$mgsen15° - F_{roz} - k(\delta_s + x_G) = m\ddot{x}_G \quad (4)$$

La ecuación de movimiento de rotación nos da

$$\sum M_G = I_G\alpha$$
$$F_{roz}(r) - F_e(r) = I_G\ddot{\theta}$$
$$F_{roz}(r) - k(\delta_s + x_G)(r) = I_G\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$
$$F_{roz} - k(\delta_s + x_G) = \frac{1}{2}mr\ddot{\theta} \qquad (5)$$

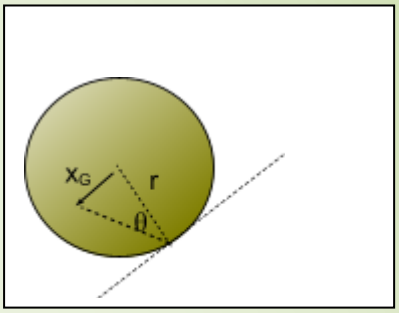
Sumando las ecuaciones (3) y (5), resulta

$$mgsen14° - 2k(\delta_s + x_G) = m\ddot{x}_G + \frac{1}{2}mr\ddot{\theta} \quad (6)$$

Remplazando 83) en (6), se tiene

$$m\ddot{x}_G + \frac{1}{2}mr\ddot{\theta} + 2kx_G = 0 \qquad (7)$$

La relación entre la aceleración lineal y angular se obtiene tomando como centro instantáneo el punto CI de la figura.



$$x_G = r\theta$$
$$\dot{x}_G = r\dot{\theta}$$
$$\ddot{x}_G = r\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}_G}{r} \qquad (8)$$

Remplazando (8) en (7) y simplificando resulta

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_G + 2kx_G = 0$$
$$\frac{3}{2}(7)\ddot{x}_G + 2(790)x_G = 0$$
$$\ddot{x}_G + 150,48x_G = 0$$

El periodo se determina a partir de la frecuencia circular

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{150,48}}$$
$$T = 0,51 \text{ s} \qquad \text{Rta}$$

Para determinar la velocidad máxima se aplica las condiciones iníciales.

$$x_G = Asen(\omega_n t + \varphi) \Rightarrow 50.10^{-3} = Asen(12,3(0) + \varphi) \Rightarrow 50.10^{-3} = Asen\varphi$$
$$\dot{x}_G = \omega A\cos(\omega_n t + \varphi) \Rightarrow 0 = 12,3A\cos[12,3(0) + \varphi] \Rightarrow 0 = 12,3\cos\varphi$$

$$\therefore \ \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \quad A = 50 \text{ mm}$$

La velocidad para cualquier posición es

$$v = \dot{x}_G = 0,62sen(12,3t + \pi/2)$$

La velocidad máxima será

$$v_{max} = 0,62 \text{ m/s} \qquad \text{Rta}$$

2.3 VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS.

En análisis vibratorio considerado hasta ahora no ha incluido el efecto de la fricción o el amortiguamiento del sistema y como resultado de ello, las soluciones obtenidas son solo una aproximación cercana al movimiento real. Debido a que todas las vibraciones se disipan con el tiempo, la presencia de fuerzas amortiguadoras debe incluirse en el análisis.

Se dice que un sistema tiene amortiguamiento cuando posee elementos que disipan energía. Existen varios tipos de amortiguamiento: *amortiguamiento viscoso*, lo experimentan los cuerpos que se mueven con una velocidad moderada en el interior de fluidos; *amortiguamiento de Coulomb*, producido por el movimiento relativo de superficies secas; y *el amortiguamiento estructural*, es producido por la fricción interna del material elástico. En esta sección nos dedicaremos únicamente al estudio del amortiguamiento viscoso.

2.3.1 Amortiguador viscoso lineal.

Este tipo de amortiguamiento se presenta en forma natural cuando sistemas mecánicos oscilan en el interior de un medio fluido. También aparece en sistemas mecánicos utilizados para regular la vibración. Una forma de representarlo es la mostrada en la figura 2.7. Este tipo de amortiguador está formado por un pistón el cual se mueve en el interior de un cilindro el cual contiene un fluido viscoso como el aceite. Al moverse el émbolo se opone el fluido el cual debe atravesar pequeños orificios practicados en el émbolo.

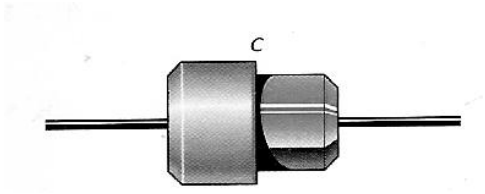


Figura 2.7. ***Representación de un amortiguador***

Para nuestro estudio vamos a utilizar los amortiguadores lineales, en este caso la fuerza de fricción debido al amortiguamiento es directamente proporcional a la velocidad lineal siendo la constante de proporcionalidad el llamado ***coeficiente de amortiguamiento (c)***. Esta fuerza se expresa

$$F_V = c\dot{x} \qquad (2.28)$$

2.3.2 Vibraciones libres con amortiguamiento viscoso.

Para determinar las ecuaciones que gobiernan a este movimiento consideremos un sistema masa, resorte y amortiguador como el mostrado en la figura 2.8.

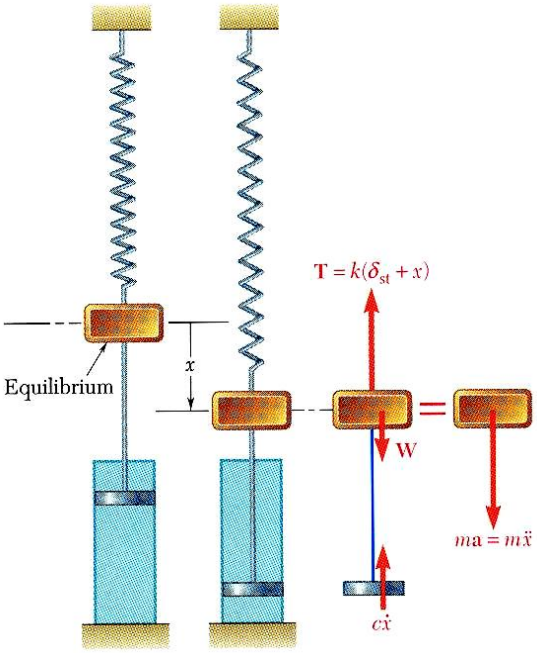


Figura 2.8. ***Diagrama de cuerpo libre de una partícula de masa m con amortiguamiento***

Aplicando la segunda ley de Newton al bloque se tiene

$$\sum F_X = m\ddot{x}$$

$$mg - k(\delta_{st} + x) - c\dot{x} = m\ddot{x} \qquad (2.29)$$

Recordando que en el caso de equilibrio estático, $mg = k\delta_{st}$, la ecuación anterior se escribe

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k = 0 \qquad (2.30)^*$$

La ecuación (2.30)* es una ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. La teoría de las ecuaciones diferenciales nos dice que la solución es de la forma

$$x = Ae^{\lambda t} \qquad (2.31)$$

Remplazando la ecuación (2.31) conjuntamente con sus derivadas en la ecuación (2.30) se obtiene la ecuación característica expresada por

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \qquad (2.32)$$

cuyas raíces son

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \qquad (2.33)$$

La solución general de la ecuación se escribe

$$x = Be^{\lambda_1 t} + Ce^{\lambda_2 t} \qquad (2.34)$$

Las constantes B y C se determinan a partir de las condiciones iníciales, mientras que λ_1 y λ_2 se determinan de la ecuación característica. Debe observarse además que el comportamiento del sistema depende de la cantidad subradical, ésta puede ser positiva, nula o negativa.

Coeficiente de amortiguamiento crítico $c_{cr.}$ Es el valor del coeficiente de amortiguamiento para el cual se hace cero la cantidad subradical de la ecuación (2.33), en consecuencia

$$c_{cr} = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \qquad (2.35)$$

El coeficiente de amortiguamiento crítico representa la cantidad mínima de amortiguamiento requerida para que el movimiento no sea vibratorio.

La solución de la ecuación diferencial (2.30) tiene tres formas.

A. **Movimiento sobre amortiguado.** En este caso $c > c_{cr}$, entonces las dos raíces de la ecuación característica son reales y diferentes. Por tanto la solución puede escribirse

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \qquad (2.36)$$

B. **Movimiento críticamente amortiguado.** Aquí $c = c_{cr}$, en este caso las dos raíces son iguales. La solución general será

$$x = (A + Bt)e^{\omega_n t} \qquad (2.37)$$

C) **Movimiento subamortiguado.** Las raíces de la ecuación (33) son complejas y conjugadas.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = -\alpha \pm i\omega_d \qquad (2.38)$$

Donde $\alpha = c/2m$ y ω_d es la frecuencia circular amortiguada dada por

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \qquad (2.39)$$

El período de la vibración amortiguada será

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} \qquad (2.40)$$

Remplazando la ecuación (2.38) en (2.31) resulta

$$x = x_0 e^{-\alpha t} Sen(\omega_d t + \phi) \qquad (2.41)$$

El movimiento de la ecuación (2.41) se dice que es *periódico en el tiempo* de amplitud decreciente tal como se muestra en la figura 2.9. En donde se observa que el "*período*" es el tiempo entre dos valles o picos

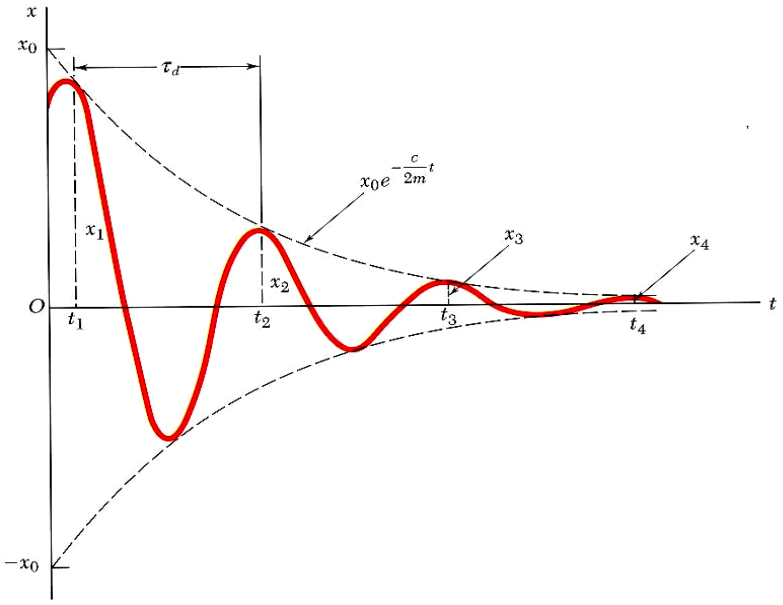


Figura 2.9. ***Representación de la posición en función del tiempo para un movimiento subamortiguado***

Decremento logarítmico. Es una cantidad que nos permite medir la velocidad de decaimiento de una oscilación, se expresa como el logaritmo de la razón entre cualquier par de amplitudes sucesivas positivas (o negativas). Esto es

$$x_1 = x_0 e^{-\alpha t_1} \qquad (2.42)$$

y la amplitud siguiente es

$$x_2 = x_0 e^{-\alpha (t_1 + \tau_d)} \qquad (2.43)$$

la razón entre las dos amplitudes es

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_0 e^{-\alpha t_1}}{x_0 e^{-\alpha (t_1 + \tau_d)}} = e^{\alpha \tau_d} \qquad (2.44)$$

Por lo tanto el *decremento logarítmico* será

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_1} = \ln\left(e^{\alpha \tau_d}\right)$$

$$\delta = \alpha\tau_d = \frac{c\tau_d}{2m} \tag{2.45}$$

Razón de amortiguamiento. También conocido como factor de amortiguamiento, es una cantidad definida como la razón entre el coeficiente de amortiguamiento (c) y el coeficiente de amortiguamiento cítrico (c_{cr}), esto es

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{cc}{2m\omega_n} \tag{2.46}*$$

En función de esta cantidad se pueden obtener las siguientes relaciones

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{2.47}$$

En función de la razón de amortiguamiento se puede decir que un movimiento es sobre amortiguado si ($\xi > 1$), es críticamente amortiguado si ($\xi = 0$) y subamortiguado sí ($\xi < 1$).

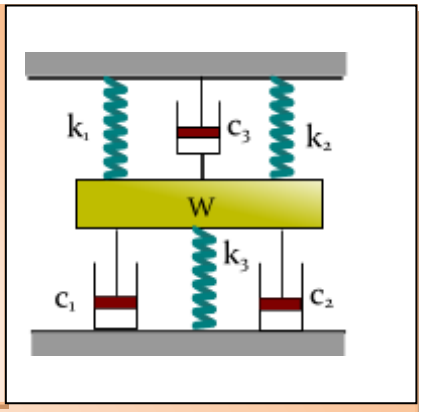
Para el caso de un movimiento subamortiguado, *la pulsación propia amortiguada, el período amortiguado* y el decremento logarítmico se escriben en la forma.

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \tag{2.48}$$

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \tag{2.49}$$

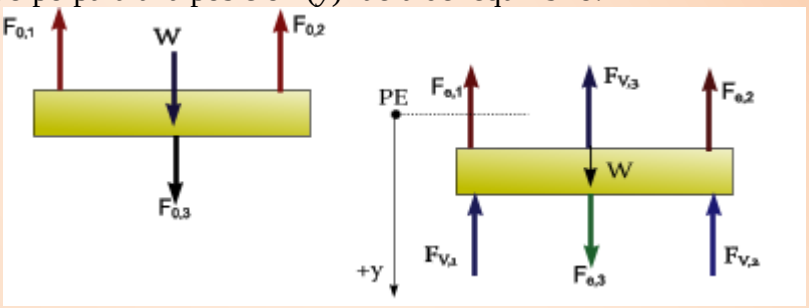
$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{2.50}$$

Ejemplo 2.4. El cuerpo M de 12 kg mostrado en la figura es sustentado por tres resortes y tres amortiguadores viscosos como se muestra en la figura. Si $k_1 = k_2 = 150$ N/m; $k_3 = 120$ N/m; $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}8$ N.s/m y $\beta_3 = 1{,}4$ N.s/m y para iniciar el movimiento se desplaza al cuerpo 100 mm hacia abajo y se suelta desde el reposos. Determine: (a) La ecuación diferencial que describe el movimiento, (b) la frecuencia (si existe) y (c) el decremento logarítmico.



Solución

En la figura (a) se muestra el DCL del cuerpo en la posición de equilibrio estático y en (b) el DCL del cuerpo para una posición (y) fuera del equilibrio.



(a) (b)

Aplicando las ecuaciones de equilibrio al diagrama A, se tiene

$$\downarrow \sum F_y = ma_{G,y} = m(o) = 0$$
$$mg - k_1\delta_s - k_2\delta_s - k_3\delta_s = 0 \qquad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento del bloque resulta

$$\downarrow \sum F_y = ma_{G,y}$$
$$mg - (k_1 + k_2 + k_3)(\delta_s + y) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\dot{y} = m\ddot{y} \qquad (2)$$

Remplazando la ecuación (1 en (2) resulta.

$$m\ddot{y} + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\dot{y} + (k_1 + k_2 + k_3)y = 0$$

Al sustituir los valores dados en el problema se tiene

$$12\ddot{y} + 3\dot{y} + 420y = 0 \qquad (3)$$

La solución de la ecuación diferencial es de la forma

$$y = De^{\lambda t}$$
$$\dot{y} = \lambda De^{\lambda t}$$
$$\ddot{y} = \lambda^2 De^{\lambda t}$$

Remplazando estas cantidades en la ecuación (3) nos permite obtener la ecuación característica, dada por

$$De^{\lambda t}\left(12\lambda^2+3\lambda+420\right)=0$$
$$12\lambda^2+3\lambda+420=0 \qquad (4)$$

La solución de la ecuación (4) nos da

$$\lambda_{1,2}=-0,125\pm i(5,9) \qquad (5)$$
$$\lambda_{1,2}=-\alpha\pm i\omega_d$$

La ecuación (5) indica que el movimiento es subamortiguado por tanto existe una "frecuencia amortiguada".

$$\omega_d=2\pi f=5,9$$
$$f=0,94 \text{ hertz} \qquad \text{Rta.}$$

Como el movimiento es subamortiguado la solución de la ecuación diferencial (3) es de la forma

$$y=Ae^{-0,125t}sen\left(5,9t+\varphi\right) \qquad (6)$$

La velocidad es

$$\dot{y}=Ae^{-0,125t}[5,9\cos\left(5,9t+\varphi\right)-0,125sen\left(5,9t+\varphi\right)] \qquad (7)$$

Remplazando las condiciones iniciales en las ecuaciones (6) y (7) resulta

$$0,1=Asen\varphi$$
$$0=A[5,9\cos\varphi-0,125sen\varphi]$$

Los valores de A y φ son

$$A=0,1 \text{ m}$$
$$\varphi=89°$$

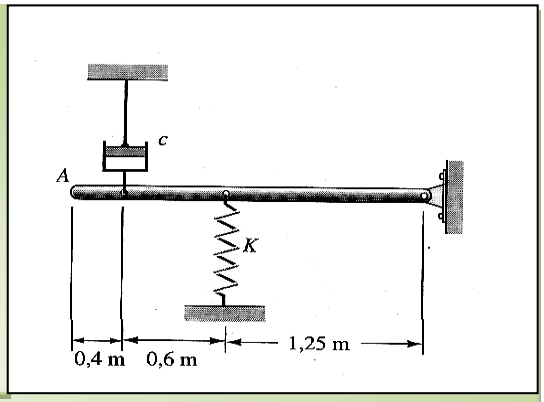
La posición en cualquier tiempo será

$$y=0,1e^{-0,125t}sen\left(5,9t+89°\right)$$

El decremento logarítmico es

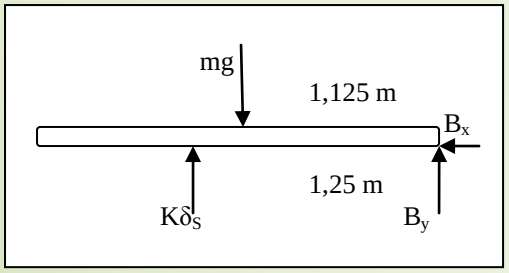
$$\delta=\ln\left[\frac{0,1e^{-0,125t}}{0,1e^{-0,125(t+T_d}}\right]$$
$$\delta=0,125T_d=0,125\left(\frac{1}{f}\right)=0,125\left(\frac{1}{0,94}\right)$$
$$\delta=0,133 \qquad \text{Rta}$$

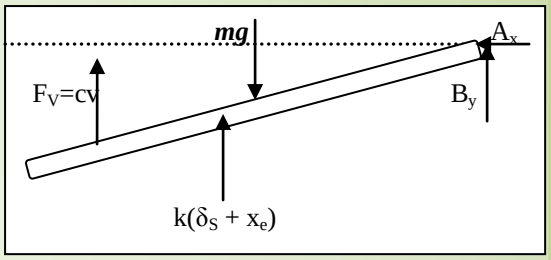
Ejemplo 2.5. Se muestra una barra de 2,25 m de longitud y 200 N de peso en la posición de equilibrio estático y soportada por un muelle de rigidez k =14 N/mm. La barra está conectada a un amortiguador con un coeficiente de amortiguamiento c = 69 N.s/m. Determine: (a) La ecuación diferencial para el movimiento angular de la barra, (b) el tipo de movimiento resultante, (c) el período y la frecuencia del movimiento (si procede) y (d) la razón de amortiguamiento.



Solución

En la figura (a) se muestra el DCL del cuerpo en la posición de equilibrio estático y en (b) el DCL del cuerpo para una posición (y) fuera del equilibrio.





Aplicando la segunda condición de equilibrio a la figura (a) resulta

$$\sum M_B = 0$$
$$mg(1{,}125) - k\delta_s(1{,}25) = 0 \qquad (1)$$

Aplicando la ecuación de movimiento de rotación se tiene

$$\sum M_B = I_B\ddot{\theta}$$
$$mg(1{,}125\cos\theta) - k(\delta_s + x_e)(1{,}25\cos\theta) - cv(1{,}85\cos\theta) = I_B\ddot{\theta} \qquad (2)$$

Para ángulos pequeños sen$\theta \approx \theta$ y cosθ=1, entonces se tiene

$$mg(1{,}125) - k(\delta_s + x_e)(1{,}25) - cv(1{,}85) = I_B\ddot{\theta} \qquad (3)$$

Remplazando la ecuación (1) en (3) resulta

$$-k(x_e)(1{,}25) - c\dot{x}_v(1{,}85) = I_B\ddot{\theta}$$
$$I_B\ddot{\theta} + c\dot{x}_v(1{,}85) + -k(x_e)(1{,}25) \qquad (4)$$

De la figura (b) se tiene que

$$x_e = 1{,}25\theta \qquad (5)$$
$$x_{..} = 1{,}85\theta \qquad (6)$$

Remplazando (5) y (6) en (4) se obtiene

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}+c\left(1,85\dot{\theta}\right)\left(1,85\right)+-k\left(1,25\theta\right)\left(1,25\right)=\theta \qquad (7)$$

Remplazando los datos del enunciado y simplificando se tiene

$$34,4\ddot{\theta}+236,2\dot{\theta}+21875\theta=0 \qquad (8)$$

La frecuencia circular natural es

$$\omega_n=\sqrt{\frac{21875}{34,4}}=25,22 \text{ rad/s}$$

La razón de amortiguamiento se determina a partir de

$$\xi=\frac{c_{eff}}{2m_{eff}\omega_n}=\frac{236,2}{2\left(34,4\right)\left(25,22\right)}$$
$$\xi=0,136 \quad \text{Rta,}$$

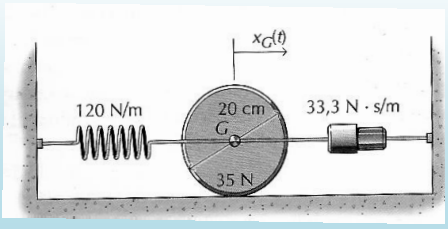
La ecuación anterior nos indica que el movimiento es subamortiguado por tanto existe la frecuencia y el período amortiguados

$$34,4\lambda^2+256,2\lambda+21875=0$$
$$\lambda_{1,2}=-3,43\pm i\left(24,98\right)$$
$$\lambda_{1,2}=-\gamma\pm i\omega_d$$

La frecuencia amortiguada es

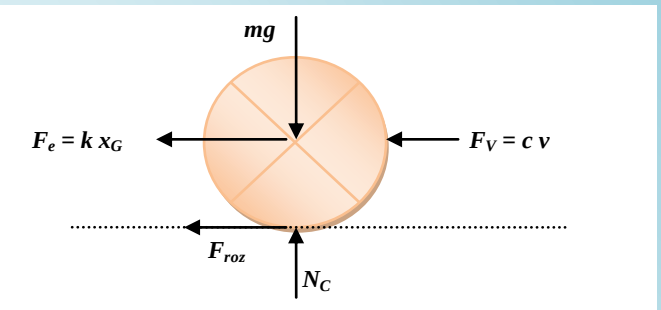
$$\omega_d=24,98\ rad/s=2\pi f=2\pi/T_d$$
$$f=3,97s$$
$$T_d=0,25 \text{ s}$$

Ejemplo 2.6. Un cilindro uniforme que pesa 35 N, rueda sin deslizar por una superficie horizontal como se muestra en la figura. El resorte y e amortiguador están conectados a un pequeño pasador exento de fricción situado en el centro G del cilindro de 20 cm de diámetro. Determine: (a) La ecuación diferencial del movimiento; (b) La razón de amortiguamiento; (c) El tipo de movimiento.



Solución

En la figura se muestra el DCL del cilindro para una posición arbitraria cualquiera respecto a la posición de equilibrio



Aplicando las ecuaciones de movimiento de traslación, se tiene

$$\sum F_x = m\ddot{x}_G$$
$$-kx_G - F_{roz} - F_v = m\ddot{x}_G$$
$$-kx_G - F_{roz} - c\dot{x}_G = m\ddot{x}_G \qquad (1)$$

Aplicando las ecuaciones de movimiento de rotación, se tiene

$$\sum M_G = I_G\ddot{\theta}$$
$$F_{roz}(r) = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$
$$F_{roz} = \frac{1}{2}mr\ddot{\theta} \qquad (2)$$

Remplazando (2) en (1), y teniendo en cuenta que $x_G = r\ddot{\theta}$, obtenemos

$$-kx_G - c\dot{x}_G - \frac{1}{2}mr\ddot{\theta} = -kx_G - c\dot{x}_G - \frac{1}{2}mr\left(\frac{\ddot{x}_G}{r}\right) = m\ddot{x}_G \qquad (3)$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_G + c\dot{x}_G + kx_G = 0$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{35}{9.8}\right)\ddot{x}_G + 33,3\dot{x}_G + 120x_G = 0$$

$$5,36\ddot{x}_G + 33,3\dot{x}_G + 120x_G = 0 \qquad \text{Rta}$$

Parte (b) Cálculo de la razón de amortiguamiento

$$\xi = \frac{c_{eff}}{2m_{eff}\omega_n} = \frac{33.3}{2(5,36)\left(\sqrt{120/5,36}\right)}$$

$$\xi = 0,656 \qquad \text{Rta}$$

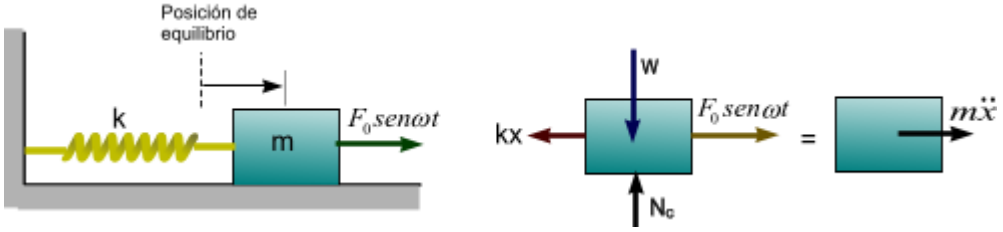
Parte (c). Tipo de movimiento. Como $\xi < 1$; el movimiento es subamortiguado

2.4 VIBRACIONES FORZADAS.

2.4.1 Vibraciones forzadas sin amortiguamiento.

Uno de los movimientos más importantes en el trabajo ingenieril es las vibraciones forzadas sin amortiguamiento**.** Los principios que describen este movimiento pueden aplicarse al estudio de las fuerzas que originan la vibración en varios tipos de máquinas y estructuras.

Fuerza armónica de excitación. El sistema mostrado en a figura 2.10, proporciona un modelo de un sistema masa resorte sometido a una fuerza de carácter armónico dada por $F = F_0\ sen(\omega t)$, donde F_0 es la amplitud de la vibración armónica y ω es a frecuencia de la vibración armónica.



(a) (b)

Figura 2.10. ***(a) Bloque sometido a una fuerza periódica externa, (b) DCL y cinético.***

Aplicando las ecuaciones de movimiento según el eje x, resulta

$$\sum F_x = ma_x$$
$$F_0 sen\omega t - kx = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + kx = F_0 sen\omega t \qquad (2.51)^*$$

La ecuación (2.51)* es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Su solución está compuesta por: i) *una solución complementaria;* y *ii) una solución particular.*

La solución complementaria se determina haciendo igual a cero el segundo término de la ecuación (2.51)*, y resolviendo la ecuación homogénea, es decir

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

La solución de esta ecuación es de la forma

$$x = x_m sen(\omega_n t + \varphi) \qquad (2.52)$$

Como el movimiento es periódico la solución particular es de la forma

$$x_P = Bsen\omega t \qquad (2.53)$$

Determinando la segunda derivada con respecto al tiempo de la ecuación (2.53) y remplazando en la ecuación (2.51) da por resultado

$$-Bm\omega^2 sen\omega t + k\left(bsen\omega t\right) = F_0 sen\omega t$$

Despejando el valor de la constante *B* resulta

$$B = \frac{F_0/m}{\frac{k}{m}-\omega^2} = \frac{F_0/k}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2} \qquad (2.54)$$

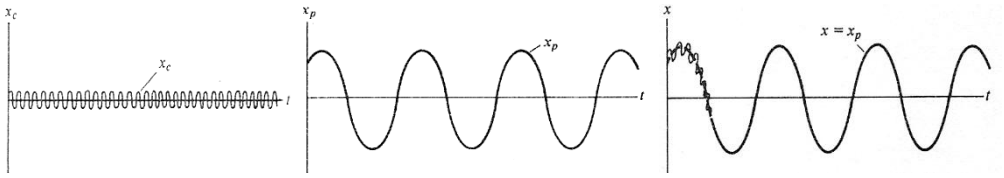
Remplazando la ecuación (2.54) en (2.53), resulta

$$x_P = \frac{F_0/k}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} sen\omega t \qquad (2.55)$$

La solución general será

$$x = x_C + x_P = Asen\left(\omega_n t + \varphi\right) + \frac{F_0/k}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} sen\omega t \qquad (2.56)$$

De la ecuación (2.56) se observa que la oscilación total está compuesta por dos tipos de movimiento. Una vibración libre de frecuencia ω_n figura 2.11a, y una vibración forzada causada por la fuerza exterior figura 2.11b. De esto se observa que la vibración libre se extingue quedando la vibración permanente o particular como lo muestra la figura 2.11c.



(a) (b) (c)

Figura 2.11. ***(a) vibración libre, (b) vibración permanente y (c) Superposición de ambas.***

En la ecuación (2.55) se observa que la amplitud de la vibración particular depende de la razón entre las frecuencias forzada y natural. Se define como ***factor de amplificación*** al cociente entre la amplitud de la vibración estable y la deflexión estática.

$$MF = \frac{(x_P)_{\max}}{F_0/k} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad (2.57)$$

De esta ecuación puede observarse que aparece la resonancia cuando las dos frecuencias son aproximadamente iguales esto es $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$. El fenómeno de *resonancia* no es deseable en las vibraciones de elementos estructurales porque producen esfuerzos internos que pueden producir el colapso de la estructura.

Desplazamiento excitador periódico. Las vibraciones forzadas también pueden surgir a parir de la excitación periódica de la cimentación de un sistema. El modelo indicado en la figura 2.12, representa la vibración periódica de un bloque que es originada por el movimiento armónico $\delta = \delta_0 sen\omega t$.

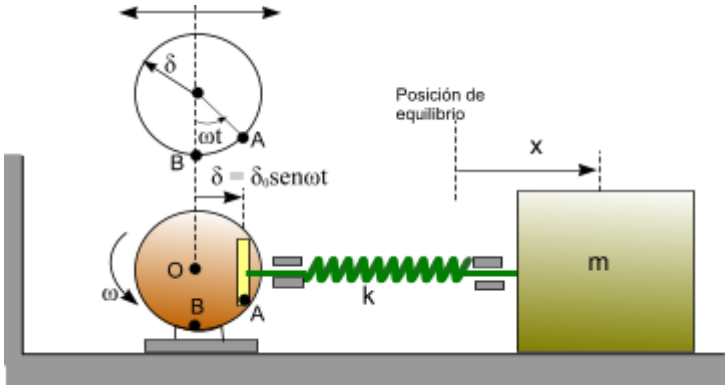


Figura 2.12. ***Vibración forzada debido a un desplazamiento periódico.***

En la figura 2.13, se muestra el DCL y cinético del bloque. En este caso la coordenada *x* se mide a partir del punto de desplazamiento cero del soporte es decir cuando el radio vector OA coincide con OB. Por lo tanto el desplazamiento general del resorte será $(x - \delta_0 sen\omega t)$

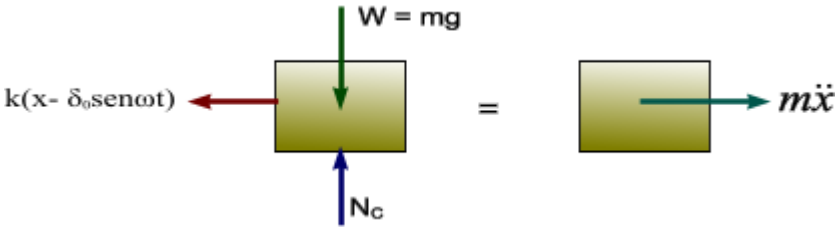


Fig. 13. ***Diagrama de cuerpo libre y cinético***

Aplicando la ecuación de movimiento según la dirección horizontal se tiene

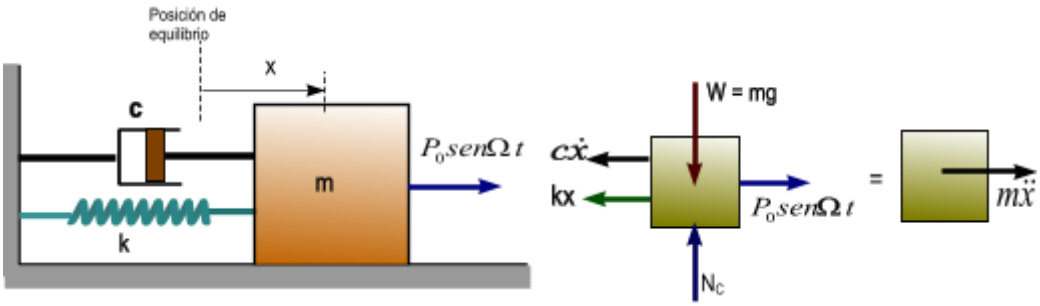
$$\sum F_x = ma_x$$
$$-k\left(x - \delta_0 sen\omega t\right) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = k\delta sen\omega t \qquad (2.58)$$

Comparado la ecuación (2.58) con la ecuación (2.51) se observa que su forma es idéntica por tanto su solución seguirá el mismo procedimiento establecido anteriormente.

2.4.2 Vibración libre con amortiguamiento viscoso.

En nuestras consideraciones sobre las vibraciones de un solo grado de libertad y con amortiguamiento viscoso, encontramos que la energía era disipada por el amortiguador y la amplitud disminuía con el tiempo. Sin embargo, si proporcionamos una fuente de energía externa podemos mantener las oscilaciones con una amplitud constante. Para determinar las ecuaciones que la gobiernan a este movimiento consideremos un sistema masa, resorte y amortiguador sometido a una fuerza periódica externa P =P_0senΩ, tal como se muestra en la figura 2.14.



(a) (b)

Figura 2.14. ***(a) Sistema mecánico forzado, (b) Diagrama de cuerpo libre*.**

Aplicando al DCL la segunda ley de Newton, se obtiene.

$$\sum F_x = ma_x$$
$$P_0 sen\omega t - kx - c\dot{x} = m\dot{x}$$
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 sen\Omega t \qquad (2.59)^*$$

La ecuación diferencial (2.59)* es una ecuación diferencial lineal, de segundo orden, no homogénea y con coeficientes constantes. Su solución se obtiene sumando una *solución complementaria* y una *solución particular*. La solución complementaria satisface a la ecuación homogénea y la solución particular es una función cualquiera que satisface la ecuación diferencial. Por lo tanto, la solución total se escribe

$$x(t) = x_C(t) + x_P(t) \qquad (2.60)$$

La solución particular estudiada anteriormente, se extingue rápidamente según el valor del coeficiente de amortiguamiento. Por el contrario la solución particular o permanente o de estado estacionaria es la que se mantiene, siendo esta de carácter armónico y viene expresada por.

$$x_P = x_m sen(\Omega t - \varphi) \tag{2.61}$$

Remplazando la ecuación (61) en la ecuación (60) resulta.

$$m\Omega^2 x_m sen(\Omega t - \varphi) + c\Omega x_m \cos(\Omega t - \varphi) + k x_m sen(\Omega t - \varphi) = P_0 sen\Omega t$$

Haciendo (Ωt-φ) sucesivamente igual a cero y π/2, resulta

$$c\Omega x_m = P_0 sen\varphi \tag{2.62}$$

$$\left(k - m\Omega^2\right)x_m = P_0 \cos\varphi \tag{2.63}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de las dos ecuaciones anteriores, resulta y sumándolos, resulta

$$\left[\left(k - m\Omega^2\right)^2 + (c\Omega)^2\right]x_m^2 = P_0^2 \tag{2.64}$$

De la ecuación (64), se obtiene la amplitud la misma que está dada por

$$x_m = \frac{P_0}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + (c\Omega)^2}} \tag{2.65}$$

El desfasaje φ se obtiene dividiendo las ecuaciones (62) y (63)

$$tg\varphi = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} \tag{2.66}$$

Bajo estas circunstancias la solución particular se escribe

$$x = \frac{P_0}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + (c\Omega)^2}} sen(\Omega t - \varphi) \tag{2.67}$$

Pero la frecuencia natural está dada por, $\omega_n = k/m$, y el valor del coeficiente crítico de amortiguamiento es $c_{cr} = 2m\omega_n$, el factor de amplificación será

$$MF = \frac{x_m}{P_0/k} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - (\Omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2(c/c_{cr})(\Omega/\omega_n)\right]^2}} \tag{2.68}$$

$$tg\varphi = \frac{2(c/c_{cr})(\Omega/\omega_n)}{1 - (\Omega/\omega_n)^2} \tag{2.69}$$

En la figura 2.15, se muestra el factor de amplificación en función de la razón de frecuencias para distintos valores de la razón de amortiguamiento. Observe que a medida que se va disminuyendo la razón de amortiguamiento la amplitud de la vibración va creciendo. La ***resonancia*** se produce cuando la

razón de amortiguamiento tiende a cero y las frecuencias son aproximadamente iguales

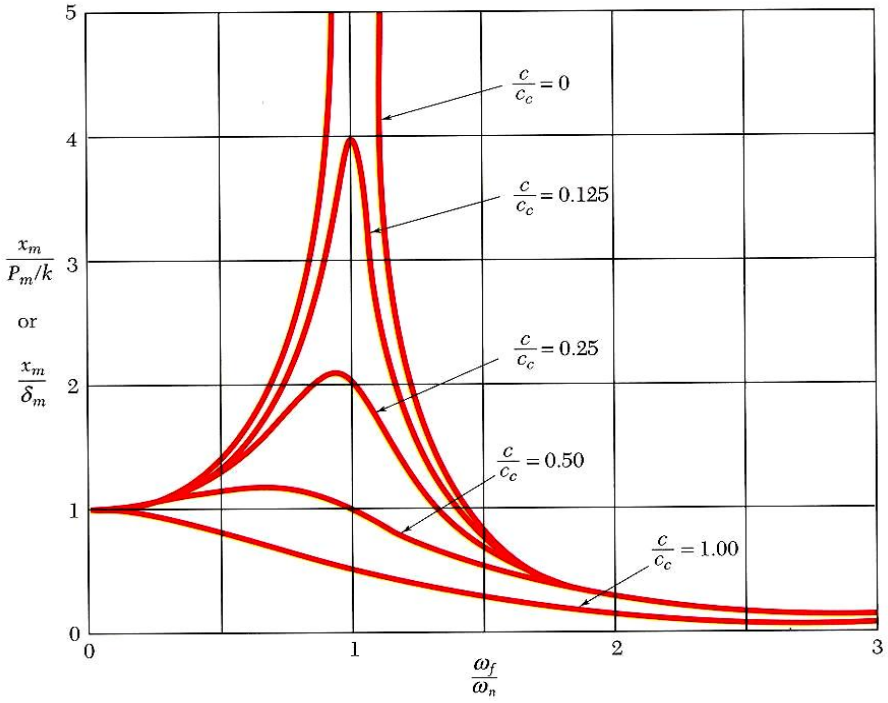


Figura 2.15. ***Relación entre el factor de amplificación y la razón de frecuencias.***

2.5 PROBLEMAS RESUELTOS

2.5.1 Vibraciones libres

Problema 01.

Un instrumento que se utiliza para medir la vibración de una partícula realiza un movimiento armónico simple de frecuencia propia *5 Hz* y aceleración máxima de *40 m/s²*. .Determinar la amplitud y la máxima velocidad de la vibración.

Solución

Datos e incógnitas

$$f = 5Hz;..a_{\max} = 48m/s^2; A = ??;..v_{\max} = ??$$

Cálculo de la amplitud

$$a_{\max} = \omega^2 A = (2\pi.f)^2 A$$

$$A = \frac{a_{\max}}{(2\pi.f)^2}$$

$$A = 48,6mm.....Rta.$$

Cálculo de la velocidad máxima

$$v_{\max} = \omega.A = 2\pi.f = 2\pi(5)(0,0486)$$

$$v_{\max} = 1,53m/s.....Rt$$

Problema 02

Una partícula vibra con un movimiento armónico simple. Cuando pasa por su posición de equilibrio, su velocidad es de *2 m/s*. Cuando se halla a *20 mm* de su posición de equilibrio, su aceleración es de *50 m/s²*. Determine el módulo de la velocidad en esta posición.

Solución

Datos e incógnitas.

$$X_0 = 0;..v = 2m/s;..X = 20mm;..$$

$$a = 50m/s^2,..v = ??$$

Es sabido que la posición en cualquier tiempo está dada por

$$X = A.Sen(\omega.t + \varphi)$$

$$\dot{X} = \omega.A.Cos(\omega.t + \varphi)$$

$$\dot{X} = \omega.\sqrt{A^2 - X^2}\ .....(1)$$

Si cuando X = 0, v_0 =2 m/s; entonces se tiene

$$2 = \omega\sqrt{A^2 - 0}$$

$$2 = \omega.A.....(2)$$

Además se tiene que

$$a = \pm\omega^2 X$$

$$50m/s^2 = \pm\omega^2 X$$

$$\omega = 50rad/s.....(3)$$

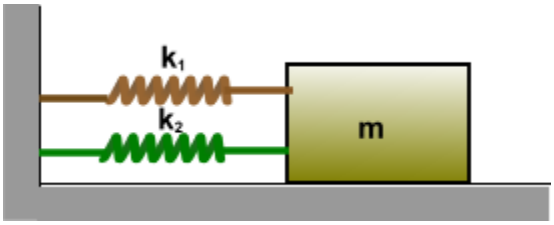
La velocidad cuando X = 20 mm, será

$$v = 50\sqrt{0,04^2 - 0,02^2}$$

$$v = 1,73m/s.....Rta.$$

Problema 03

Un bloque de masa *m* se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento, según se muestra en la figura. Determine la constante *k* del resorte único que podría sustituir los dos representados sin que cambiara la frecuencia del bloque.

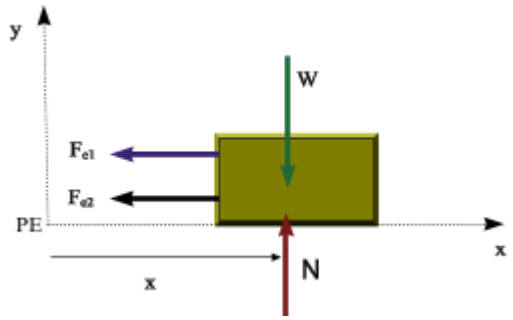


Solución

Datos e incógnitas

$$m;..\mu_k = 0;..k_1;..k_2;..k_e = ??$$

En la figura se muestra el DCL del bloque en una posición X a partir del equilibrio.



Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección X, resulta

$$\sum F_x = m.a_x$$
$$-F_{e1} - F_{e2} = m.\ddot{X}$$
$$-k_1X - k_2X = m\ddot{X}$$
$$m\ddot{X} + (k_1 + k_2)X = 0 \quad \text{.....(1)}$$

Para sustituir los resortes por uno equivalente sin modificar la frecuencia, debe cumplirse que

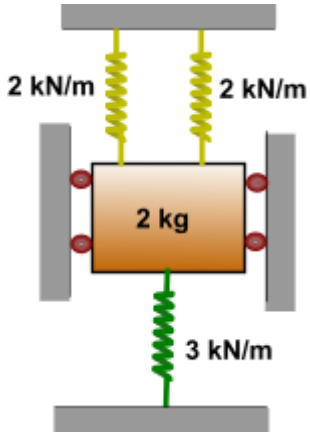
$$m\ddot{X} + k_eX = 0 \quad \text{.....(2)}$$

Comparando las ecuaciones (1) y (2), resulta

$$k_e = k_1 + k_2 \quad \text{.....Rta.}$$

Problema 04

Una masa de *2 kg* está suspendida en un plano vertical por tres resortes, según se muestra en la figura. Si el bloque se desplaza *5 mm* hacia abajo a partir de su posición de equilibrio y se suelta con una velocidad hacia arriba de *0,25 m/s* cuando $t = 0$. Determinar: (a) La ecuación diferencial que rige al movimiento, (b) El periodo y la frecuencia de la vibración, (c) La posición de la masa en función del tiempo y (d) El menor tiempo $t_1 > 0$ del paso de la masa por su posición de equilibrio

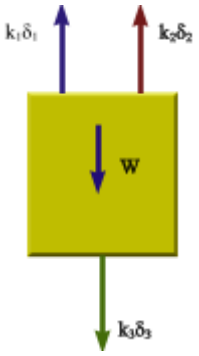


Solución

Datos e incógnitas

$$m = 2kg;..X_0 = 5mm;..v = 0{,}25m/s \uparrow;..t = 0;..$$
$$Ec.Dif. = ??;..T = ??;..A = ??;..X = f(t);..t_1 = ??$$

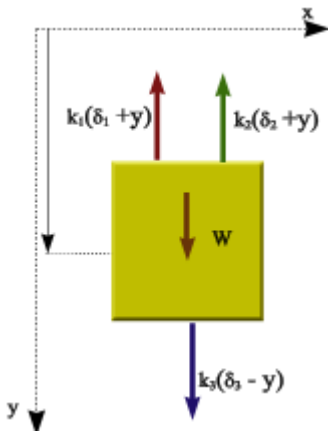
En la figura se muestra el DCL de la masa en la posición de equilibrio. Se supone que los resortes están estirados



Aplicando las ecuaciones de equilibrio en la dirección vertical, se tiene

$$\sum F_y = 0$$
$$mg - k_1\delta_1 - k_2\delta_2 + k_3\delta_3 = 0 \quad \text{.....(1)}$$

En la figura se muestra el DCL de la masa en una posición arbitraria Y, a partir de la posición de equilibrio



Aplicando la ecuación de movimiento

$$\sum F_y = m\ddot{Y}$$
$$mg + F_{e3} - F_{e1} - F_{e2} = m\ddot{Y}$$
$$mg + k_3(\delta - Y) - k_1(\delta_1 + Y) - k_2(\delta_2 + Y) = m\ddot{Y}$$
$$mg + k_3\delta_3 - k_1\delta_1 - k_2\delta_2 - (k_1 + k_2 + k_3)Y = m\ddot{Y} \quad \text{.....(2)}$$

Remplazando la ecuación (1) en (2), resulta

$$m\ddot{Y} + (k_1 + k_2 + k_3) = 0$$
$$2\ddot{Y} + 7000Y = 0$$
$$\ddot{Y} + 3500Y = 0 \quad \ldots\ldots(3)$$

El periodo de vibración se obtiene de la frecuencia circular

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{3500}$$
$$T = 0{,}1062 seg \quad \ldots\ldots(4)$$

Calculo de la amplitud. La solución de la ecuación diferencial (3), tiene la forma

$$Y = A.Sen(\omega.t + \varphi) \quad \ldots\ldots(5)$$

Su velocidad viene expresado por

$$\dot{Y} = 59{,}2A.Cos(59{,}2t + \varphi) \quad \ldots\ldots(6)$$

Remplazando las condiciones iniciales, se tiene

$$0{,}005 = ASen\varphi \quad \ldots\ldots(7)$$
$$-0{,}25 = 59{,}2A.Cos\varphi \quad \ldots\ldots(8)$$

Resolviendo simultáneamente las ec.(7)y (8),resulta

$$A = 6{,}54mm$$
$$\varphi = -49{,}86^o$$

La posición en cualquier tiempo t, será

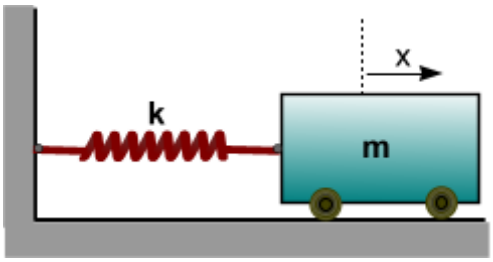
$$Y = 6{,}54Sen(59{,}2t - 0{,}87) \quad \ldots\ldots Rta.$$

El tiempo t_1>0, será

$$0 = 6{,}54Sen(59{,}2t_1 - 0{,}87)$$
$$t_1 = 0{,}015 seg \quad \ldots\ldots Rta.$$

Problema 05

En la figura, la coordenada *X* mide el desplazamiento de la masa de *10 kg* respecto a su posición de equilibrio. En *t =0*, la masa se suelta del reposo en la posición *X =0,1 m*. Determinar: (a) El período y la frecuencia natural de las vibraciones resultantes, (b) La posición de la masa en función del tiempo

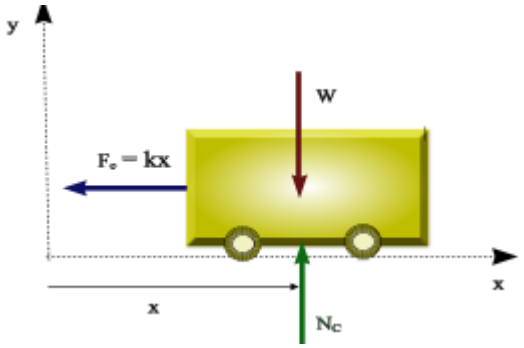


Solución

Datos e incógnitas

$$m = 10kg;..k = 90N/m;..t = 0 : X = 0{,}1m.y.\dot{X} = 0$$
$$T = ??;..f = ??;..X = f(t)$$

En la figura se muestra el DCL de m en una posición arbitraria X a partir de la posición de equilibrio



Aplicando la segunda ley de Newton en dirección horizontal, se tiene.

$$\sum F_x = m\ddot{X}$$
$$-F_e = m\ddot{X}$$
$$.-kX = m\ddot{X}$$
$$m\ddot{X} + kX = 0$$
$$10\ddot{X} + 90X = 0$$
$$\ddot{X} + 9X = 0 \quad \ldots\ldots(1)$$

La frecuencia circular está dada por

$$\omega = \sqrt{9} = 3.rad/s \quad \ldots\ldots(2)$$

El período será

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 3$$
$$T = 2{,}09 Seg \quad \ldots\ldots Rta$$

La frecuencia natural, es

$$f = \frac{1}{Y} = \frac{1}{2,09}$$

$$f = 0,48Hz.....Rta$$

La solución de la ecuación diferencial (3), tiene la forma

$$X = ASen(3t + \varphi).....(3)$$

La velocidad está dada por

$$\dot{X} = 3ACos(3t + \varphi).....(4)$$

Reemplazando las condiciones iniciales, se tiene

$$0,1 = ASen\varphi.....(5)$$
$$0 = 2ACos\varphi.....(6)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones anteriores, resulta

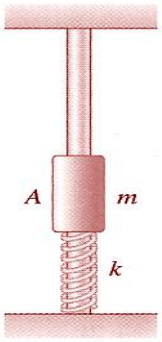
$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$
$$A = 0.1m$$

La posición en función del tiempo será

$$X = 0,1Sen(3t + \pi/2) \qquad \text{Rta}$$

Problema 06

Un collar de *4 Kg* está unido a un resorte de constante *k = 800 N/m* como se muestra en la figura. Si al collar se le desplaza *40 mm* hacia abajo desde su posición de equilibrio y se le suelta, determinar: (a) El tiempo necesario para que el collar se mueva *60 mm* hacia arriba y (b) La velocidad y aceleración correspondientes.

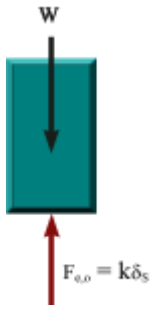


Solución

Datos e incógnitas

$$m = 4kg;..k = 800N/m;..t = 0 : X = 40mm,..\dot{X} = 0$$
$$t = ??;..X = 60mm\uparrow;..v = ??;..a = ??$$

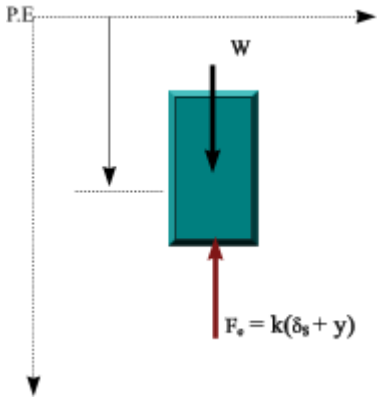
En la figura se muestra el DCL de m en posición de equilibrio



Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\sum F = 0$$
$$mg - k\delta_s . = 0.....(1)$$

En la figura se muestra el DCL de m en una posición arbitraria Y, a partir de su posición de equilibrio



Aplicando la segunda Ley de Newton, en dirección vertical, se tiene

$$\sum F_y = ma_y$$
$$W - F_e = m\ddot{Y}$$
$$mg - k(\delta + Y_s) = m\ddot{Y}.....(2)$$

Reemplazando la Ec.(1) en (2), resulta

$$m\ddot{Y} + kY = 0$$
$$4\ddot{Y} + 800Y = 0$$
$$\ddot{Y} + 200Y = 0.....(3)$$

La ecuación (3), es la ecuación diferencial de un M.A.S. de frecuencia circular $\omega = \sqrt{200}$rad/s, y la posición en función del tiempo está dado por

$$Y = ASen(14{,}14t + \varphi).....(4)$$

La velocidad se expresa como

$$\dot{Y} = 14{,}14ACos(14{,}14t + \varphi).....(5)$$

La amplitud A y el desfasaje φ, se determina utilizando las condiciones iniciales, esto es:

$$40mm = ASen\varphi.....(6)$$
$$0 = 14{,}14ACos\varphi.....(7)$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores, resulta

$$A = 40mm.....(8)$$
$$\varphi = \pi/2.....(9)$$

La posición, velocidad y aceleración como función del tiempo se expresa en la forma

$$Y = 40Sen(14{,}14t + \varphi)mm$$
$$\dot{Y} = 565{,}6Cos(14{,}14t + \pi/2)mm/s$$
$$\ddot{Y} = -79.97Sen(14{,}14t + \pi/2)m/s^2$$

El tiempo cuando Y = 60mm↑ será

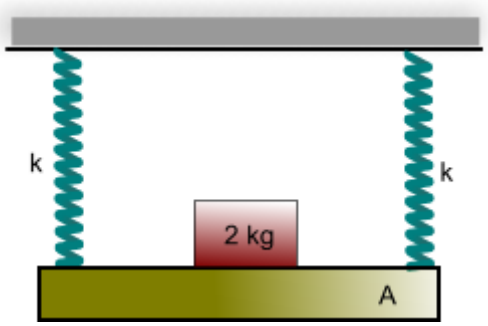
$$20 = 40sen(14{,}14t + \pi/2)$$
$$t = 0{,}15seg$$

La velocidad y la aceleración cuando t = 0,15 s. serán

$$\dot{Y} = 40Cos[14{,}14(0{,}15) + \pi/2]$$
$$\dot{Y} = 485mm/s\uparrow$$
$$\ddot{Y} = -79.79Sen[14{,}14(0{,}15) + \pi/2]$$
$$\ddot{Y} = 3991mm/s\uparrow .....Rta$$

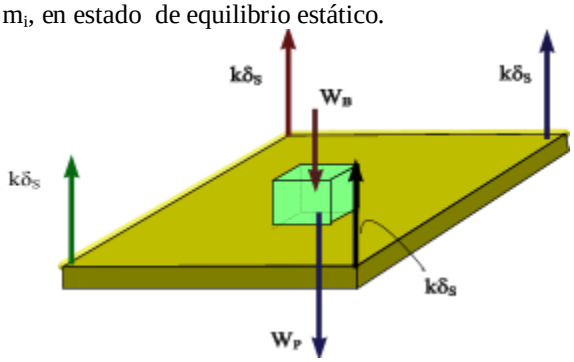
Problema 07

Una plataforma *A* que tiene una masa desconocida esta soportada por cuatro resortes teniendo cada uno una constante elástica *k*. Cuando no hay nada sobre la plataforma el período de vibración vertical es de *3,9 s;* mientras que si soporta un bloque de *2 kg* sobre la plataforma el período de vibración vertical es de *4,10 s*. Calcular la masa de un bloque colocado sobre la plataforma (vacía) que hace que la plataforma vibre verticalmente con un período de *4,6 s*. ¿Cuál es el valor de la constante elástica k del resorte?.



Solución

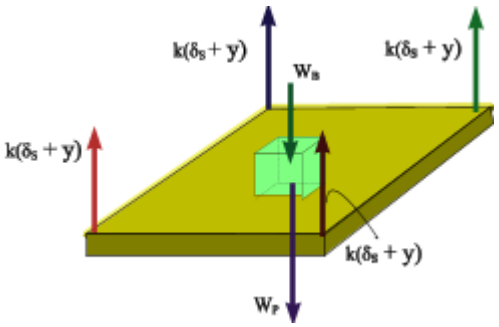
En la figura se muestra el DCL de la plataforma cuando sobre ella está colocado un bloque de masa m_i, en estado de equilibrio estático.



Aplicando la ecuación de equilibrio, se tiene

$$\sum F_y = 0$$
$$(m_B + m_P)g - 4k\delta_s = 0.....(1)$$

En la figura se muestra el DCL de la plataforma más un bloque de masa m_i en posición Y, a partir de la posición de equilibrio.



Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene

$$\sum F_y = m_s\ddot{Y}$$
$$(m_p + m_B)g - 4k(\delta_s + Y) = (m_P + m_B)\ddot{Y}.....(2)$$

Reemplazando la ecuación (1), en (2), resulta

$$(m_P + m_B)\ddot{Y} + 4kY = 0$$

$$\ddot{Y} + \frac{4k}{m_P + m_B} Y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

La ec (3) es la ecuación diferencial de un M.A.S. con una frecuencia circular

$$\omega_n^2 = \frac{4k}{m_P + m_B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

El período está expresado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_P + m_B}{4k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Por condición del ejercicio, cuando $m_B = 0$, entonces $T_1 = 3{,}9$ s, es decir

$$3{,}9 = 2\pi\sqrt{\frac{m_P}{4k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Además, cuando $m_B = 2\ kg;\ T_2 = 4{,}1\ s$, entonces

$$4{,}1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_P + 2}{4k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuación (6) y (7), resulta

$$m_P = 19kg \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$k = 12{,}33N/m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Además cuando se coloca sobre la plataforma un bloque de masa desconocida, el período es $T_3 = 4{,}6$ s, se tiene

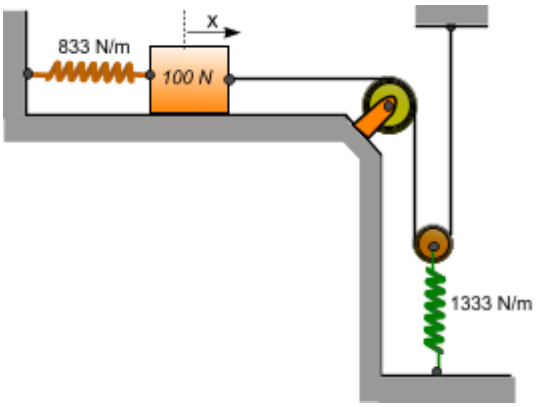
$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{m_P + m_x}{4k}}$$

$$4{,}6 = 2\pi\sqrt{\frac{19 + m_x}{4(12{,}33)}}$$

$$m_x = 7{,}43kg \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Rta$$

Problema 08

Un bloque que pesa *100N* se desliza por una superficie horizontal sin fricción como se muestra en la figura. Los dos resortes están sometidos a tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y exentas de rozamiento. Si se desplaza el bloque *75 mm* hacia la izquierda de su posición de equilibrio y se suelta con velocidad de *1,25 m/s* hacia la derecha cuando *t = 0*, determine: (a) La ecuación diferencial que rige el movimiento; (b) El período y la amplitud de la vibración, (c) La posición del bloque en función del tiempo

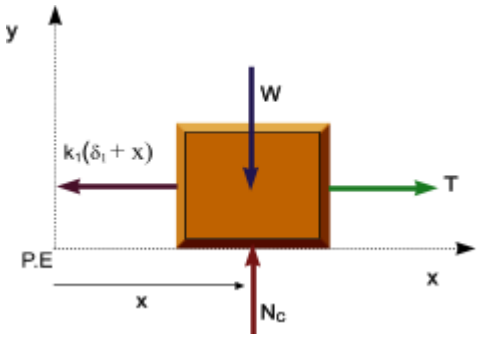


Solución

Datos e incógnitas

$$W_B = 100N; t = 0: x_o = 75mm \leftarrow; v_o = 1{,}25m/s \rightarrow$$

En la figura se muestra el DCL del bloque para una posición "x" a partir de la posición de equilibrio



Cuando el bloque esta en equilibrio estático, x = 0, entonces $F_{e0} = k_1\delta_s$ y $T = T_0$

$$\sum F_x = 0$$

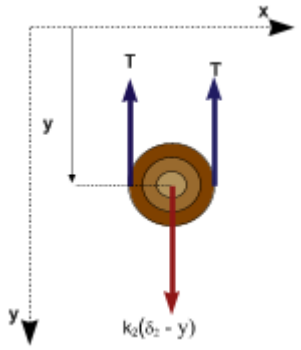
$$T_0 - k_1\delta_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Cuando el bloque está en movimiento, la segunda ley de Newton, establece

$$\sum F_x = m\ddot{X}$$

$$T - k_1(\delta_1 + X) = \frac{W}{g}\ddot{X} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

En la figura se muestra el DCL de la polea móvil para una posición Y a partir de la posición de equilibrio estático



Cuando la polea está en equilibrio, Y = 0 entonces $F_{e2} = k_2\delta_2$ y $T = T_0$, entonces

$$\sum F_y = 0$$
$$k_2(\delta_2 + Y) - 2T_0 = 0$$
$$k_2\delta_2 - 2T_0 = 0 \quad \ldots\ldots(3)$$

Cuando la polea se está moviendo hacia abajo, se tiene

$$\sum F_y = m_P a_{Py}$$
$$k_2(\delta_2 - Y) - 2T = 0$$
$$k_2\delta_2 - k_2Y - 2T = 0 \quad \ldots\ldots(4)$$

Remplazando la ecuación (1) en (3), resulta

$$k_2\delta_2 - 2k_1\delta_1 = 0 \quad \ldots\ldots(5)$$

Remplazando la ecuación (4) en (2), resulta

$$\frac{k_2}{2}(\delta_2 - Y) - k_1(\delta_1 + X) = \frac{W}{g}\ddot{X}$$
$$\frac{k_2\delta_2}{2} - \frac{k_2}{2}Y - k_1\delta_1 - k_1X = \frac{W}{g}\ddot{X} \quad \ldots\ldots(6)$$

Sustituyendo la ecuación (5) en (6), resulta

$$\frac{W}{g}\ddot{X} + k_1X + \frac{k_2}{2}Y = 0 \quad \ldots\ldots(7)$$

De la geometría de la figura se tiene

$$Y = \frac{X}{2} \quad \ldots\ldots(8)$$

Remplazando la ecuación (8) en la ecuación (7), tenemos

$$\frac{W}{g}\ddot{X} + k_1X + \frac{k_2}{2}\left(\frac{X}{2}\right) = 0$$
$$\frac{W}{g}\ddot{X} + \left(k_1 + \frac{k_2}{4}\right)X = 0$$

$$\frac{100}{9,8}\ddot{X} + \left(833 + \frac{1333}{4}\right)X = 0$$
$$\ddot{X} + 114,3X = 0 \quad \ldots\ldots(9)$$

El período de la vibración resultante, será

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{114,3}$$
$$T = 0,59seg \quad \ldots\ldots Rta.$$

La frecuencia de vibración es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,59} = 1,7Hz \quad \ldots\ldots Rta.$$

La posición y la velocidad en función del tiempo están dadas por las ecuaciones

$$X = ASen(10,7t + \varphi) \quad \ldots\ldots(10)$$
$$\dot{X} = 10,7ACos(10,7t + \varphi) \quad \ldots\ldots(11)$$

Aplicando las condiciones iníciales, se tiene

$$-0,075 = ASen\varphi \quad \ldots\ldots(12)$$
$$1,25 = 10,7ACos\varphi \quad \ldots\ldots(13)$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores, resulta

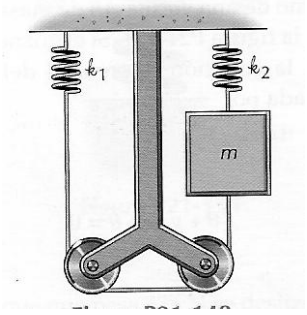
$$A = 0,138m$$
$$Tg\varphi = -0,642$$

Por lo tanto la posición en función del tiempo está dada por la ecuación

$$X = 0,138Sen(10,7t + \varphi) \quad \ldots\ldots Rta.$$

Problema 09.

Cuando el sistema representado en la figura está en equilibrio, el resorte 1 (k_1 *=1,2 kN/m*) está alargado *50 mm* y el resorte 2 (k_2 *=1,8 kN/m*) lo está *10 mm.* Si se tira de la masa *m* hacia abajo una distancia δ y se suelta a partir del reposo, determinar: (a) la ecuación diferencial que rige el movimiento, (b) La distancia δ_{max} tal que los hilos se hallen siempre a tensión, (c) La frecuencia y la amplitud de la vibración resultante y (d) La posición de la masa en función del tiempo



Solución

Datos e incógnitas

$$k_1 = 1200N/m;..\delta_1 = 50mm;..k_2 = 1800N/m;$$
$$\delta_2 = 90mm;..Ec.Dif. = ?;..\delta_{max} = ?;..f = ?;..Y = f(t)$$

En la figura se muestra el DCL del bloque en posición de equilibrio



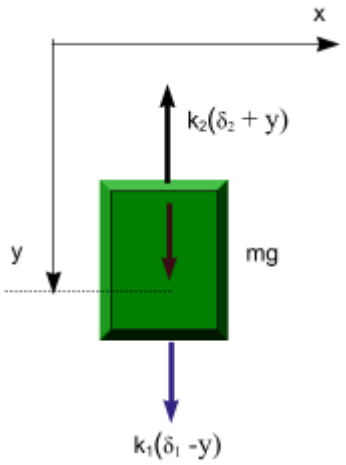
Aplicando las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$\sum F_y = 0$$
$$F_{e2}^0 = F_{e1}^0 + mg$$
$$k_2\delta_2 = k_1\delta_1 + mg.....(1)$$

Remplazando valores, se tiene

$$1800(0,09) = 1200(0,05) + 9,8(m)$$
$$m = 10,41kg.....(2)$$

En la figura se muestra el DCL del bloque en una posición arbitraria Y, a partir de la posición de equilibrio



Aplicando la segunda ley de Newton en dirección vertical, resulta

$$\sum F_y = m\ddot{Y}$$
$$mg + F_{e1} - F_{e2} = m\ddot{Y}$$
$$mg + k_1(\delta_1 - Y) - k_2(\delta_2 + Y) = m\ddot{Y}....(3)$$

Remplazando la ecuación (1) y (2) en (3), resulta

$$m\ddot{Y} + (k_1 + k_2) = 0$$
$$14,1\ddot{Y} + 3000Y = 0$$
$$\ddot{Y} + 288,2Y = 0.....(4)$$

Debido a que el resorte 1 está estirado 50 mm, entonces para que los dos resortes actúen siempre a tensión, la distancia máxima, será

$$\delta_{max} = 50mm.....(5)$$

Cálculo de la frecuencia natural. De la ecuación (4), se tiene

$$\omega = 2\pi.f = \sqrt{288,2}$$
$$f = 2,7Hz.....(6)$$

La posición en función del tiempo tiene la forma

$$Y = ASen(\omega.t + \varphi).....(7)$$

La velocidad instantánea es

$$\dot{Y} = 16,98ACos(16,98t + \varphi).....(8)$$

Remplazando las condiciones iníciales, se tiene

$$50mm = ASen\varphi.....(9)$$
$$0 = ACos\varphi.....(10)$$

Resolviendo simultáneamente se tiene

$$A = 50mm$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

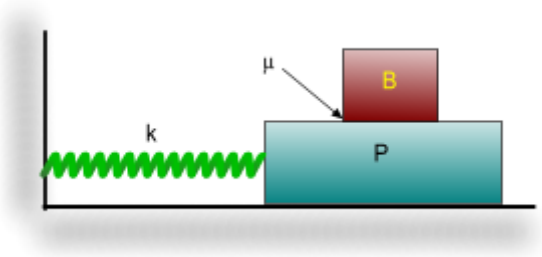
La posición del cuerpo en cualquier tiempo es

$$Y = 50Sen(16,98t + \pi/2).....Rta.$$

Problema 11.

Una placa plana *P* realiza un movimiento armónico simple horizontal sobre una superficie sin fricción con una frecuencia *f = 1,5 Hz*. Un bloque B descansa sobre la placa, como se muestra en la figura, y el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la placa es μ_s *=0,60*. ¿Cuál es la máxima amplitud de oscilación que puede tener el sistema

sin que resbale el bloque sobre la placa?. ¿Cuál es el valor de la velocidad máxima?.

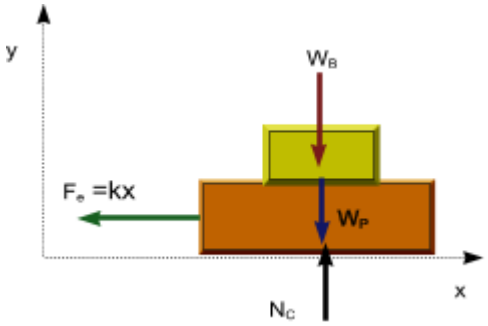


Solución

Datos e incógnitas

$$f = 1{,}5Hz;..\mu_s = 0{,}60;..A = ??;..v_{\max} = ??$$

En la figura se muestra el DCL del sistema compuesto por el bloque más la placa en una posición arbitraria X.



Aplicando las ecuaciones

$$\sum F_x = m_s \ddot{X}$$
$$-F_e = (m_B + m_P)\ddot{X}$$
$$-kX = (m_B + m_P)\ddot{X}$$

Ordenando la ecuación anterior

$$\ddot{X} + \frac{k}{m_B + m_P} X = 0 \quad \ldots\ldots(1)$$

La frecuencia circular natural es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_B + m_P}} = 2\pi . f = 2\pi(1{,}5HZ)$$
$$\omega = 3\pi . rad/s \quad \ldots\ldots(2)$$

La solución de la ecuación diferencial (1) es de la forma

$$X = ASen(3\pi . t + \varphi) \quad \ldots\ldots(3)$$

La velocidad en cualquier tiempo será

$$\dot{X} = 3\pi . ACos(3\pi . t + \varphi) \quad \ldots\ldots(4)$$

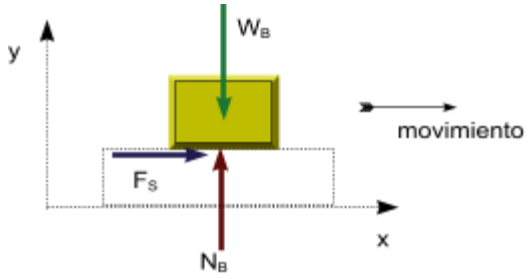
Su aceleración está dada por la ecuación

$$\ddot{X} = -9\pi^2 ASen(3\pi . t + \varphi) \quad \ldots\ldots(5)$$

La aceleración máxima esta dado por

$$\ddot{X} = 3\pi^2 A \quad \ldots\ldots(6)$$

Ahora se analiza el movimiento del bloque B. Según condición del problema el bloque B no debe moverse respecto a la plataforma. Por lo tanto su diagrama cinético es el que se muestra



Aplicando las ecuaciones de movimiento al DCL se tiene

$$\sum F_y = 0$$
$$N_{B/P} = m_B g \quad \ldots\ldots(7)$$
$$\sum F_x = m\ddot{X}$$
$$F_s = m_B \ddot{X}$$
$$\mu_s N_{B/P} = m_B \ddot{X} \quad \ldots\ldots(8)$$
$$\mu_s m_B g = m_B \ddot{X}$$
$$\ddot{X} = \mu_s g \quad \ldots\ldots(9)$$

Como el bloque no debe moverse respecto de la plataforma, entonces

$$\ddot{X}_{\max} = \omega^2 A = \mu_s g$$
$$A_{\max} = \frac{\mu_S g}{\omega^2} = \frac{0{,}6(9{,}8)}{9\pi^2}$$
$$A_{\max} = 0{,}066m \quad \ldots\ldots Rta.$$

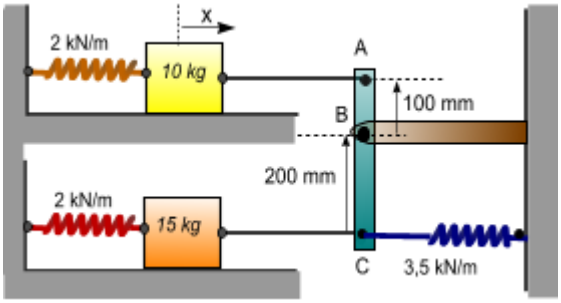
La velocidad máxima del sistema será

$$v_{\max} = \omega A = 0{,}066(3\pi)$$
$$v_{\max} = 0{,}62m/s \quad \ldots\ldots Rta.$$

Problema 12

Las dos masas de la figura se deslizan por sendas superficies horizontales exentas de fricción. La barra *ABC* está en posición vertical en el equilibrio

y su masa es despreciable. Si los resortes están sometidos a tracción en todo momento, escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición *X(t)* de la masa de *10 kg* y determinar la frecuencia y el período de la vibración resultante. (Supóngase oscilaciones de pequeñas amplitudes).

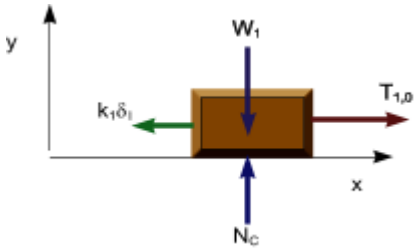


Solución

Datos e incógnitas

$$m_1 = 10kg;..m_2 = 15kg;..m_{ABC} = 0;..k_1 = 2000N/m$$
$$k_2 = 2000N/m;..k_3 = 3500N/m;..Ec.Dif. = ??;$$
$$T = ??;..f = ??.$$

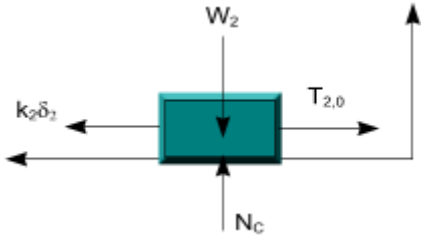
En la figura se muestra el DCL de m_1 en la posición de equilibrio estático



Aplicando la ecuación de equilibrio en la dirección horizontal, se tiene

$$\sum F_x = 0$$
$$T_{01} = k_1\delta_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

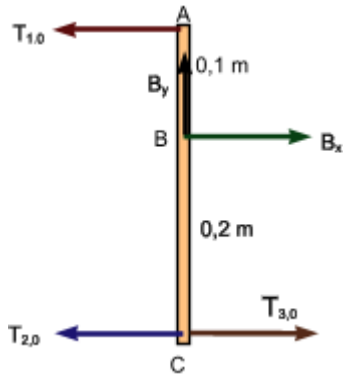
En la figura se muestra el DCL de m_2 en la posición de equilibrio estático



Aplicando las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$\sum F_x = 0$$
$$T_{02} = k_2\delta_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

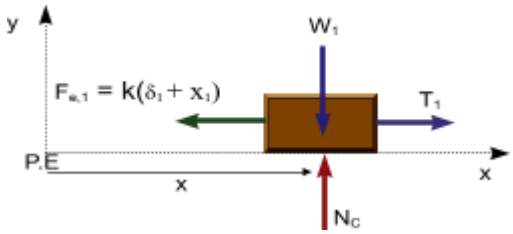
En la figura se muestra el DCL de la barra ABC en la posición de equilibrio



Aplicando la segunda condición de equilibrio, se tiene

$$\sum M_B = 0$$
$$T_{01}(0,1m) + T_{03}(0,2m) = T_{02}(0,2m)$$
$$0,1k_1\delta_1 + 0,2k_3\delta_3 = 0,2k_2\delta_2 \ldots\ldots\ldots(3)$$

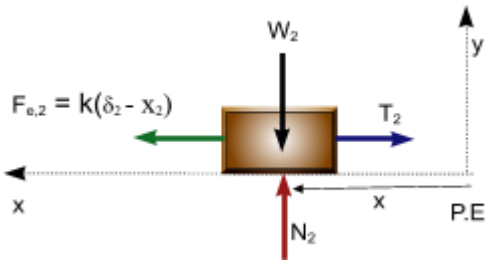
En la figura se muestra el DCL de m_1 en una posición arbitraria X a partir de la posición de equilibrio



Aplicando las ecuaciones de movimiento, tenemos

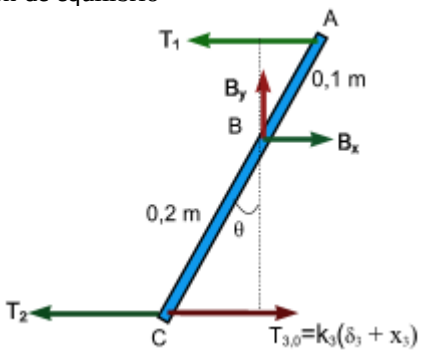
$$\sum F_x = m_1 a_{1x}$$
$$T_1 - k_1(\delta + X) = m_1\ddot{X}$$
$$T_1 = m_1\ddot{X} + k_1(\delta_1 + X) \ldots\ldots\ldots(4)$$

En la figura se muestra el DCL de m_2 en una posición arbitraria X a partir de la posición de equilibrio



$$\sum F_x = m_2 a_{2x}$$
$$k_2(\delta_2 - X_2) = m_2 \ddot{X}_2$$
$$T_2 = k_2(\delta_2 - X_2) - m_2 \ddot{X}_2 \text{.....(5)}$$

En la figura se muestra el DCL de la barra ABC, cuando se ha girado un ángulo θ a partir de la posición de equilibrio



Aplicando las ecuaciones de movimiento a la barra ABC, se tiene

$$\sum M_B = I_B \alpha$$
$$-T_1(0{,}1Cos\theta) - T(0{,}2Cos\theta) + T_2(0{,}2Cos\theta) = 0(\alpha)$$

Para ángulos pequeños, Cosθ ≈ 1; y Senθ ≈ 0, entonces la ecuación anterior se escribe

$$0{,}1T_1 + 0{,}2T_3 = 0{,}2T_2 \text{.....(6)}$$

Remplazando la ec.(4) y(5) en (6), resulta

$$\left[m_1\ddot{X} + k_1(\delta_1 + X)\right] + 2k_3(\delta_3 + X_2) = 2\left[k_2(\delta_2 - X_2) - m_2 X_2\right] \text{..(7)}$$

Remplazando la ec.(3) en (7), resulta

$$m_1\ddot{X} + k_1 X + 2k_3 X_2 = -2k_2 X_2 - 2m_2 \ddot{X}_2 \text{.....(8)}$$

Del gráfico por triángulos semejantes, se observa que

$$\frac{X_2}{0{,}2} = \frac{X}{0{,}1}$$
$$X_2 = 2X \text{.....(9)}$$

Remplazando la ec.(9) en (8), se tiene

$$m_1\ddot{X} + k_1 X + 2k_3(2X) + 2k_2(2X) + 2m_2(2\ddot{X}) = 0$$
$$(m_1 + 4m_2)\ddot{X} + (k_1 + 4k_2 + 4k_3)X = 0$$
$$(10 + 60)\ddot{X} + (2000 + 14000 + 8000)X = 0$$
$$\ddot{X} + 342{,}86X = 0 \text{.....(10)}$$

La ecuación (10) es la ecuación diferencial de un MAS, con frecuencia circular

$$\omega = \sqrt{342{,}86} \Rightarrow \omega = 18{,}52 rad/s$$

La frecuencia natural será

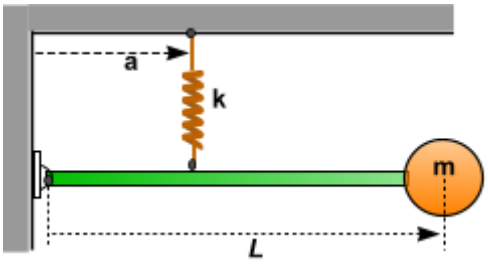
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{18{,}52}{2\pi} \Rightarrow f = 2{,}95Hz \text{.....Rta.}$$

El período de la vibración es

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2{,}95} \Rightarrow T = 0{,}34seg \text{.....Rta.}$$

Problema 13

Encuentre la ecuación diferencial del movimiento y el período de vibración del sistema mostrado en la figura. Desprecie la masa de la barra rígida a la cual está unida la esfera (partícula).

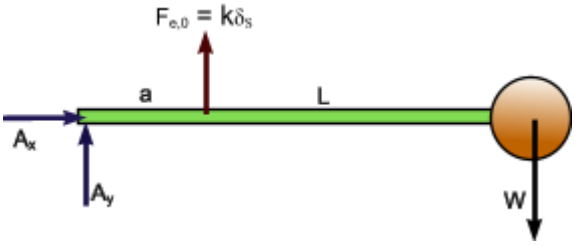


Solución

Datos e incógnitas

"a"; "L"; "m"; "g"; Ec. Dif. =??; T=??

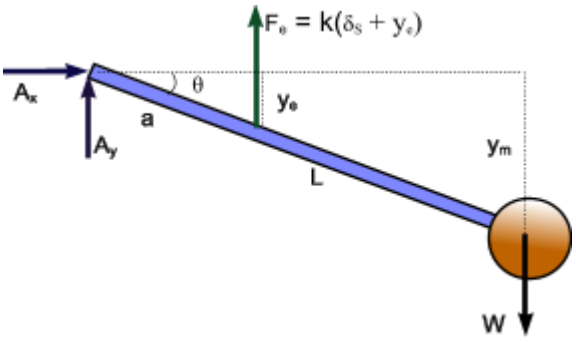
En la figura se muestra el DCL del sistema compuesto por la barra más la esfera en la posición de equilibrio estático.



Aplicando la segunda condición de equilibrio, se tiene

$$\sum M_A = 0$$
$$K\delta_s(a) = mg(L).....(1)$$

En la figura se muestra el DCL del sistema para una posición angular θ en sentido horario



Aplicando la ecuación de movimiento de rotación al sistema, se tiene

$$\sum M_A = I_A\alpha$$
$$mgLCos\theta - K(\delta_s + Y)(a.Cos\theta) = mL^2\ddot{\theta}.....(2)$$

Para ángulos pequeños Cosθ ≈ 1; y Senθ ≈ 0, entonces la ecuación (2), se escribe

$$mgL - K\delta_s a - K.a.Y_e = mL^2\ddot{\theta}.....(3)$$

Remplazando la ec.(1) en la ec. (3), resulta

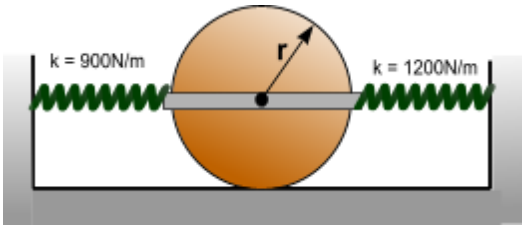
$$mL^2\ddot{\theta} + K.a^2\theta = 0$$
$$\ddot{\theta} + \frac{K.a^2}{mL^2}\theta = 0.....(4)$$

La ec. (4) es la ecuación diferencial de un MAS, con frecuencia circular

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K.a^2}{mL^2}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$T = \frac{2\pi.L}{a}\sqrt{\frac{m}{K}}.....Rta.$$

Problema 14

La esfera maciza y homogénea de *10 kg* mostrada en la figura gira sin deslizar cuando se desplaza a partir de su posición de equilibrio. La tensión inicial de cada resorte es *250 N/m* y las constantes elásticas son K_1 *=900 N/m* y K_2 *=1200 N/m*. Para iniciar el movimiento se desplaza el centro de la esfera *75 mm* hacia la derecha y se suelta a partir del reposo. Calcular la frecuencia del movimiento resultante y la rapidez máxima del centro de masa de la esfera.

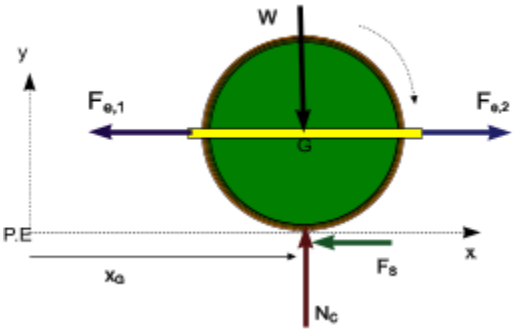


Solución

Datos e incógnitas

$$m = 10kg;..F_{e0} = 250N;..K_1 = 900KN/m;$$
$$K_2 = 1200N/m;..f = ??;..\dot{X}_{max} = ??$$

En la figura se muestra el DCL de la esfera cuando su centro está desplazado una distancia X_G a partir de su posición de equilibrio.



Aplicando las ecuaciones de movimiento, se tiene

$$\sum F_x = m\ddot{X}_G$$
$$F_{e2} - F_{e1} - F_s = m\ddot{X}_G$$
$$(F_{e0} - K_2X_G) - (F_{e0} + K_1X_G) - F_s = m\ddot{X}_G$$
$$m\ddot{X}_G + (K_1 + K_2)X_G + F_s = 0.....(1)$$

$$\sum M_G = I_G\alpha$$
$$F_s(R) = \frac{2}{5}mR^2\ddot{\theta}$$
$$F_s = \frac{2}{5}mR\ddot{\theta}.....(2)$$

Remplazando la ec.(2) en (1), resulta

$$m\ddot{X}_G + (K_1 + K_2)X_G + \frac{2}{5}mR\ddot{\theta} = 0.....(3)$$

Para el caso en el cual la esfera rueda sin deslizar la fuerza de fricción es estática, entonces existe una

relación entre la aceleración lineal y la aceleración angular, esto es

$$\ddot{X}_G = R\ddot{\theta}.....(4)$$

Remplazando la ec, (4) en (3), resulta

$$m\ddot{X}_G + (K_1 + K_2)X_G + \frac{2}{5}m\ddot{X}_G = 0$$

$$\ddot{X}_G + \frac{5(K_1 + K_2)}{7.m}X_G = 0$$

$$\ddot{X}_G + \frac{5(900+1200)}{7(10)}X_G = 0$$

$$\ddot{X}_G + 150X_G = 0....(5)$$

La ec.(5) constituye la ecuación diferencial de un MAS de frecuencia circular dada por

$$\omega_n = \sqrt{150} = 12{,}25 rad/s$$

La frecuencia de vibración será

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{12{,}25}{2\pi}$$

$$f = 1{,}95 Hz.....Rta.$$

La solución de la ecuación diferencial (5), es de la forma

$$X_G = ASen(12{,}25t + \varphi).....(6)$$

La velocidad del centro de masa de la esfera es

$$\dot{X}_G = 12{,}25ACos(12{,}25t + \varphi).....(7)$$

Remplazando las condiciones iníciales, se tiene

$$0{,}075m = A.Sen\varphi$$

$$0 = 12{,}25A.Cos\varphi$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones anteriores, se tiene

$$A = 75mm$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Entonces la velocidad y la aceleración del centro de masa de la esfera son:

$$X_G = 75Sen\left(12{,}25t + \frac{\pi}{2}\right)mm$$

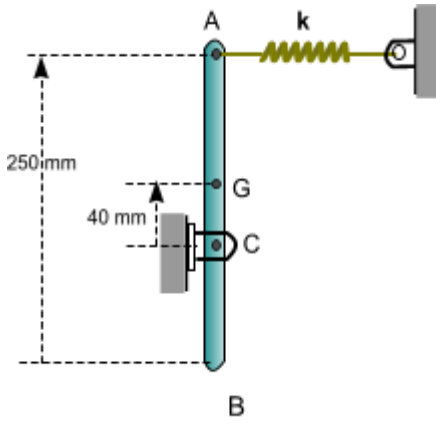
$$\dot{X}_G = 0{,}918Cos\left(12{,}25t + \frac{\pi}{2}\right)m/s$$

La velocidad máxima será

$$\dot{X}_{max} = 0{,}92 m/s.....Rta.$$

Problema 15

La barra uniforme *AB* de *8 kg* está articulada en C y sujeta en A a un resorte de constante *K = 500N/m*. Si el extremo A recibe un pequeño desplazamiento y se suelta, hallar: (a) La frecuencia de las pequeñas oscilaciones, (b) El mínimo valor de la constante K del resorte para el que habrá oscilaciones.

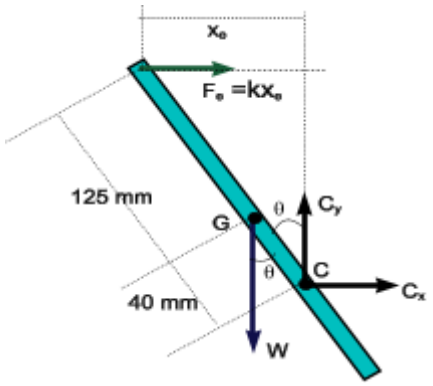


Solución

Datos e incógnitas

$$m = 8kg; K = 500N/m;\ f = ??;..K_{min} = ??$$

En la figura se muestra el DCL de la varilla en una posición definida por un ángulo θ, a partir de la posición de equilibrio.



Aplicando las ecuaciones de movimiento de rotación a la varilla se tiene

$$\sum M_C = I_C\alpha)$$

$$mg(0.04Sen\theta) - KX_e(0{,}165\cos\theta) = I_C\alpha$$

$$mg(0{,}04Sen\theta) - K(0{,}165^2\, Sen\theta Cos\theta = I_C\alpha.....(1)$$

Para ángulos pequeños Cosθ ≈ 1; y Senθ ≈ 0, entonces la ecuación (1), se escribe

$$0{,}04mg\theta - 0{,}165^2 K\theta = I\ \ddot{\theta}.....(2)$$

El momento de inercia con respecto al punto C, es

$$I = 0{,}55kg.m^2$$

Donde la ecuación (3) en (2), resulta

$$0{,}04mg\theta - 0{,}165^2 K\theta = 0{,}055\ddot{\theta}$$

$$0{,}055\ddot{\theta} + (0{,}165^2 K - 0{,}04mg)\theta = 0....(4)$$

La ec. (4) constituye la ec. Diferencial de un MAS de frecuencia circular

$$\omega_n = 2\pi.f = \sqrt{\frac{0{,}165^2 K - 0{,}04mg}{0{,}055}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0{,}165^2 K - 0{,}04mg}{0{,}055}}.....(4)$$

Remplazando valores se tiene

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0{,}165^2(500) - 0{,}04(8)(9{,}8)}{0{,}055}}$$

$$f = 2{,}22Hz.....Rta$$

El mínimo valor de K, será aquel valor para el cual siempre se mantenga positiva la raíz cuadrada de la ecuación(4), esto es

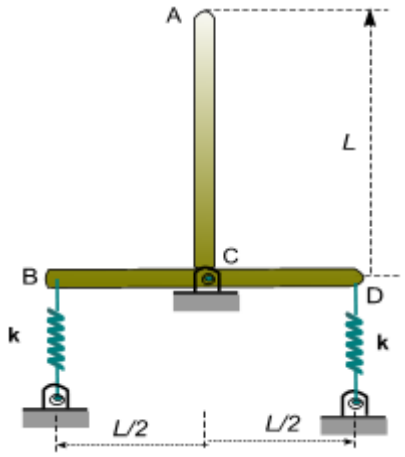
$$0{,}165^2 K = 0.04mg$$

$$= 0{,}04(8)(9{,}8)$$

$$K_{\min} = 115{,}3N/m.....Rta.$$

Problema 16

Dos barras uniformes cada una de masa *m =12 kg* y longitud *L = 800 mm*, están soldadas formando el conjunto que se muestra. Sabiendo que la constante de cada resorte *K = 500N/m* y que el extremo A recibe un pequeño desplazamiento y luego se suelta, determine la frecuencia del movimiento subsiguiente.



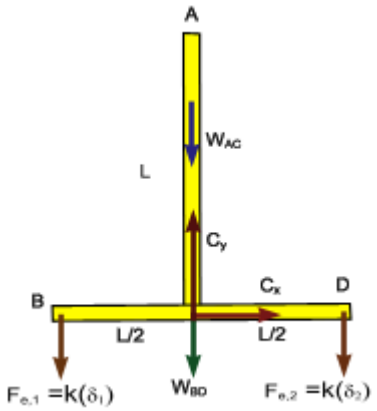
Solución

Datos e incógnitas

$$m_{Ac} = 12kg;..M_{BD} = 12kg;..K_1 = K_2 = 500N/m$$

$$L = 0{,}8m;..f = ??$$

En la figura se muestra el DCL del sistema compuesto por las dos varillas en la posición de equilibrio estático, asumiendo que los dos resortes están estirados



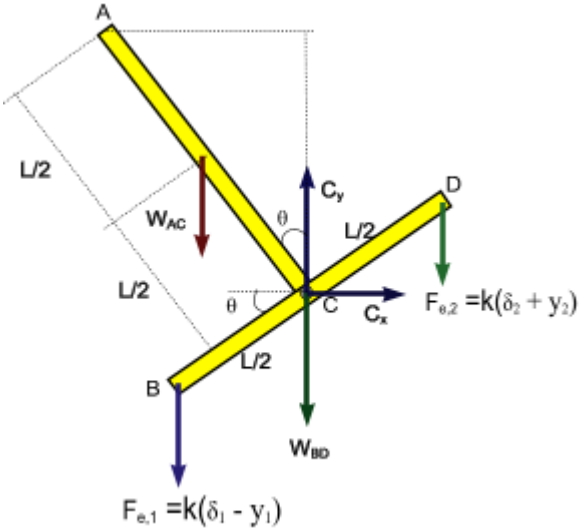
Aplicando las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$\sum M_C = 0$$

$$F_{e1}^0(\frac{L}{2}) = F_{e2}^0(\frac{L}{2})$$

$$K_1\delta_1 = K_2\delta_2.....(1)$$

En la figura se muestra el DCL de las barras cuando se ha girado un ángulo θ respecto a la posición de equilibrio



Aplicando las ecuaciones de movimiento de rotación al sistema se tiene

$$\sum M_c = I_c\alpha$$

$$m_{AC}g(\frac{L}{2}Sen\theta)+\left[K_1(\delta_1-Y_1)-K_2(\delta_2+Y_2)\right](\frac{L}{2}Cos\theta)=I_C\alpha...(2)$$

Para ángulos pequeños Cosθ ≈ 1; y Senθ ≈ 0, entonces la ecuación (1), se escribe

$$m_{AC}g(\frac{L}{2}\theta)+\left[K_1(\delta_1-Y_1)-K_2(\delta_2+Y_2)\right](\frac{L}{2})=I_C\alpha...(3)$$

Remplazando la ec. (1) en (3), resulta

$$m_{AC}g(\frac{L}{2})\theta+\left[(K_1+K_2)(Y_1)\right](\frac{L}{2})=I_C\alpha.....(4)$$

Reordenando la ecuación anterior se tiene

$$I_C\ddot{\theta}+\left[(K_1+K_2)\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\theta-m_{AC}g\left(\frac{L}{2}\right)\theta=0.....(5)$$

El momento de inercia del sistema respecto del punto C será

$$\begin{aligned}I_C&=(I_C)_{AC}+(I_C)_{BD}\\&=\frac{1}{3}m_{AC}L_{AC}^2+\frac{1}{12}m_{BD}L_{BD}^2\\&=\frac{1}{3}(12)(0,8)^2+\frac{1}{12}(12)(0,8)^2\\I_C&=3,2kg.m^2.....(6)\end{aligned}$$

Remplazando la ec (6) en la ec,(5), se tiene

$$3,2\ddot{\theta}+\left[(500+500)\left(\frac{0,8}{2}\right)^2\right]\theta-12(9,8)\left(\frac{0,8}{2}\right)\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+35,3=0.....(7).$$

La frecuencia circular está dado por

$$\omega_n=2\pi.f=\sqrt{35,3}=5,94rad/s$$

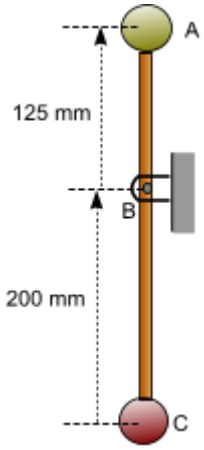
La frecuencia de vibración será

$$f=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{5,94}{2\pi}$$

$$f=0,95Hz.....Rta.$$

Problema 17

Una esfera A de *400 g* y una esfera C de *280 g* están unidas a los extremos de una varilla rígida de masa despreciable que puede girar en un plano vertical alrededor de un eje que pasa por B. Hallar el período de las pequeñas oscilaciones de la varilla.

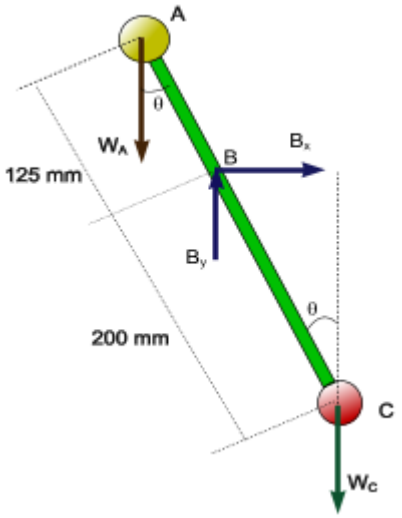


Solución

Datos e incógnitas

$$m_A=0,4kg;..m_C=0,28kg;..m_{AC}=0;..T=??$$

En la figura se muestra el DCL del sistema para una posición θ a partir de la posición de equilibrio.



La ecuación se movimiento de rotación para el sistema nos da

$$\sum M_B = I_B\alpha$$
$$m_A g(0{,}125Sen\theta) - m_C g(0{,}2Sen\theta) = I_B\alpha \ldots\ldots\ldots(1)$$

Para ángulos pequeños Cosθ ≈ 1; y Senθ ≈ 0, entonces la ecuación (1), se escribe

$$m_A g(0{,}125)\theta - m_C g(0{,}2)\theta = I_B\alpha \ldots\ldots\ldots(2)$$

El momento de inercia respecto al punto B, será

$$I_B = (I_C)_A + (I_B)_C + (I_B)_{varilla}$$
$$= m_A(0{,}125)^2 + m_C(0{,}2)^2 + 0$$
$$= 0{,}4(0{,}125)^2 + 0{,}28(0{,}2)^2$$
$$I_B = 0{,}0175kg.m^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Al sustituir la ec.(3) en (2) resulta

$$0{,}4(9{,}8)(0{,}125)\theta - 0{,}28(9{,}8)(0{,}2)\theta = 0{,}0175\ddot{\theta} \ldots\ldots(4)$$
$$0{,}0175\ddot{\theta} + 0{,}0588\theta = 0$$
$$\ddot{\theta} + 3{,}36\theta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

La frecuencia circular será

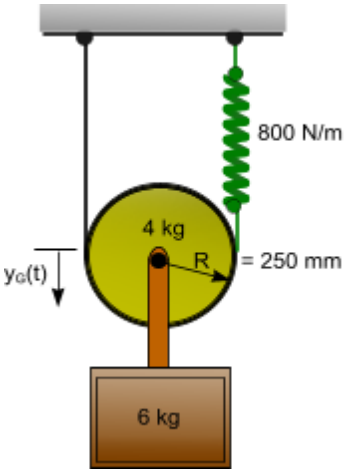
$$\omega_n = \sqrt{3{,}36} = 1{,}833rad/s$$

El período de la vibración resultante será

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1{,}833}$$
$$T = 3{,}43seg \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Rta$$

Problema 18

Un peso de *6 kg* pende de un cilindro de *4 kg* como se muestra en la figura, mediante un pasador sin fricción que pasa por su centro. Escriba la ecuación diferencial del movimiento para la posición $Y_G(t)$ del centro de masa del cilindro y determine el período y la frecuencia del movimiento vibratorio resultante

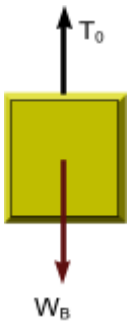


Solución

Datos e incógnitas

$$m_B = 6kg;\ldots m_C = 4kg;\ldots R = 0{,}25m;\ldots K = 800N/m$$
$$Ec.Dif = ??;\ldots f = ??;\ldots T = ??$$

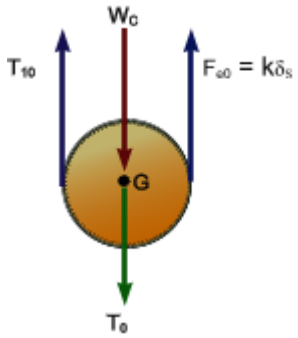
En la figura se muestra el DCL del bloque en posición de equilibrio estático



La ecuación de equilibrio nos da

$$\sum F_y = 0$$
$$T_0 = m_B g = 6(9{,}81)$$
$$T_0 = 58{,}86N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

En la figura se muestra el DCL del cilindro en posición de equilibrio estático



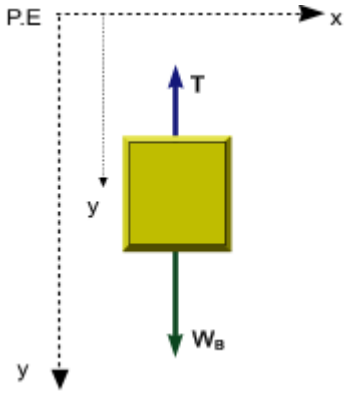
Aplicando las ecuaciones de equilibrio tenemos

$$\sum F_Y = 0$$
$$T_{10} + K\delta_s = W_C + T_0$$
$$T_{10} + K\delta_s = 4(9{,}81) + 58{,}86$$
$$T_{10} + K\delta_s = 98{,}1N \quad \ldots\ldots(2)$$
$$\sum M_G = 0$$
$$K\delta_s(R) = T_{10}(R)$$
$$T_{10} = K\delta_s \quad \ldots\ldots(3)$$

Reemplazando la ec. (3) en (2) resulta

$$K\delta_s + K\delta_s = 98{,}1$$
$$2K\delta_s = 98{,}1 \quad \ldots\ldots(4)$$

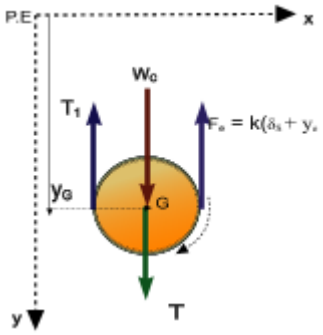
En la figura se muestra el DCL del bloque cuando se ha desplazado una distancia Y a partir de su posición de equilibrio



Aplicando las ecuaciones de movimiento para el bloque, se tiene

$$\sum F_Y = m_B a_{By}$$
$$58{,}86 - T = 6\ddot{Y}_G \quad \ldots\ldots(5)$$

En la figura se muestra el DCL del cilindro en movimiento



Aplicando las ecuaciones de movimiento se tiene

$$\sum F_y = m_C a_{Gy}$$
$$T + m_C g - F_e - T_1 = m_C \ddot{Y}_G$$
$$T + 39{,}4 - K(\delta_s + Y_e) - T_1 = 4\ddot{Y}_G \quad \ldots\ldots(6)$$

$$\sum M_G = I_G \alpha$$
$$T_1(R) - F_e(R) = \frac{1}{2} m_C R^2 \ddot{\theta}$$
$$T_1 - K(\delta_s + Y_e) = \frac{1}{2} m_C R\ddot{\theta} \quad \ldots\ldots(7)$$

Sumando las ec. (5) y (6), se tiene

$$98{,}1 - K(\delta_s + Y_e) - T_1 = 10\ddot{Y}_G \quad \ldots\ldots(8)$$

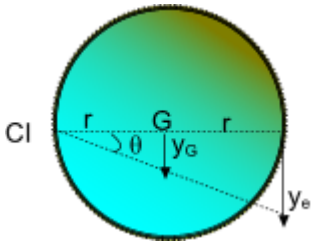
Sumando las ec (7) y (8), resulta

$$98{,}1 - 2K(\delta_s + Y_e) = 10\ddot{Y}_G + \frac{1}{2} m_C R\ddot{\theta} \ldots(9)$$

Remplazando la ec.(4) en (9), resulta

$$10\ddot{Y}_G + \frac{1}{2}(4)(0.25)\ddot{\theta} + 2KY_e = 0$$
$$10\ddot{Y}_G + 0{,}5\ddot{\theta} + 1600Y_e = 0 \quad \ldots\ldots(10)$$

De la cinemática de los desplazamientos se tiene



$$Y_G = R\theta$$

$$\dot{Y}_G = R\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{Y}_G}{0,25} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Además

$$\frac{Y_G}{R} = \frac{Y_e}{2R} \Rightarrow Y_e = 2Y_G \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Remplazando las ec.(11) y(12),en la ec.(10), resulta

$$10\ddot{Y}_G + 0,5\left(\frac{\dot{Y}_G}{0,25}\right) + 1600\left(2Y_G\right) = 0$$

$$12\ddot{Y}_G + 3200Y_G = 0 \ldots\ldots Rta.$$

La ecuación anterior constituye la ecuación diferencial de un MAS con frecuencia circular

$$\omega_n = 2\pi.f = \sqrt{266,67} = 16,33 rad/s$$

La frecuencia de vibración es

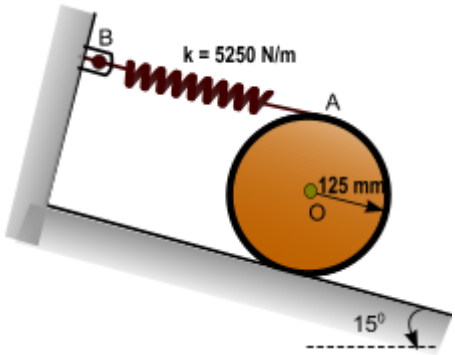
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{16,33}{2\pi} \Rightarrow f = 2,6Hz \ldots\ldots\ldots Rta.$$

El período

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2,6} \Rightarrow T = 0,38seg \ldots\ldots\ldots\ldots Rta$$

Problema 19

Un cilindro uniforme de *13,6 kg* puede rodar sin deslizar por un plano inclinado *15º*. A su perímetro está sujeta una correa y un muelle lo mantiene en equilibrio como se muestra. Si el cilindro se desplaza hacia abajo *50 mm* y se suelta. Determinar: (a) El período de la vibración, (b) La aceleración máxima del centro del cilindro

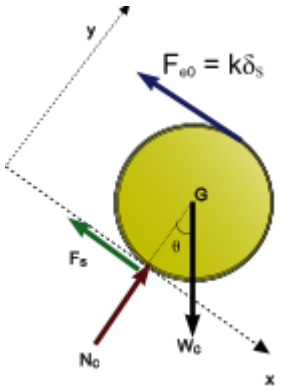


Solución

Datos e incógnitas

$$m = 13,6kg;..\theta = 15^0;..r = 0,125m;..T = ??;..a_{\max} = ??$$

En la figura se muestra el DCL del cilindro en la posición de equilibrio estático



Aplicando las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$\sum F_x = 0$$

$$mgSen15^o = F_s + F_{e0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

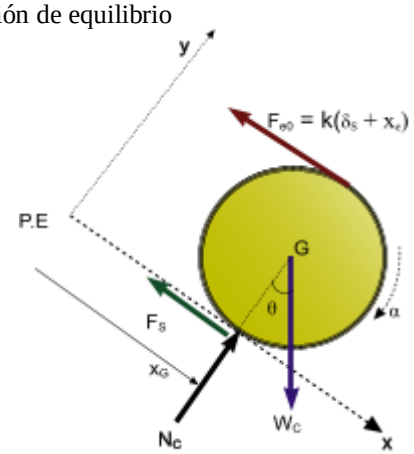
$$\sum M_G = 0$$

$$F_{e0}(r) = F_s(r) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Remplazando la ec. (1) en (2), resulta

$$mgSen15^o = 2K\delta_s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

En la figura se muestra el DCL del cilindro para un desplazamiento instantáneo X_G a partir de la posición de equilibrio



Aplicando las ecuaciones de movimiento se tiene

Traslación

$$\sum F_x = m\ddot{X}_G$$
$$mgSen15^o - F_s - F_e = m\ddot{X}_G$$
$$mgSen15^o - F_s - K(\delta_s + X_e) = m\ddot{X}_G \quad \ldots\ldots(4)$$

Rotación

$$\sum M_G = I_G\alpha$$
$$F_s(r) - F_e(r) = I_G\ddot{\theta}$$
$$F_s(r) - K(\delta_s + X_e)(r) = I_G\ddot{\theta} \quad \ldots\ldots(5)$$

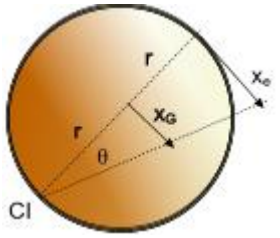
Sumando las ecuaciones (4) y (5), resulta

$$mgSen15^o - 2K\delta_s - 2KX_e = m\ddot{X}_G + \frac{1}{2}m.r.\ddot{\theta} \quad \ldots\ldots(6)$$

Remplazando la ec.(3) en (6), se tiene

$$m\ddot{X}_G + \frac{1}{2}m.r.\ddot{\theta} + 2KX_e = 0 \quad \ldots\ldots(7)$$

De la geometría y teniendo en cuenta que el centro instantáneo de rotación es el punto de contacto, resulta



$$X_G = r.\theta \Rightarrow \dot{X}_G = r.\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{X}_G}{r} \quad \ldots\ldots(8)$$

$$X_e = 2.r.\theta = 2.r\left(\frac{X_G}{r}\right) \Rightarrow X_e = 2X_G \quad \ldots(9)$$

Remplazando la ec.(8) y (9) en (7), resulta

$$m\ddot{X}_G + \frac{1}{2}m.r\left(\frac{X_G}{r}\right) + 2K(2X_G) = 0$$
$$\frac{3}{2}m\ddot{X}_G + 4KX_G = 0$$
$$\frac{3}{2}(13,6)\ddot{X}_G + 4(5250)X_G = 0$$
$$\ddot{X}_G + 1029,4X_G = 0 \quad \ldots\ldots(10)$$

La ec. (10) es la ecuación diferencial de una MAS con una frecuencia circular

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{1029,4} = 32,08 rad/s$$
$$T = 0,196 seg \quad \ldots\ldots(Rta)$$

La solución de la ecuación diferencial (10), es

$$X_G = A.Sen(32,08t + \varphi) \quad \ldots\ldots(11)$$

La velocidad y la aceleración en cualquier tiempo

$$\dot{X}_G = 32,08Cos(32,08t + \varphi) \quad \ldots\ldots(12)$$
$$\ddot{X}_G = -32,08^2 Sen(32,08t + \varphi) \quad \ldots\ldots(13)$$

Remplazando las condiciones iníciales, resulta

$$0,05 = A.Sen\varphi$$
$$0 = 32,08A.Cos\varphi$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones anteriores, se tiene

$$A = 50mm$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Remplazando estos valores obtenidos resulta

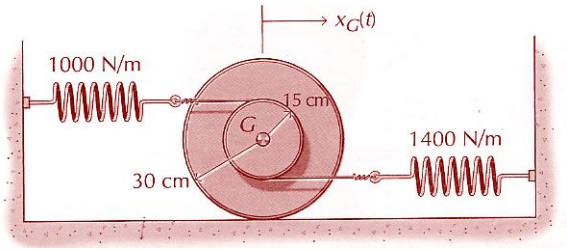
$$X_G = 50.Sen\left(32,08t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \ldots\ldots Rta.$$
$$\ddot{X}_G = -0,05(32,08)^2 Cos(32,08t + \varphi)$$

La aceleración máxima será

$$a_{max} = \pm\omega^2 A = \pm(32,08)^2(0,05)$$
$$a_{max} = \pm 51,45 m/s^2 \quad \ldots\ldots Rta$$

Problema 20

Una rueda escalonada que pesa *90 N* rueda sin deslizar por un plano horizontal, según se indica en la figura. Los resortes están unidos a hilos arrollados de manera segura sobre el cubo central de *30 cm* de diámetro. Si el radio de giro del cilindro escalonado vale *225 mm*, escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición $X_G(t)$ del centro de masa del cilindro y determinar el período y la frecuencia del movimiento vibratorio resultante.

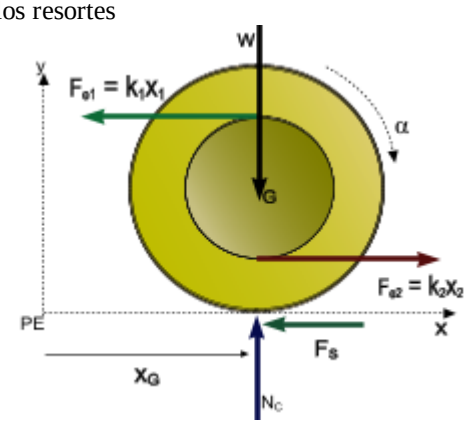


Solución

Datos e incógnitas

$$W = 90N;..R_1 = 15cm;..R_2 = 30cm;.K_G = 225mm$$
$$X_G(t) = ??;..T = ??$$

En la figura se muestra el DCL de la rueda para una posición cualquiera X. Las fuerzas que obran son: el peso (W), la reacción normal (N_C), la fuerza de fricción (F_s) y las fuerzas elásticas F_e en cada uno de los resortes



Aplicando las ecuaciones de movimiento se tiene

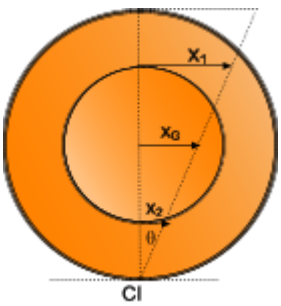
$$\sum F_x = m\ddot{X}_G$$
$$F_{e2} - F_{e1} - F_s = m\ddot{X}_G$$
$$k_2X_2 - k_1X_1 - F_s = m\ddot{X}_G \text{.....(1)}$$

$$\sum M_G = I_G\ddot{\theta}$$
$$F_s(R_2) - F_{e2}(R_1) - F_{e1}(R_1) = mK_G\ddot{\theta}$$
$$F_s - k_2X_2\left(\frac{R_1}{R_2}\right) - k_1X\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = \left(\frac{mK_G^2}{R_2}\right)\ddot{\theta} \text{.....(2)}$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2), resulta

$$k_2X_2 - k_1X_1 - k_2X_2\left(\frac{R_1}{R_2}\right) - k_1X\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = m\ddot{X}_G + \left(\frac{mK_G^2}{R_2}\right)\ddot{\theta}$$
$$k_2X_2\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) - k_1X_1\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = m\ddot{X}_G + \left(\frac{mK_G^2}{R_2}\right)\ddot{\theta} \text{.....(3)}$$

La cinemática para la rueda muestra una relación entre las deformaciones de los resortes y el desplazamiento del centro de masa de la rueda



$$X_G = R_2\theta \Rightarrow \dot{X}_G = R_2\ddot{\theta} \text{.....(4)}$$
$$X_2 = (R_2 - R_1)\theta = (R_2 - R_1)\left(\frac{X_G}{R_2}\right) \text{.....(5)}$$
$$X_1 = (R_2 + R_1)\theta = (R_2 + R_1)\left(\frac{X_G}{R_2}\right) \text{.....(6)}$$

Remplazando las ec. (4), (5) y (6) en la ec (3), resulta

$$k_2X_G\left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2}\right) - k_1X_G\left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2}\right) = m\ddot{X}_G\left[1 + \left(\frac{K_G}{R_2}\right)^2\right]$$

Remplazando valores se tiene

$$1400X_G\left(\frac{30^2 - 15^2}{30^2}\right) - 1000X_G\left(\frac{30^2 + 15^2}{30^2}\right) = 9{,}18\ddot{X}_G\left[1 + \left(\frac{22.5}{30}\right)^2\right]$$

Simplificando la ecuación anterior se tiene

$$\ddot{X}_G + 131X_G = 0 \text{.....(8)}$$

De la ecuación diferencial (8), se obtiene la frecuencia circular.

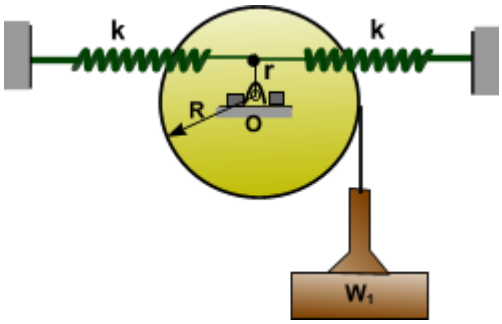
$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{131} = 11.45rad/s$$

El período de la vibración es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{11{,}45} \Rightarrow T = 0{,}55seg....Rta.$$

Problema 21

Un cilindro de masa *m* y radio *R* está conectado con muelles idénticos de constante *k* y gira sin rozamiento alrededor del punto O. Para pequeñas oscilaciones, ¿cuál será la frecuencia natural?. El cordón que soporta a W_1 está enrollado alrededor del cilindro.



Solución

Datos e incógnitas

$$\text{"m", "R","r", "k", "W}_1\text{"}, \ \omega_n = ??$$

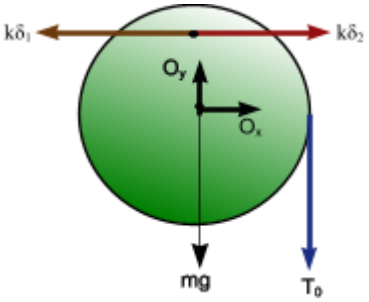
En la figura se muestra el DCL del bloque.



Aplicando las ecuaciones de equilibrio al bloque, se tiene

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \mathrm{T}_0 = Mg \qquad (1)$$

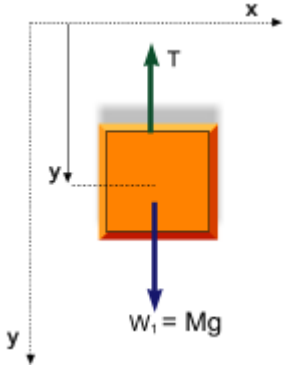
En la figura se muestra el cilindro en equilibrio estático.



Aplicando las ecuaciones de equilibrio para el cilindro

$$\sum \mathrm{M}_O = 0$$
$$-\mathrm{k}\delta_1(r) + \mathrm{k}\delta_2(r) + Mg(R) = 0 \qquad (2)$$

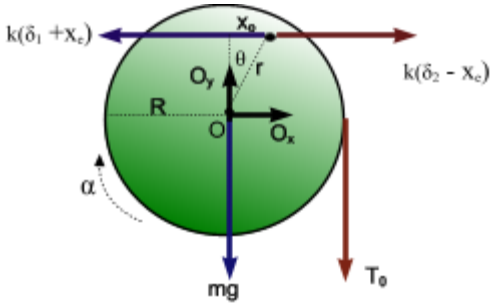
En la figura se muestra el DCL del bloque pero desplazados de su posición de equilibrio estático.



Aplicando las ecuaciones de movimiento para el bloque se tiene

$$\sum F_y = M\ddot{Y}$$
$$Mg - T = M\ddot{Y}$$
$$T = Mg - M\ddot{Y} \qquad (3)$$

En la figura se muestra el Dcl del cilindro cuando gira un ángulo θ



Aplicando las ecuaciones de movimiento al cilindro, se tiene

$$\sum M_O = I_G\alpha$$
$$T(R) + k(\delta_2 - X_e)(rCos\,\theta) - k(\delta_1 + X_e)(rCos\,\theta) = I_G\alpha$$

Para ángulos pequeños Cosθ ≈ 1; y Senθ ≈ 0, entonces la ecuación anterior, se escribe

$$\sum M_O = I_G\alpha$$
$$T(R) + k(\delta_2 - X_e)(r) - k(\delta_1 + X_e)(r) = I_G\alpha \qquad (4)$$

Remplazando la ec. (3) en (4), resulta

$$MgR - MR\ddot{Y} + k\delta_1 r - kX_e r - k\delta_2 r - kX_e r = I_o\alpha \qquad (5)$$

Al sustituir la ec (2) en (5), resulta

$$-MR\ddot{Y} + -2kX_e r = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} \qquad (6)$$

De la cinemática se tiene que

$$X_e = r\theta \quad \text{y} \quad \ddot{\mathrm{Y}} = \mathrm{R}\ddot{\theta}. \qquad (7)$$

Remplazando la ec (7) en (6), resulta

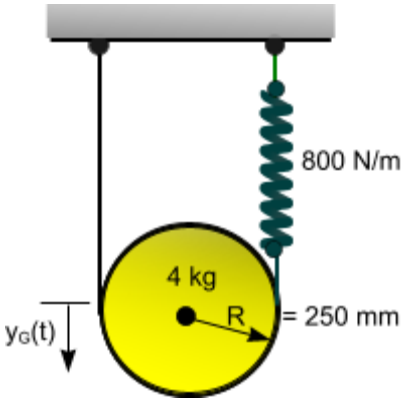
$$-MR(R\ddot{\theta}) + -2k(r\theta)r = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta}$$
$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} + MR^2\ddot{\theta} + 2kR^2\theta = 0$$
$$\ddot{\theta} + \frac{4kr^2}{(m+2M)R^2}\theta = 0 \qquad (8)$$

La ec.(8) constituye la ecuación diferencial de un MAS cuya frecuencia circular natural es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4kr^2}{(m+2M)R^2}} \ldots\ldots Rta.$$

Problema 22

Un cilindro uniforme de *4 kg* pende en un plano vertical en el seno de un hilo ligero, como se muestra en la figura. Si el cilindro de *250 mm* de radio no se desliza por el hilo, escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición $Y_G(t)$ del centro de masa del cilindro y determinar el período y la frecuencia de la vibración resultante.

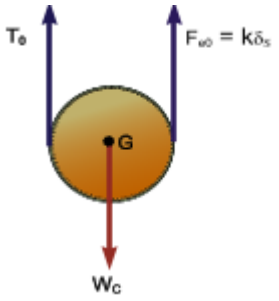


Solución

Datos e incógnitas

$$m = 4kg;..r = 250mm;..k = 800N/m;..Y_G(t) = ??$$

En la figura se muestra el DCL del cilindro en la posición de equilibrio estático



Aplicando las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$\sum F_y = 0$$

$$T_0 + k\delta_S = mg \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

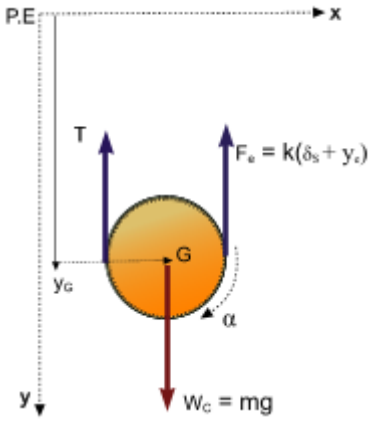
$$\sum M_G = 0$$

$$T_0(r) = k\delta_S(r) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Remplazando la ec.(1) en la ec (2), resulta

$$2k\delta_S = mg \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

En la figura se muestra el DCL del cilindro para una posición arbitraria a partir de su posición de equilibrio



Aplicando las ecuaciones de movimiento de traslación y rotación, se tiene

$$\sum F_y = m\ddot{y}_G$$

$$mg - k(\delta_S + y_e) - T = m\ddot{y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\sum M_G = I_G\ddot{\theta}$$

$$T(r) - k(\delta_S + y_e)(r) = \tfrac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

$$T - k(\delta_S + y_e) = \tfrac{1}{2}mr\ddot{\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

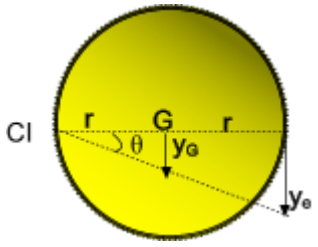
Sumando las ecuaciones (4) y (5), resulta

$$mg - 2k\delta_S - 2ky_e = m\ddot{y} + \tfrac{1}{2}mr\ddot{\theta} \ldots\ldots (6)$$

Remplazando la ec.(3) en la ec. (6), tenemos

$$-2ky_e = m\ddot{y} + \tfrac{1}{2}mr\ddot{\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

La cinemática para el cilindro muestra una relación entre la deformación del resorte y el desplazamiento del centro de masa del cilindro



$$tg\theta = \frac{y_G}{r} = \frac{y_e}{2r} \Rightarrow y_e = 2y_G \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$tg\theta \cong sen\theta \cong \theta = \frac{y_G}{r}$$

$$y_G = r\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Remplazando lasa ec. (8) y (9) en la ec. (7), resulta

$$-2k(2Y_G) = m\ddot{y} + \tfrac{1}{2}mr\left(\frac{\ddot{Y}}{r}\right)$$

$$-4kY_G = \left(m + \tfrac{1}{2}m\right)\ddot{Y}_G$$

$$\ddot{Y}_G + \frac{8k}{3m}Y_G = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Rta.$$

La ecuación anterior constituye la ecuación diferencial de un MAS cuya frecuencia circular es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{8k}{3m}} = \sqrt{\frac{8(800)}{3(4)}}$$

$$\omega_n = 23{,}09 rad/s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

El período de la vibración será

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{23{,}09}$$

$$T = 0{,}272\,\text{s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Rta.$$

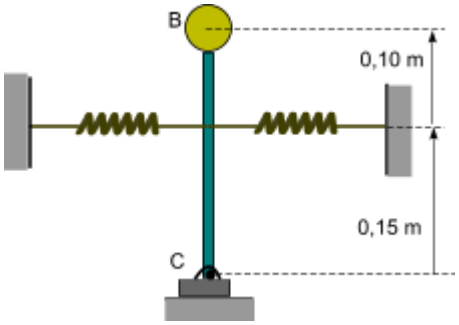
La frecuencia natural de vibración será

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}272}$$

$$f = 3{,}68\,\text{Hz} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Rta.$$

Problema 23.

La partícula B de *0,25 kg* de masa está colocada sobre una barra rígida BC de masa despreciable como se muestra en la figura. El módulo de cada uno de los resortes es *150 N/m*. La tensión en cada uno de los resortes es *10 N* cuando la barra BC está en posición vertical. Para iniciar el movimiento oscilatorio se desplaza al punto B *25 mm* hacia la derecha y se libera a partir del reposo. Calcular: (a) La ecuación diferencial del movimiento, (b) La frecuencia natural de la vibración, (c) La posición angular en función del tiempo.



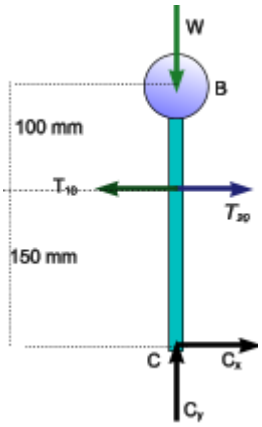
Solución

Datos e incógnitas

$$m_B = 0{,}25kg;..k_1 = k_2 = 150N/m;..T_0 = 10N;..$$

$$t = 0 : x_0 = 25mm \rightarrow, v_0 = 0;..Ec.Dif. = ??,..f = ??$$

En la figura se muestra el DCL de la barra más la partícula B en la posición de equilibrio



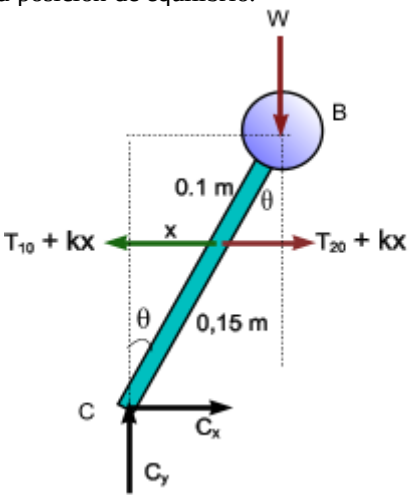
Aplicando las ecuaciones de equilibrio, resulta

$$\sum M_C = 0$$

$$T_{1,0}(0{,}15m) = T_{2,0}(0{,}15m)$$

$$T_{1,0} = T_{2,0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

En la figura se muestra el sistema barra más partícula B para una posición arbitraria θ, a partir de su posición de equilibrio.



Aplicando las ecuaciones de movimiento de rotación, se tiene

$$\sum M_C = I_C\ddot{\theta}$$

$$mg(0{,}25Sen\theta) + [(T_0 - kX) - (T_0 + kX)](0{,}15\cos\theta) = I_C\ddot{\theta} \ldots (2)$$

Para ángulos pequeños se tiene

$$sen\theta \approx \theta \quad \text{y} \quad \cos\theta \approx 1$$

Bajo esta condición la ecuación (2) se reduce a:

$$mg(0{,}25\theta) - 2kX(0{,}15) = m_B(0{,}25^2)\ddot{\theta}$$
$$0{,}25(9{,}8)(0{,}25)\theta - 2(150)(0{,}15)X = 0{,}25(0{,}25^2)\ddot{\theta}$$
$$0{,}6125\theta - 45(0{,}15\theta) = 0{,}015625\ddot{\theta} \ldots (3)$$

Simplificando se tiene

$$\ddot{\theta} + 392{,}8\theta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

La frecuencia natural se determina a partir de la ecuación que define la frecuencia circular, es decir:

$$\omega_n = 2\pi.f = \sqrt{392{,}8}\, rad/s$$
$$f = 3{,}15\,\text{Hz} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{R ta.}$$

La solución de la ecuación diferencial (4), es de la forma

$$\theta = \theta_0 sen(\omega_n t + \varphi)$$
$$\theta = \theta_0 sen(19{,}82t + \varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Aplicando las condiciones iniciales, se tiene

$$0{,}1 = \theta_0 sen\varphi$$
$$0 = 19{,}82\theta_0 \cos\varphi$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones anteriores, resulta

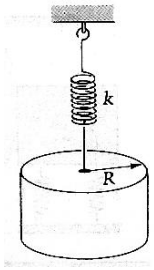
$$\theta_0 = 0{,}1 rad$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto la ecuación (5) se escribe

$$\theta = 0{,}1 sen\left(19{,}82t + \frac{\pi}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots Rta.$$

Problema 24.

Un cilindro uniforme de masa m y radio *R* está flotando en agua. El cilindro está unido a un punto central superior a un resorte de constante *k*. Si el peso específico del agua es □, encuentre la frecuencia así como el período de la vibración resultante.

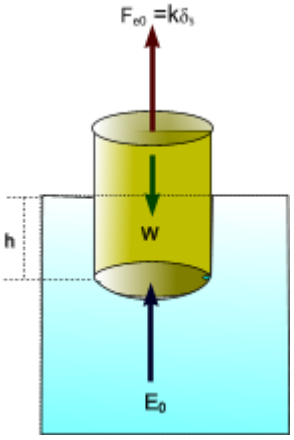


Solución

Datos e incógnitas

$$m;..R;..k;..\gamma;....f = ??;...T = ??$$

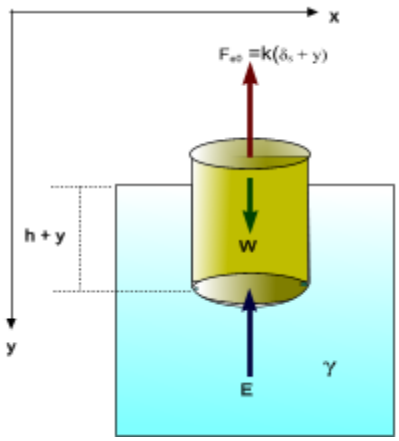
En al figura se muestra el DCL del cilindro en la posición de equilibrio estático.



Aplicando las ecuaciones de equilibrio, resulta

$$\sum F_y = 0$$
$$k\delta_S + E_0 = mg$$
$$k\delta_S + \gamma V_S = mg$$
$$k\delta_S + \gamma(\pi R^2 h) = mg \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

En la figura se muestra el DCL del cilindro cuando se ha desplazada una distancia Y hacia abajo a partir de su posición de equilibrio



Aplicando la ecuación de movimiento según el sistema de referencia, se tiene

$$\sum F_y = m\ddot{Y}$$
$$mg - E - F_e = m\ddot{Y}$$
$$mg - \gamma V - k(\delta_S + Y) = m\ddot{Y}$$
$$mg - \gamma(\pi R^2)(h+Y) - k(\delta_S + Y) = m\ddot{Y} \quad \ldots\ldots(2)$$

Remplazando la ec. (1) en la ec. (2), resulta

$$m\ddot{Y} + (\pi\gamma R^2 + k)Y = 0$$
$$\ddot{Y} + \left(\frac{k + \pi\gamma R^2}{m}\right)Y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

La ecuación (3) es la ecuación diferencial de un MAS, con frecuencia circular

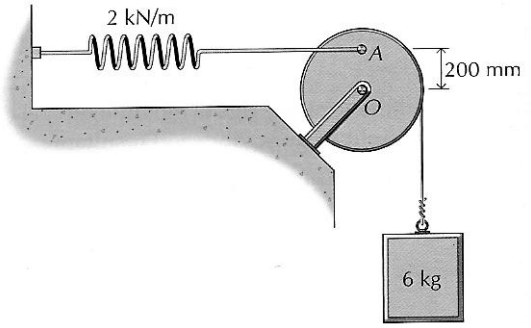
$$\omega_n = 2\pi f = \sqrt{\frac{k + \pi\gamma R^2}{m}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k + \pi\gamma R^2}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots Rta.$$

El período de la vibración resultante será

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k + \pi\gamma R^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots Rta.$$

Problema 25.

Una masa de *6 kg* pende de un hilo que está arrollado a un cilindro de *10 kg* y *300 mm* de radio, como se muestra en la figura. Cuando el sistema está en equilibrio, el punto A se encuentra *200 mm* directamente encima del eje, el cual está exento de rozamiento. Si se tira de la masa hacia abajo desplazándolo *50 mm* y se suelta el sistema a partir del reposo, determinar: (a) La ecuación diferencial que rige el movimiento vertical de la masa, (b) La frecuencia y la amplitud de la vibración y (c) La posición de la masa en función del tiempo.

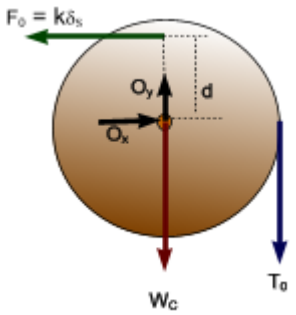


Solución

Datos e incógnitas

$$m_B = 6kg;..m_C = 10kg;..r_C = 0{,}3m;..d = 0{,}2m$$
$$t = 0:..y_B = 50mm;..v_0 = 0;..Ec.Dif = ??;..f = ??;$$
$$A = ??;..Y(t) = ??.$$

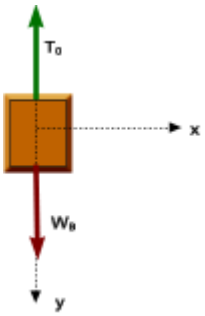
En la figura se muestra el DCL del cilindro



Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\sum M_0 = 0$$
$$k\delta_S(d) = T_0(r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

En la figura se muestra el DCL del bloque en posición de equilibrio



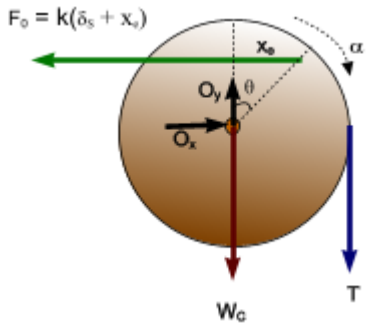
Aplicando las ecuaciones de equilibrio, resulta

$$\sum F_y = 0$$
$$T_0 = m_B g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Remplazando la ec.(1) en la ec. (2), resulta

$$k\delta_S d = m_B g.r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

En la figura se muestra el DCL del cilindro para una posición arbitraria θ a partir de la posición de equilibrio.



Aplicando la ecuación de movimiento de rotación resulta

$$\sum M_0 = I_0\ddot{\theta}$$
$$T(r) - k(\delta_S + x_e)(d\cos\theta) = I_0\ddot{\theta}.....(4)$$

Del gráfico se observa que $x_e = d\,\text{sen}\theta$, entonces la ecuación (4) se escribe

$$T(r) - k(\delta_S + d.sen\theta)(d\cos\theta) = I_0\ddot{\theta}...(5)$$

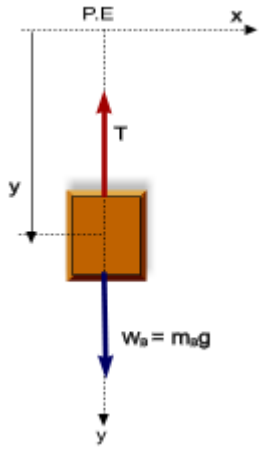
Para ángulos pequeños se tiene que

$$sen\theta \approx \theta \quad \text{y} \quad \cos\theta \approx 1.....(6)$$

Remplazando la ec. (6) en la ec. (5), da

$$T(r) - k(\delta_S + d.\theta)(d) = I_0\ddot{\theta}$$
$$T(r) - k\delta_S - kd^2\theta = \tfrac{1}{2}m_C r^2\ddot{\theta}.....(7)$$

En la figura se muestra el DCL del bloque en una posición Y a partir de la posición de equilibrio



Aplicando las ecuaciones de movimiento se tiene

$$\sum F_y = m_B\ddot{Y}$$
$$m_B g - T = m_B\ddot{Y}$$
$$T = m_B g - m_B\ddot{Y}.....(8)$$

Remplazando la ec. (8) en (7),

$$(m_B g - m_B\ddot{Y})(r) - k\delta_S d - kd^2\theta = \tfrac{1}{2}m_C r^2\ddot{\theta}$$
$$m_B g.r - k\delta_S d - kd^2\theta = \tfrac{1}{2}m_C r^2\ddot{\theta} + m_C\ddot{Y}(r)....(9)$$

Remplazando la ec.(3) en (9) resulta

$$-kd^2\theta = \tfrac{1}{2}m_C r^2\ddot{\theta} + m_B\ddot{Y}(r).....(10)$$

Teniendo en cuenta que

$$Y = r\theta \Rightarrow \dot{Y} = r\dot{\theta}.....(11)$$

La ecuación (10) se escribe

$$\tfrac{1}{2}m_C r^2\left(\frac{\ddot{Y}}{r}\right) + m_B\ddot{Y}(r) + kd^2\left(\frac{Y}{r}\right) = 0$$
$$\left(\tfrac{1}{2}m_C + m_B\right)\ddot{Y} + k\left(\frac{d}{r}\right)^2 Y = 0$$
$$\left(\frac{10}{2} + 6\right)\ddot{Y} + 200\left(\frac{0,2}{0,3}\right)^2 Y = 0$$
$$\ddot{Y} + 80,8Y = 0...(12)$$

La ec. (12) es la ecuación diferencial de una MAS con frecuencia circular dad por

$$\omega_n = 2\pi f = \sqrt{80,8}\ rad/s$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{80,8} \Rightarrow f = 1,43Hz.....Rta.$$

La solución de la ecuación diferencial (12), es

$$Y = Y_0 sen(8,99t + \varphi).....(13)$$

La velocidad será

$$\dot{Y} = 8,99Y_0\cos(8,99t + \varphi).....(14)$$

Remplazando las condiciones iniciales, se tiene

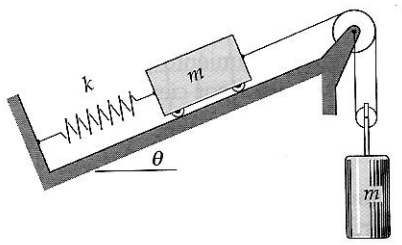
$$0,05 = Y_0 sen\varphi$$
$$0 = 8,99Y_0\cos\varphi$$
Re *solviendo*, se tiene
$$Y_0 = 0,05\,m \quad \text{y} \quad \varphi = \pi/2$$

Finalmente la posición en función del tiempo será

$$Y = 0{,}05sen\left(8{,}99t + \frac{\pi}{2}\right).....Rta.$$

Problema 26.

Determine la pulsación natural ω_n del sistema mostrado en la figura. Se desprecian la masa de las poleas y el rozamiento en ellas.

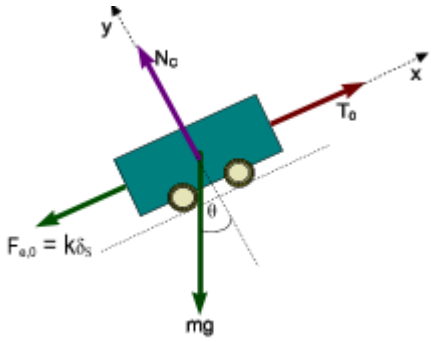


Solución.

Datos e incógnitas

$$k;..m_1 = m_2 = m;..\theta;..\omega_n = ??.$$

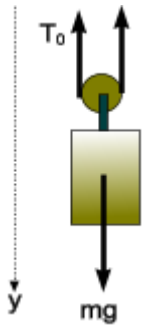
En la figura se muestra el DCL del carro, en posición de equilibrio



Aplicando las ecuaciones de equilibrio según las direcciones mostradas, se tiene

$$\sum F_x = 0$$
$$T_0 = k\delta_S + mgsen\,\theta.....(1)$$

En la figura se muestra el DCL del sistema del bloque más la polea



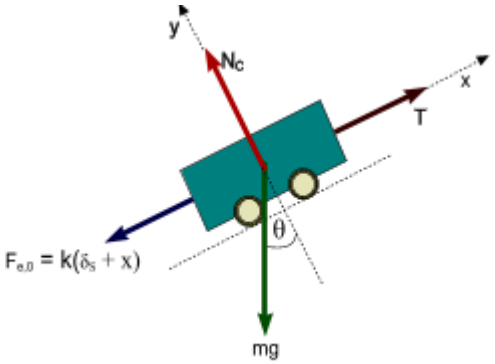
Aplicando las ecuaciones de equilibrio, resulta

$$\sum F_y = 0$$
$$2T_0 = mg.....(2)$$

Remplazando la ec (2) en (1), se tiene

$$\frac{mg}{2} = k\delta_S + mgsen\,\theta.....(3)$$

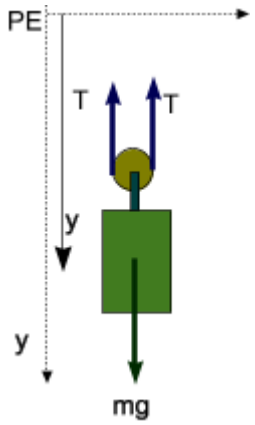
En la figura se muestra el DCL del carro cuando se ha desplazado una cierta distancia X hacia arriba a partir de la posición de equilibrio



Aplicando las ecuaciones de movimiento, se tiene

$$\sum F_x = m\ddot{X}$$
$$T - mgsen\,\theta - k(\delta_S + X) = m\ddot{X}$$
$$T = mgsen\,\theta + k(\delta_S + X) + m\ddot{X}.....(4)$$

En la figura se muestra el DCL del bloque más la polea cuando se ha desplazado una distancia Y hacia abajo a partir de su posición de equilibrio



Aplicando las ecuaciones de movimiento, se tiene

$$\sum F_y = m\ddot{Y}$$
$$mg - 2T = m\ddot{Y} \quad \text{.....(5)}$$

Remplazando la ec. (4) en (5), resulta

$$mg - 2mgsen\theta - 2k(\delta_S + X) - 2m\ddot{X} = m\ddot{Y} \quad \text{.....(6)}$$

Por cinemática de movimientos dependientes, se tiene

$$X_A + 2Y_B = cons\tan te$$
$$\ddot{X} + 2\ddot{Y} = 0 \Rightarrow |\ddot{X}| = |2\ddot{Y}| \quad \text{.....(7)}$$

Remplazando la ec (7) en (6) resulta

$$mg - 2mgsen\theta - 2k(\delta_S + X) - 2m\ddot{X} = m\left(\frac{\ddot{X}}{2}\right) \quad \text{...(8)}$$

Al sustituir la ec. (3) en (8), se tiene

$$m\left(\frac{\ddot{X}}{2}\right) + 2m\ddot{X} + 2kX = 0$$
$$5m\ddot{X} + 4kX = 0$$
$$\ddot{X} + \frac{4k}{5m}X = 0 \quad \text{.....(10)}$$

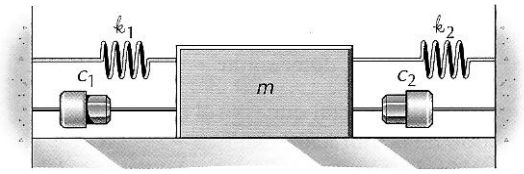
La ec. (10) constituye la ecuación diferencial del MAS con una frecuencia circular expresada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4k}{5m}} \quad \text{.....Rta.}$$

2.5.2. Vibraciones amortiguadas

Problema 27.

Un bloque de masa *m* se desliza por una superficie horizontal exenta de fricción, como se muestra en la figura. Determine el coeficiente de amortiguamiento **c** del amortiguador único que podrá sustituir a los dos representados sin que cambiara la frecuencia de vibración del bloque.

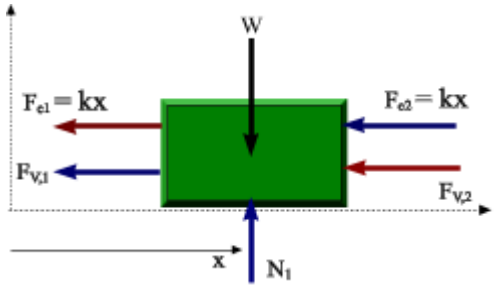


Solución

Datos e incógnitas

$$m;\ \mu_K = 0, c = ??$$

En la figura se muestra el DCL de la masa m, para un desplazamiento x a partir de la posición de equilibrio



Aplicando las ecuaciones de movimiento según las direcciones mostradas, se tiene

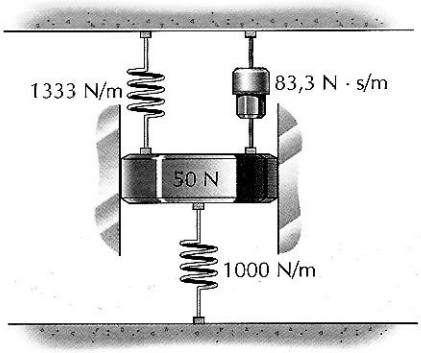
$$\sum F_x = ma_x$$
$$-k_1X + k_2X - F_{1v} - F_{2v} = m\ddot{X}$$
$$-(k_1 + k_2)X - c_1\dot{X} - c_2\dot{X} = m\ddot{X}$$
$$m\ddot{X} + (c_1 + c_2)\dot{X} + (k_1 + k_2)X = 0$$

Por lo tanto el coeficiente de amortiguamiento único será

$$c = c_1 + c_2 \qquad \text{Rta.}$$

Problema 28

Un bloque que pesa 50 N pende, en un plano vertical, de dos resortes y de un amortiguador, como se muestra en la figura. Si se desplaza el bloque 175 mm por encima de su posición de equilibrio y se suelta dándole una velocidad inicial hacia arriba de 3,75 m/s cuando t = 0, determine: (a) La ecuación diferencial que rige el movimiento, (b) El período de la vibración resultante, (c) la posición del bloque en función del tiempo y (c) El primer instante $t_1 > 0$ en que el bloque pasa por su posición de equilibrio.



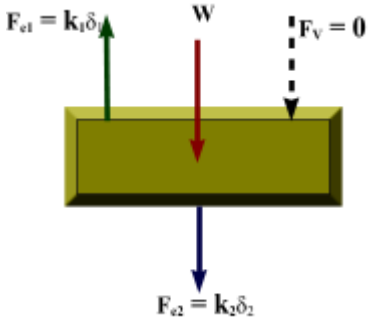
Solución

Datos e incógnitas

W = 50 N; k_1 =1333N/m;k_2 = 1000N/m; c = 83,3 N/m; Para $t_0 = 0$, y_0 = 175 mm, v_0 = 3,75 m/s;

Ec dif= ¿??; T=??; Y = f(t); $t_1 > 0$

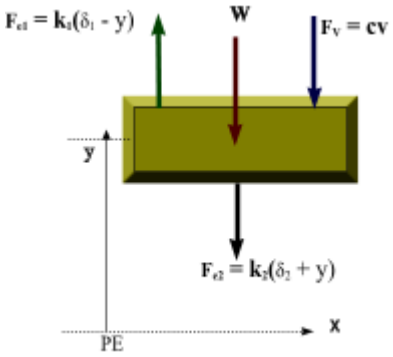
En la figura se muestra el diagrama del bloque en la posición de equilibrio, aquí la fuerza viscosa es nula.



Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\sum F_y = 0$$
$$k_1\delta_1 - k_2\delta_2 - W = 0 \qquad (1)$$

En la figura se muestra el DCL del bloque para una posición arbitraria Y a partir de la posición de equilibrio



Aplicando las ecuaciones de movimiento en dirección Y se tiene

$$\sum F_y = m\ddot{Y}$$
$$k_1(\delta_1 - Y) - k_2(\delta_2 + Y) - W - c\dot{Y} = m\ddot{Y} \qquad (2)$$

Remplazando la ec (1) en (2), resulta

$$m\ddot{Y} + c\dot{Y} + (k_1 + k_2)Y = 0$$
$$\frac{50}{9,8}\ddot{Y} + 83,3\dot{Y} + (1333 + 1000)Y = 0$$
$$\ddot{Y} + 16.34\dot{Y} + 457,26Y = 0 \qquad (3)$$

La solución de la ec diferencial (3) Es de la forma

$$y = Ae^{\lambda t}$$
$$\dot{y} = \lambda Ae^{\lambda t}$$
$$y = \lambda^2 Ae^{\lambda t}$$

Remplazando las ecuaciones anteriores se obtiene

$$Ae^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 16,34\lambda + 457,6\right) = 0$$

La ecuación característica es

$$\left(\lambda^2 + 16,34\lambda + 457,6\right) = 0$$

La raíces de la ecuación característica son

$$\lambda_{1,2} = -8,17 \pm i(19,76)$$

De la ecuación anterior se obtiene que

$$\gamma = 8,17$$
$$\omega_d = 19,76$$

El período será

$$T_d = 0{,}318$$

La posición del bloque en cualquier instante es

$$y = Ae^{-\gamma t}sen(\omega_d t + \phi)$$

$$y = Ae^{-8{,}17t}sen(19{,}76t + \phi)$$

La velocidad es

$$y = Ae^{-8{,}17t}\left[-8{,}17sen(19{,}76t+\phi)+19{,}76\cos(19{,}76t+\phi)\right]$$

Aplicando las condiciones iniciales

$$0{,}175 = Asen\phi$$

$$3{,}75 = -8{,}17Asen\phi + 19{,}76A\cos\phi$$

Resolviendo estas ecuaciones se tiene

$$\phi = 1{,}41rad$$
$$A = 0{,}177mm$$

La posición en cualquier instante será

$$y = 0{,}177e^{-8{,}17t}sen(19{,}76t + 1{,}14)$$

El tiempo $t_1 > 0$, se determina haciendo Y = 0

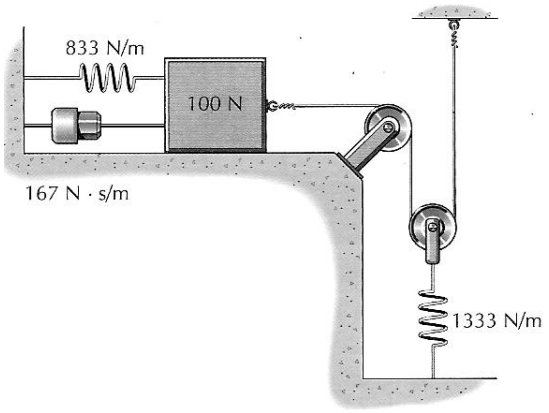
$$0 = 0{,}177e^{-8{,}17t}sen(19{,}76t + 1{,}14)$$

Calculando el valor de t se obtiene

T = 0,1 seg Rta.

Problema 29.

Un bloque que pesa 100 N se desliza por una superficie sin fricción, según se indica. Los dos resortes están sometidos a tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y sin fricción. Si se desplaza al bloque 75 mm a la izquierda de su posición de equilibrio y se suelta dándole una velocidad de 1,25 m/s hacia la derecha cuando t = 0, determine: (a) la ecuación diferencial que rige el movimiento, (b) el período de la vibración resultante, (c) la posición del bloque en función de tiempo.



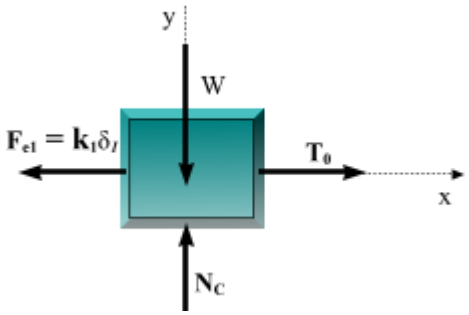
Solución

Datos e incógnitas

W = 100 N; k_1 = 833N/m;k_2 = 1333N/m; c = 167 N.s/m; Para $t_0 = 0$, x_0 = 75 mm, v_0 = 1,25 m/s;

Ec dif= ¿??; T=??; Y = f(t); $t_1 > 0$

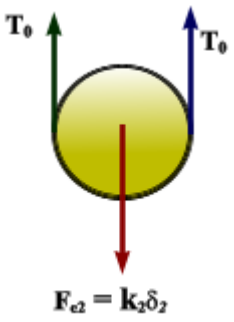
En la figura se muestra el diagrama del bloque en la posición de equilibrio, aquí la fuerza viscosa es nula.



Aplicando las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\sum F_x = 0$$
$$T_0 = k_1\delta_1 \qquad (1)$$

En la figura se muestra el DCL de la polea móvil



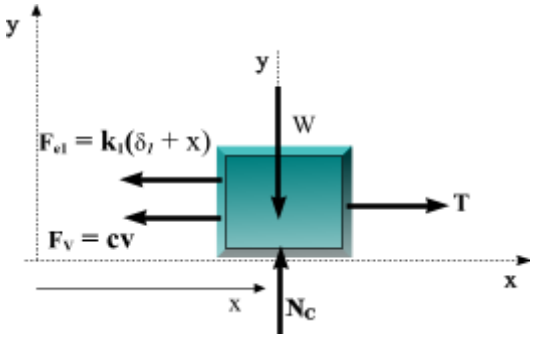
Aplicando las ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0\\ 2T_0 &= k_2\delta_{21}\end{aligned} \qquad (2)$$

Comparando las ecuaciones (1) y (2), se tiene

$$2k_1\delta_1 = k_2\delta_2 \qquad (3)^*$$

En la figura se muestra el DCL del bloque para un desplazamiento x hacia la derecha.

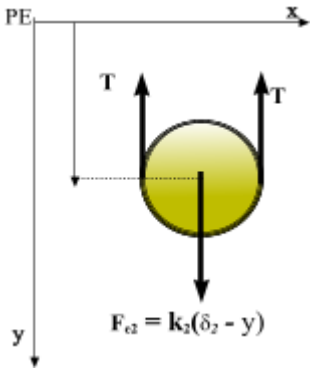


Aplicando la segunda ley de newton, se tiene

$$\sum F_x = m\ddot{X}$$

$$T - c\dot{X} - k_1(\delta_1 + X) = m\ddot{X} \qquad (4)$$

En la figura se muestra la DCL de la polea imponderable, para un desplazamiento Y hacia abajo



Aplicando la segunda ley de newton se tiene

$$\sum F_Y = m\ddot{Y}$$

$$k_2(\delta_2 - Y) - 2T = 0$$

$$T = \frac{k_2}{2}(\delta_2 - Y) \qquad (5)$$

Remplazando la ec (5) en (4), resulta

$$\frac{k_2}{2}(\delta_2 - Y) - c\dot{X} - k_1(\delta_1 + X) = m\ddot{X} \qquad (6)$$

Remplazando la ec (3) en (6) se tiene

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + k_1 X + \frac{k_2}{2}Y = 0 \qquad (7)$$

Por cinemática de movimiento dependiente se obtiene

$$\begin{aligned}X &= 2Y\\ Y &= X/2\end{aligned} \qquad (8)$$

Al remplazar la ec (8) en (7), resulta

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + (k_1 + k_2/4)X = 0$$

$$10{,}2\ddot{X} + 167\dot{X} + \left(833 + \frac{1333}{4}\right)X = 0$$

$$\ddot{X} + 16{,}37\dot{X} + 1144{,}34X = 0 \qquad (9)$$

La solución de la ecuación diferencial es de la forma

$$\begin{aligned}y &= Ae^{\lambda t}\\ \dot{y} &= \lambda Ae^{\lambda t}\\ \ddot{y} &= \lambda^2 Ae^{\lambda t}\end{aligned} \qquad (10)$$

Remplazando las ecuaciones anteriores se obtiene

$$Ae^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 16{,}37\lambda + 114{,}34\right) = 0$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 + 16{,}37\lambda + 114{,}34 = 0 \qquad (11)$$

Las raíces son

$$\lambda_{1,2} = -8{,}2 \pm i(6{,}9) \qquad (12)$$

De la ecuación anterior se obtiene que

$$\gamma = 8{,}2 \qquad (13)$$

$$\omega_d = 6{,}9 \qquad (14)$$

La posición del bloque en cualquier instante es

$$X = Ae^{-\gamma t}\,sen(\omega_d t + \phi)$$

$$X = Ae^{-8,2t}sen(6,9t+\phi) \qquad (15)$$

La velocidad en función del tiempo es

$$\dot{X} = Ae^{-8,2t}\left[-8,2sen(6.9t+\phi)+6,9\cos(6,9t+\phi)\right]$$

Remplazando las condiciones iniciales

$$-0,075 = Asen\phi$$

$$1,25 = -8,2Asen\phi + 6,9A\cos\phi$$

Resolviendo estas ecuaciones se tiene

$$\phi = -0,68rad$$

$$A = 0,119m$$

Por lo tanto la posición en cualquier tiempo es

$$X = 0,119e^{-8,2t}sen(6,9t-0,68)$$

El tiempo t > 0 para el cual v = 0, se obtiene de la velocidad

$$\dot{X} = 0,119e^{-8,2t}\left[-8,2sen(6.9t-0,68)+6,9\cos(6,9t-0,68)\right]$$

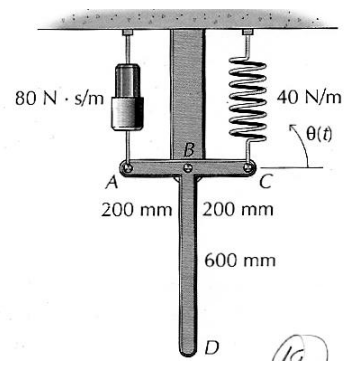
$$0 = 0,119e^{-8,2t_1}\left[-8,2sen(6.9t_1-0,68)+6,9\cos(6,9t_1-0,68)\right]$$

Resolviendo eta última ecuación se determina el tiempo solicitado

$t_1 = 0,19$ s Rta.

Problema 30

Dos barras esbeltas están soldadas según se indica. La barra ABC pesa 10 N y en la posición de equilibrio está horizontal. La barra BD pesa 15 N y en la posición de equilibrio está vertical. Determine: (a) a) la razón de amortiguamiento ζ. (b) el tipo de movimiento y (c) la frecuencia y el período del movimiento (si procede).

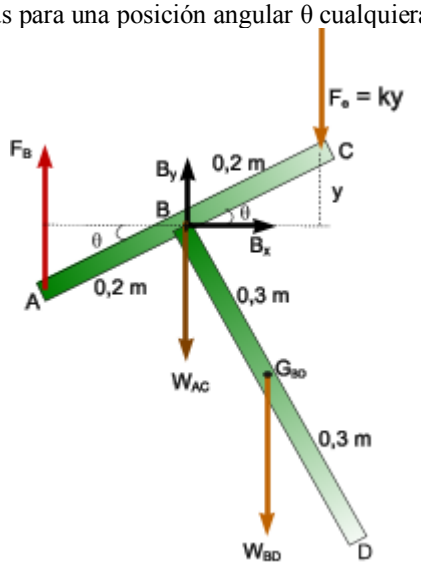


Solución

Datos e incógnitas

W_{ABC} = 10 N; W_{BD} =15N k = 40N/m c = 167 N.s/m; (a) ξ = ??; (b) Tipo de mov; (c) T = ??, f = ¿?

En la figura se muestra el DCL del sistema de varillas para una posición angular θ cualquiera



Aplicando las ecuaciones e movimiento al sistema, se tiene

$$\sum M_B = I_B\ddot{\theta} \qquad (1)$$

$$-m_{BD}g\left(0,3sen\theta\right)-kY\left(0,2\cos\theta\right)-F_v\left(0,2\cos\theta\right)=I_B\ddot{\theta}$$

Para ángulos pequeños senθ = θ y cosθ =1,

$$-m_{BD}g\left(0,3\theta\right)-kY\left(0,2\right)-c\left(0,2\dot{\theta}\right)\left(0,2\right)=I_B\ddot{\theta}$$

$$-15(0,3)\theta-40(0,2^2)\theta-80(0,2^2)\dot{\theta}=I_B\ddot{\theta}$$

La ecuación diferencial de la vibración será

$$I_B\ddot{\theta}+3,2\dot{\theta}+6,1\theta=0 \qquad (2)$$

Se procede a determinar el momento de inercia de las varillas respecto al punto B

$$I_B = \tfrac{1}{12}m_{ABC}L_{ABC}^2+\tfrac{1}{3}m_{BD}L_{BD}^2$$

$$= \tfrac{1}{12}(\tfrac{10}{9,8})(0,4)^2+\tfrac{1}{3}(\tfrac{15}{9,8})(0,6)^2$$

$$I_B = 0,197kg.m^2 \qquad (3)$$

Remplazando la ec. (3) en (2), se tiene

$$0{,}197\ddot{\theta}+3{,}2\dot{\theta}+30{,}96\theta=0 \qquad \text{Rta.}$$

Parte (a). Cálculo de la razón de amortiguamiento

$$\xi=\frac{c_{eff}}{2\sqrt{m_{eff}\,k_{eff}}}=\frac{3{,}2}{2\sqrt{0{,}197(30{,}96)}}$$

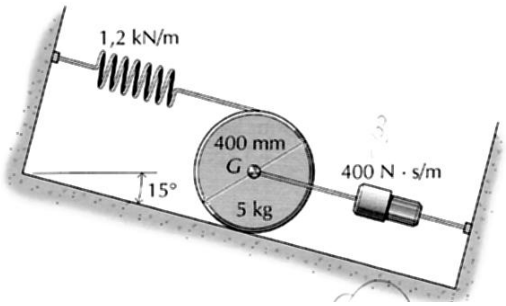
$$\xi=1{,}46 \qquad \text{Rta.}$$

Parte (b) Tipo de movimiento. Como la razón de amortiguamiento es mayor que la unidad, el ***movimiento es sobre amortiguado.***

Parte (c). Como el movimiento es sobre amortiguado no hay período ni frecuencia.

Problema 31.

Un cilindro uniforme de 5 kg rueda sin deslizar por un plano inclinado, según se muestra. El resorte está unido a un hilo ligero inextensible, arrollado sobre el cilindro y el amortiguador lo están a un pequeño pasador sin fricción situado en el centro G del cilindro de 400 mm de diámetro. Determine: (a) la razón de amortiguamiento. (b) el tipo de movimiento y (c) la frecuencia y el período del movimiento (si procede).

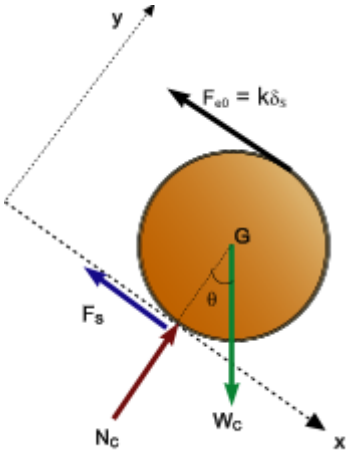


Solución

Datos e incógnitas

m = 5kg, k = 1200 N7m; c= 400 N.s/m; θ = 15º
(a) ζ = ??; (b) tipo de mov.; (c) T = ¿? f =¿?

En la figura se muestra el DCL del cilindro en posición de equilibrio estático.



Aplicando las ecuaciones de equilibrio, se tiene

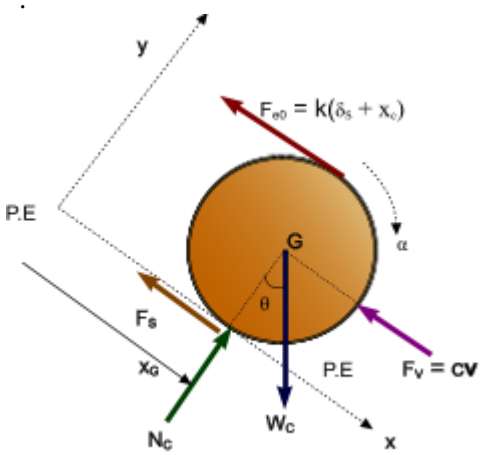
$$\sum F_x=0$$
$$mgsen\theta-F_R-k\delta=0 \qquad (1)$$

$$\sum M_G=0$$
$$F_{e,0}(r)-k\delta(r)=0 \qquad (2)$$

Remplazando la ec. (2) en (1), resulta

$$mgsen\theta-2k\delta=0 \qquad (3)$$

En la figura se muestra el DCL del cilindro para un desplazamiento *x* del centro de masa.



Aplicando las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$\sum F_x=ma_{Gx}$$
$$mgsen\theta-F_R-k(\delta+X_e)-c\dot{X}_G=m\ddot{X} \qquad (4)$$

$$\sum M_G=I_G\ddot{\theta}$$
$$F_R(r)-k(\delta+X_e)(r)=I_G\ddot{\theta}$$

$$F_R-k(\delta+X_e)=I_G\ddot{\theta}/r \qquad (5)$$

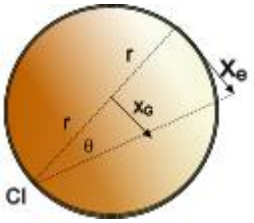
Sumando la ec. (4) y (5), resulta

$$mgsen\theta - 2k(\delta + X_e) - c\dot{X}_G = m\ddot{X} + \frac{I_G\ddot{\theta}}{r}$$

Remplazando la ec. (3) en (5), se tiene

$$m\ddot{X} + \frac{I_G\ddot{\theta}}{r} + c\dot{X} + 2kX_e = 0 \qquad (6)$$

Relaciones cinemáticas. Tomando como centro instantánea al punto de contacto



$$\begin{aligned} X_G &= r\theta \\ \dot{X}_G &= r\dot{\theta} \\ X_e &= 2r\theta \end{aligned} \qquad (7)$$

Remplazando la ec. (7) en (6) y el valor del momento de inercia, resulta

$$\frac{3}{2}m\ddot{X}_G + c\dot{X} + 4kX_G = 0$$

Remplazando valores, se tiene

$$\frac{3}{2}(5)\ddot{X}_G + 400\dot{X} + 4(1200)X_G = 0$$

$$7{,}5\ddot{X}_G + 400\dot{X} + 4800X_G = 0$$

La razón de amortiguamiento será

$$\xi = \frac{c_{eff}}{2\sqrt{m_{eff}\,k_{eff}}} = \frac{400}{2\sqrt{7{,}5(4800)}}$$

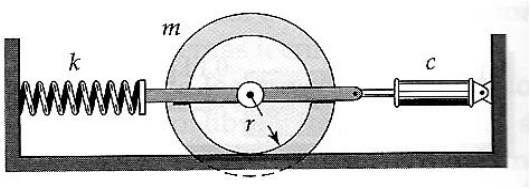
$$\xi = 1{,}05$$

Como la razón de amortiguamiento es mayor que la unidad el movimiento es sobre amortiguado

Por lo tanto no existe período ni frecuencia.

Problema 32

Calcular la razón de amortiguamiento ξ del sistema representado en la figura si la masa y el radio de giro del cilindro escalonado son *m = 9 kg* y K_G = *140 mm*, la constante del resorte es *k = 2,6 kN/m* y el coeficiente de amortiguamiento del cilindro hidráulico es c = 30 N.s/m. El cilindro rueda sin deslizamiento sobre su radio *r = 150 mm* y el resorte tanto a tracción como a compresión.

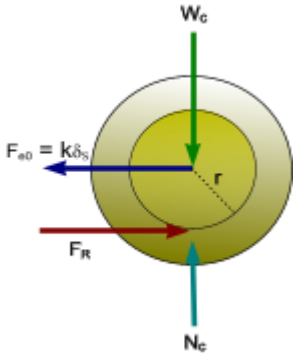


Solución

Datos e incógnitas

M = 9 kg; K_G =140 mm; k = 2600 N/m; r = 0,15m
c =30 N.s/m

En la figura se muestra el DCL de la rueda en posición de equilibrio



Aplicando las ecuaciones de equilibrio resulta

$$\sum F_x = 0$$

$$F_R - k\delta_s = 0 \qquad (1)$$

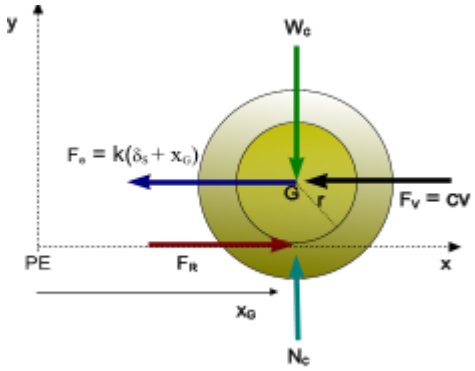
$$\sum M_G = 0$$

$$F_R(r) = 0 \qquad (2)$$

Remplazando (2) en (1), resulta

$$k\delta_s = 0 \qquad (3)$$

En la figura se muestra el DCL de la rueda para un desplazamiento X_G de su centro de masa.



Aplicando las ecuaciones de movimiento resulta

$$\sum F_x = m\ddot{X}$$

$$F_R - F_e - F_V = m\ddot{X}$$

$$F_R - kX_G - c\dot{X} = m\ddot{X} \qquad (4)$$

$$\sum M_G = I_G\ddot{\theta}$$

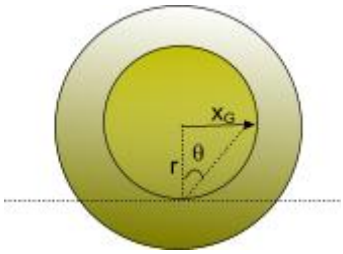
$$-F_R(r) = mK_G^2\ddot{\theta}$$

$$-F_R = mK_G^2\ddot{\theta}/r \qquad (5)$$

Sumando las ecuaciones (4) y (5), resulta

$$-kX_G - c\dot{X}_G = m\ddot{X}_G + \frac{mK_G^2}{r}\ddot{\theta} \qquad (6)$$

Relaciones cinemáticas. Tomando como centro instantáneo el punto de contacto de la rueda con el piso.



$$X_G = r\theta$$

$$\dot{X}_G = r\dot{\theta} \qquad (7)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{X}_G}{r}$$

Remplazando la ec. (7) en (6), se tiene

$$-kX_G - c\dot{X}_G = m\ddot{X}_G + \frac{mK_G^2}{r}\left(\frac{\ddot{X}_G}{r}\right)$$

$$m\left(1+\frac{K_G^2}{r^2}\right)\ddot{X}_G + c\dot{X}_G + kX_G = 0$$

Remplazando lo valores dados en el problema resulta

$$16{,}84\ddot{X}_G + 30\dot{X} + 2600X_G = 0$$

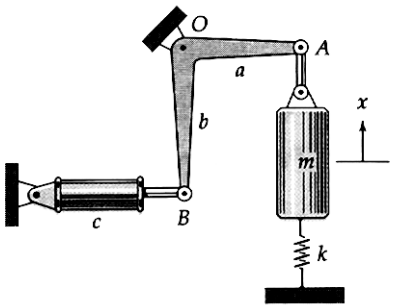
La razón de amortiguamiento será

$$\xi = \frac{c_{eff}}{2\sqrt{m_{eff}\,k_{eff}}} = \frac{30}{2\sqrt{16{,}84(2600)}}$$

$$\xi = 0{,}0716 \qquad \text{Rta.}$$

Problema 33.

Para el sistema representado escribir su ecuación diferencial de movimiento en función de la variable *x*. Hallar la expresión del índice de amortiguamiento ξ en función de las constantes del sistema indicadas. Desprecie la masa de la palanca AB y suponer que se efectúan pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio representada.

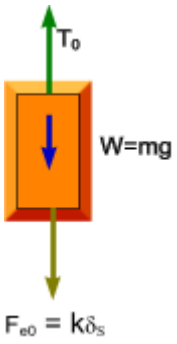


Solución

Datos e incógnitas

M; k; c; a; b; ec. Dif = ¿?

En la figura se muestra el DCL del bloque *m*

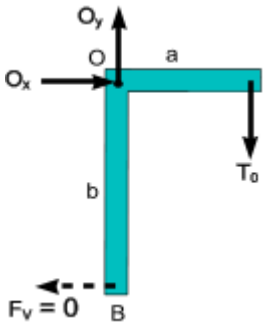


Aplicando las ecuaciones de equilibrio, resulta

$$\sum F_y = 0$$

$$T_0 = mg + k\delta_S \qquad (1)$$

En la figura se muestra el DCL de la palanca acodada



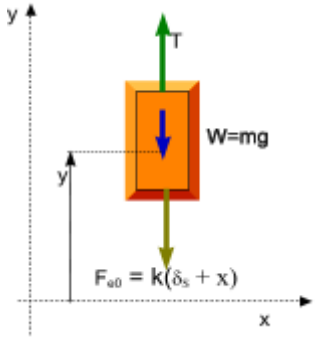
Aplicando las ecuaciones de equilibrio, resulta

$$\sum M_o = 0$$
$$T_0(a) = 0 \qquad (2)$$

Remplazando la ec. (2) en (1), se tiene

$$0 = mg + k\delta_S \qquad (3)$$

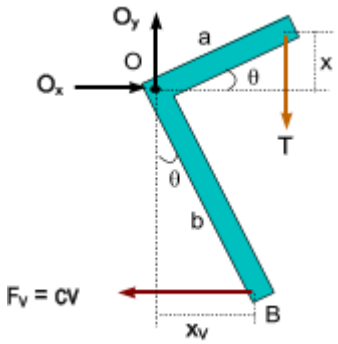
En la figura se muestra el DCL del bloque para un desplazamiento Y a partir de su posición de equilibrio



Aplicando la segunda ley de Newton se tiene

$$\sum F_y = m\ddot{Y}$$
$$T - mg - k(\delta_S + Y) = m\ddot{Y}$$
$$T = m\ddot{Y} + mg + k(\delta_S + Y) \qquad (4)$$

En la figura se muestra el DCL de la palanca acodada para una posición angular cualquiera.



Aplicando las ecuaciones de movimiento, resulta.

$$\sum M_0 = I_O\ddot{\theta}$$

Debido a que la palanca es de masa despreciable, el momento de inercia es nulo

$$-T(a\cos\theta) - F_V(b\cos\theta) = 0$$

Para ángulos pequeños $cos\theta = 1$, entonces

$$T(a) + F_V(b) = 0 \qquad (5)$$

Reemplazando la ec(5) en (4), se tiene

$$\left[m\ddot{Y} + mg + k(\delta_S + Y)\right]a + cv(b) = 0 \qquad (6)$$

Al sustituir la ec. (3) en (4), resulta

$$(m\ddot{Y} + kY)a + cv(b) \qquad (7)$$

De la geometría de la figura se obtiene

$$sen\,\theta = \frac{Y}{a} = \frac{Y_V}{b}$$

$$Y_V = \frac{b}{a}Y$$

$$v_V = \frac{B}{a}\dot{Y} \qquad (8)$$

Remplazando la ec. (8) en (7), se tiene

$$ma\ddot{Y} + \frac{cb^2\dot{Y}}{a} + kaY = 0$$

$$\ddot{Y} + \frac{cb^2}{a}\dot{Y} + \frac{k}{m}Y = 0 \qquad (9)$$

La razón de amortiguamiento será

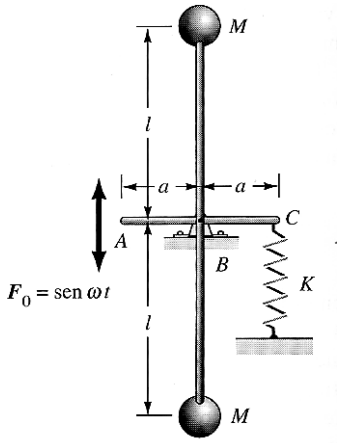
$$\xi = \frac{c_{eff}}{2\sqrt{m_{eff}\,k_{eff}}} = \frac{cb^2/ma^2}{2\sqrt{1(k/m)}}$$

$$\xi = \frac{cb^2}{2a^2\sqrt{mk}} \qquad \text{Rta.}$$

2.5.3 Vibraciones forzadas.

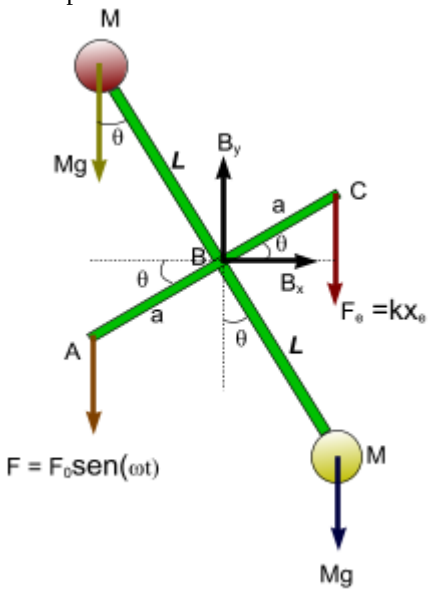
Problema 34

Dos esferas de M = 2 kg de masa cada una están soldadas a una barra ligera que está articulada en el punto B. Una segunda barra ligera AC está soldada a la anterior. Se aplica una perturbación en el punto A igual a F =F_0 Senωt. En el otro extremo C, se encuentra un muelle recuperador que cuando AC está horizontal no presenta deformación. Si la amplitud de la rotación estacionaria del sistema se mantiene por debajo de 20.10^{-3} rad, ¿Qué rango de frecuencias ω está permitido?. Utilizar los siguientes datos: *l = 300 mm; K = 7000N/m; F_0 = 10N; a = 100 mm.*



Solución

En la figura se muestra el DCL del sistema compuesto por las dos masas más las dos varillas



Aplicando las ecuaciones de movimiento, se tiene

$$\sum M_B = I_B\alpha$$

$$F(a\cos\theta) + (Mg - Mg)lsen\theta - F_e a\cos\theta = I_B\alpha$$

Para ángulos pequeños $\cos\theta \approx 1$, entonces

$$F(a) - F_e(a) = I_B\alpha$$
$$aF_0 sen\omega t = I_B\alpha + (kx_e)a$$

$$aF_0 sen\omega t = (Ml^2 + Ml^2)\alpha + (kx_e)a$$

$$aF_0 sen\omega t = (2Ml^2)\ddot{\theta} + (kx_e)a$$

$$0{,}1(10)sen\omega t = 2(2)(0{,}3)^2\ddot{\theta} + 7000(0{,}1)^2\theta$$

$$0{,}36\ddot{\theta} + 70\theta = sen\omega t \qquad (1)$$

La solución permanente es de la forma

$$\theta = \theta_0 sen\omega t \qquad (2)$$

La velocidad y la aceleración se expresan

$$\dot{\theta} = \omega\theta_0\cos\omega t \qquad (3)$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta_0 sen\omega t \qquad (4)$$

Remplazando las ec. (2), (3) y (4), en(1) resulta

$$0{,}36(-\omega^2\theta_0 sen\omega t) + 70\theta_0 sen\omega t = sen\omega t$$

Simplificando se tiene

$$0{,}36\omega^2\theta_0 + 70\theta_0 = 1$$

$$\theta_0[70 - 0{,}36\omega^2] = 1$$

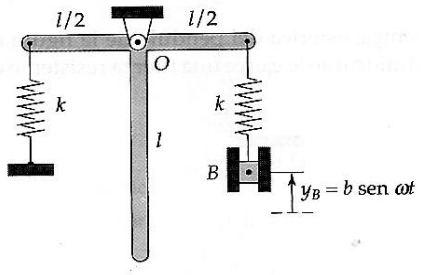
Remplazando valores se obtiene

$$\omega = \pm 7{,}45 rad/s$$

Problema 35

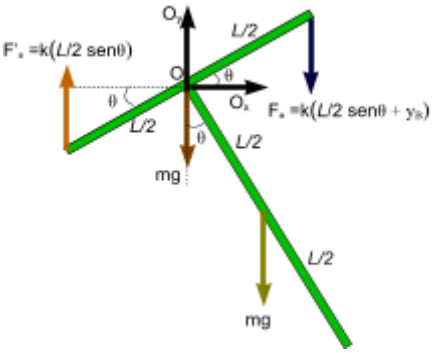
Dos barras uniformes iguales cada una de masa m están soldadas formando un ángulo recto y están suspendidas, tal como se muestra, de un eje horizontal que pasa por O: hallar la pulsación excitadora crítica ω_C del bloque B capaz de producir en el sistema unas oscilaciones de

amplitud excesiva. La masa del conjunto soldado es m.



Solución

En la figura se muestra el DCL del sistema formado por las dos varillas.



Aplicando las ecuaciones de movimiento, se tiene

$$\sum M_o = I_o\alpha$$

$$F_e'\left(\frac{l}{2}\cos\theta\right) - F_e\left(\frac{l}{2}\cos\theta\right) - mg\left(\frac{l}{2}sen\theta\right) = I_o\alpha$$

Para ángulos pequeños, senθ ≈ θ y cosθ ≈ 1.

$$-k\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right) - k\left(\frac{l}{2}\theta - y_B\right)\left(\frac{l}{2}\right) - mg\left(\frac{l}{2}\theta\right) = I_o\alpha$$

Simplificando la ecuación anterior, resulta

$$I_o\alpha + \frac{kl^2}{4}\theta + \frac{mgl}{2}\theta = \frac{kl}{2}y_B \quad (1)$$

El momento de inercia esta dado por

$$I_o = \tfrac{1}{3}ml^2 + \tfrac{1}{12}ml^2$$

$$I_o = \frac{5ml^2}{12} \quad (2)$$

Remplazando la ec. (2) en (1), se tiene

$$\frac{5ml^2}{12}\ddot{\theta} + \left(\frac{kl^2}{2} + \frac{mgl}{2}\right)\theta = \frac{kl}{2}bsen\omega t$$

Simplificando la ec , resulta

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{6kl + 6mg}{5ml}\right)\theta = \frac{6kb}{5ml}sen\omega t$$

La ecuación obtenida es una ecuación diferencial que describe el movimiento forzado sin amortiguamiento. Su frecuencia natural circular está dada por la ecuación

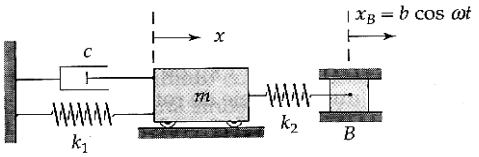
$$\omega_n = \sqrt{\frac{6}{5}\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l}\right)}$$

La pulsación para la resonancia es

$$\omega_C = \omega_n = \sqrt{\frac{6}{5}\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l}\right)} \quad \text{Rta.}$$

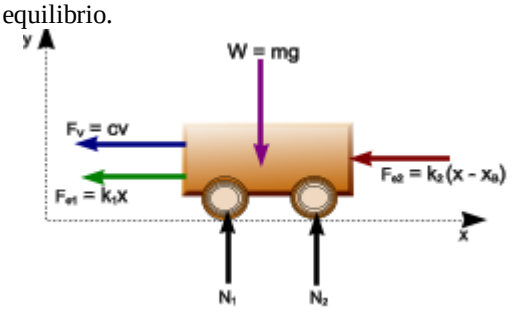
Problema 36

EL elemento de fijación B recibe un movimiento horizontal $x_B = b\cos\omega t$. Deducir la Ecuación diferencial del movimiento de la masa m y definir la pulsación crítica ω_C para la cual las oscilaciones de la masa se hacen excesivamente amplias.



Solución

En la figura se muestra el DCL de m para un desplazamiento x a partir de su posición de equilibrio.



Aplicando las ecuaciones de movimiento al DCL, resulta

$$-F_e - F_e' - F_V = ma_x$$
$$-k_1x - k_2(x - x_B) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2x_B$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 b\cos\omega t$$

La frecuencia natural es

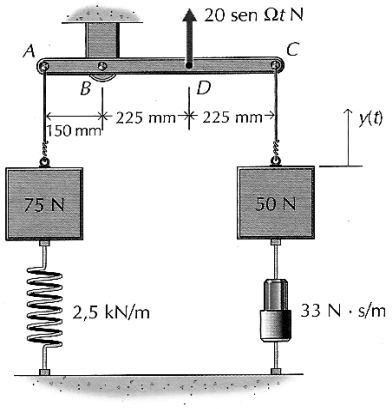
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

La frecuencia de resonancia está dada por

$$\omega_C = \omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \qquad \text{Rta.}$$

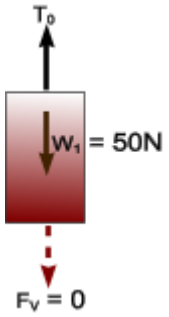
Problema 37.

Los dos bloques mostrados en la figura pende, en un plano vertical, de una barra de masa despreciable que está horizontal en la posición de equilibrio. Si se aplica al punto D de la barra una fuerza P(t)=20sen(Ωt), determine la máxima amplitud de la oscilación estacionaria del bloque de 50 N.



Solución

En al figura se muestra el DCL del bloque de 50 N en equilibrio estático.

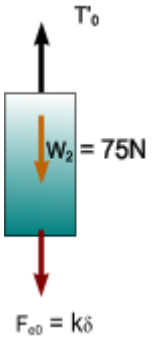


Aplicando las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$\sum F_y = 0$$

$$T_0 - 50N = 0 \qquad (1)$$

En la figura se muestra el DCL del bloque de 75 N.

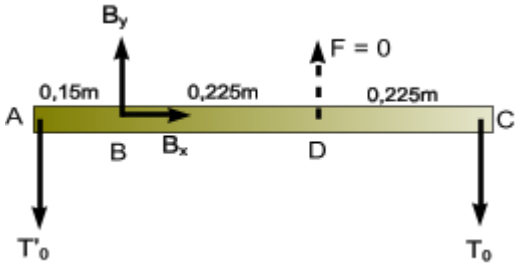


Aplicando las ecuaciones de equilibrio, resulta

$$\sum F_y = 0$$

$$T_0' - k\delta - 75N = 0 \qquad (2)$$

En la figura se muestra el DCL de la barra de masa despreciable en equilibrio

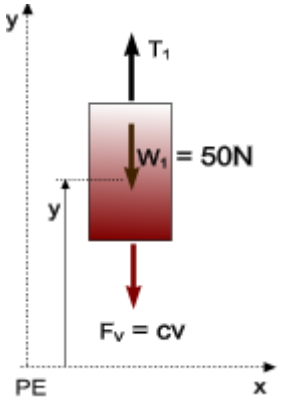


Tomando momentos respecto a B, se tiene

$$\sum M_B = 0$$

$$T_0'(0{,}15) - T_0(0{,}450) = 0 \qquad (3)$$

En la figura se muestra el DCL del bloque de 50N para una posición Y.



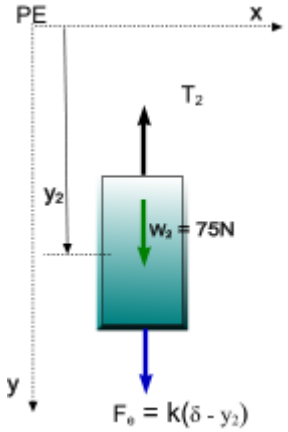
La segunda ley de Newton nos da

$$\sum F_y = ma_y$$

$$T_1 - 50 - c\dot{y} = \frac{50}{9,8}y$$

$$T_1 = 50 + c\dot{y} = 5,1y \qquad (5)$$

En la figura se muestra el DCL para el bloque de 75N para un desplazamiento respecto a su posición de equilibrio.



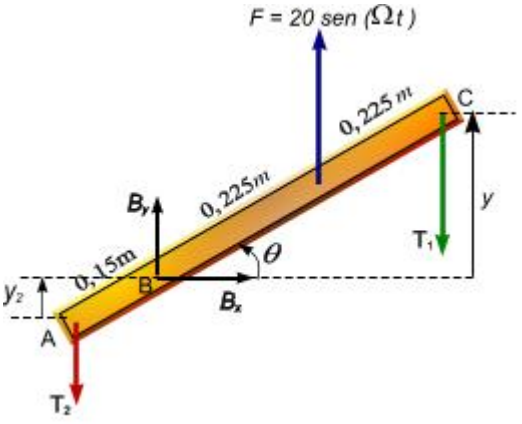
Aplicando la segunda ley de Newton

$$\sum F_y = m_2 a_{2y}$$

$$k(\delta - y_2) + 75 - T_2 = \frac{75}{9,8}y_2$$

$$T_2 = 75 + k(\delta - y_2) - 7,65y_2 \qquad (6)$$

En la figura se muestra el DCL de la barra para un desplazamiento angular cualquiera



Aplicando las ecuaciones de movimiento, resulta

$$\sum M_B = I_{B\alpha}$$

$$0,15T_2\cos\theta - 0,45T_1\cos\theta + 20sen\Omega t\left(0,225\cos\theta\right) = 0$$

Para ángulos pequeños $\cos\theta \approx \theta$, entonces se tiene

$$0,15T_2 - 0,45T_1 = -20sen\Omega t\left(0,225\right) \qquad (7)$$

Remplazando (5) y (6) en (7), y en este resultado se reemplaza la ecuación (4), se tiene

$$2.68\dot{y} + 14,85\dot{y} + 125y = 4,5sen\Omega t$$

La solución particular tiene una amplitud

$$y_m = \frac{F_{0,eff}}{\sqrt{\left(k_{eff} - m\Omega^2\right)^2 + \left(c_{eff}\,\Omega\right)^2}}$$

$$y_m = \frac{4,5}{\sqrt{\left(125 - 2,68\Omega^2\right)^2 + \left(14,85\Omega\right)^2}}$$

La máxima amplitud se obtiene derivando la ecuación anterior respecto de Ω. Al realizar la derivada e igualarlo a cero se tiene

$$\Omega = 5,59rad/s$$

Remplazando el valor de la frecuencia circular obtenida en la amplitud de la vibración de estado permanente se tiene

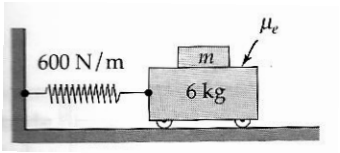
$$y_m = \frac{4,5}{\sqrt{\left(125 - 2,68(5,59)^2\right)^2 + \left(14,85(5,59)\right)^2}}$$

$$y_{\max} = 48,5mm \qquad \text{Rta.}$$

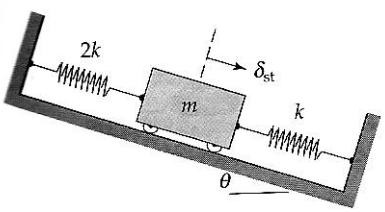
2.6 PROBLEMAS PROPUESTOS.

2.6.1 Vibraciones libres

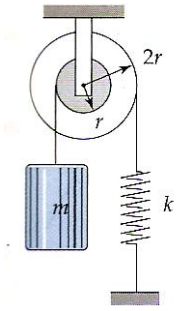
1. Con la hipótesis de ausencia de deslizamiento, hallar la masa *m* del bloque a colocar encima del carrito de 6 kg para que el período del sistema sea de 0,75 segundos. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático mínimo μ_S del sistema para el cual el bloque no resbala sobre el carrito cuando éste se aparta 50 mm de la posición de equilibrio y luego se suelta?.



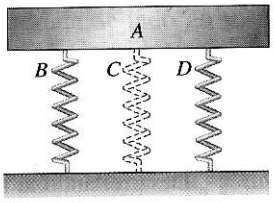
2. Si los dos resortes están sin deformar cuando la masa se halla en la posición central representada, determine el desplazamiento estático de la misma, ¿Cuál es el período de las oscilaciones en torno a la posición de equilibrio?.



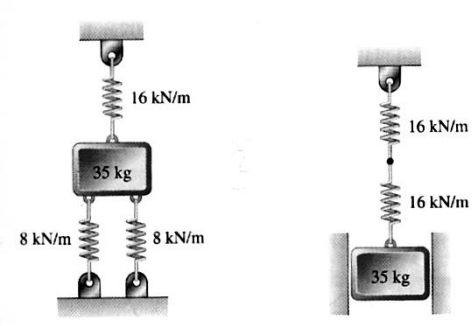
3. Hallar la frecuencia natural f_n de las oscilaciones verticales del cilindro de masa *m*. despreciar la masa del cilindro escalonado y el rozamiento del mismo.



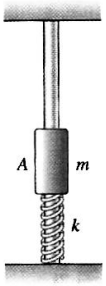
4. La plataforma A de 50 kg está unida a los resortes B y D de constante k = 1900 N/m cada uno. Se desea que la frecuencia de vibración de la plataforma no varíe cuando sobre ella se deposita un bloque de 40 kg, por lo que se añade un tercer muelle C. Determine la constante del resorte C.



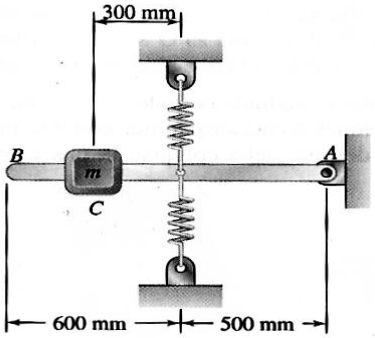
5. Un bloque de 35 kg está soportado por el dispositivo de muelles que se muestra. Desde su posición de equilibrio sufre un desplazamiento vertical descendente y se suelta. Sabiendo que la amplitud del movimiento resultante es 45 mm, halle: (a) la ecuación diferencial que gobierna a cada uno de los movimientos de los bloques (b) el período y la frecuencia del movimiento, (c) la velocidad y la aceleración máximas del bloque.



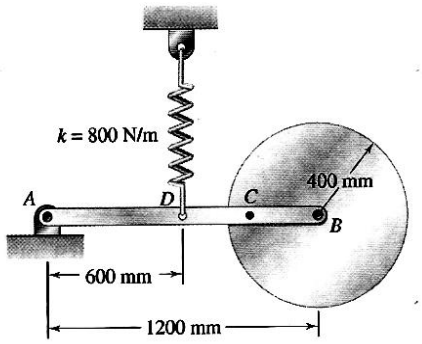
6. Una corredera de 5 kg descansa sobre un muelle sin estar unida a él. Se observa que si la misma se empuja 180 mm o más hacia abajo y se suelta pierde contacto con el muelle. Halle: (a) la constante del muelle, (b) la posición, velocidad y aceleración de la corredera 0,16 s después de haberse empujado 180 mm hacia abajo y soltado.



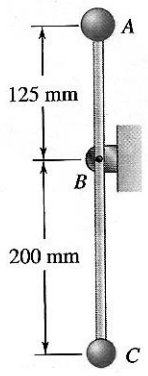
7. Una barra uniforme AB de 750 g está articulada en A y unida a dos muelle, ambos de constante k = 300 N/m. Halle: (a) la masa m del bloque C para que el período de las pequeñas oscilaciones sea 0,4 s, (b) Si el extremo se desplaza 40 mm y se suelta, halle la velocidad máxima del bloque C.



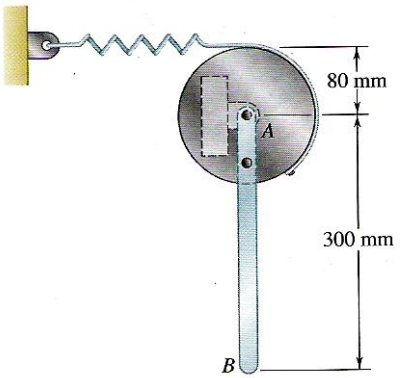
8. Una barra uniforme AB de 8 kg está articulada en A a un soporte fijo mediante los pasadores B y C a un disco de 12 kg y 400 mm de radio. El muelle sujeto en D mantiene el equilibrio de la barra el a posición representada. Si el punto B se mueve 25 mm hacia abajo y se suelta, halle: (a) el período de la vibración, (b) la velocidad máxima del punto B.



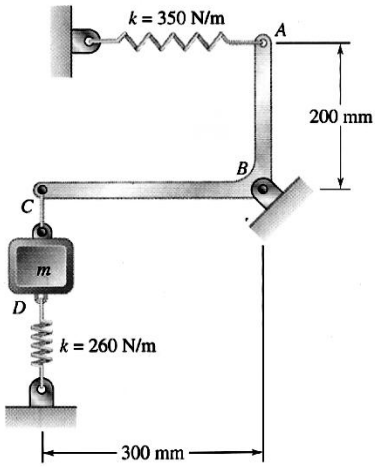
9. Una esfera A de 400 g y una esfera C de 280 g están unidas a los extremos de una varilla AC de 560 g que puede rotar en un plano vertical alrededor de un eje que pasa por B. Halle el período de las pequeñas oscilaciones de la varilla.



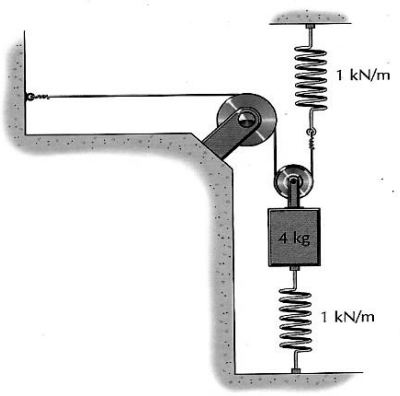
10. Una barra uniforme esbelta de 3 kg está atornillada a un disco uniforme de 5 kg. Al disco está sujeto un muelle de constante 280 N/m que está sin deformar en la posición representada. Si el extremo B de la varilla recibe un pequeño desplazamiento a la izquierda y se suelta, halle el período de la vibración del sistema.



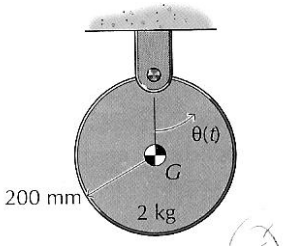
11. Un brazo ABC de 635 g está sujeto en B por un pasador y en C a un muelle: En C está conectado a una masa de 11,4 kg unida a un muelle. Sabiendo que ambos muelles pueden trabajar a compresión o a tracción, halle la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del sistema cuando la masa reciba un leve desplazamiento vertical y se suelta.



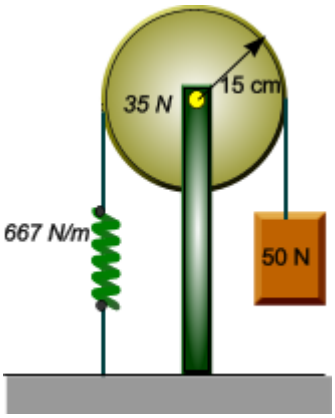
12. Una masa de 4 kg está suspendida en un plano vertical según se muestra. Los dos resortes están sometidos s y tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y sin fricción. Si se lleva a la masa a 15 mm por encima de su posición de equilibrio y se suelta con una velocidad de 750mm/s hacia abajo cuando t = 0. Halla: (a) La ecuación que rige al movimiento, (b) el periodo y la amplitud de la vibración resultante, (c) la posición de la masa en función del tiempo.



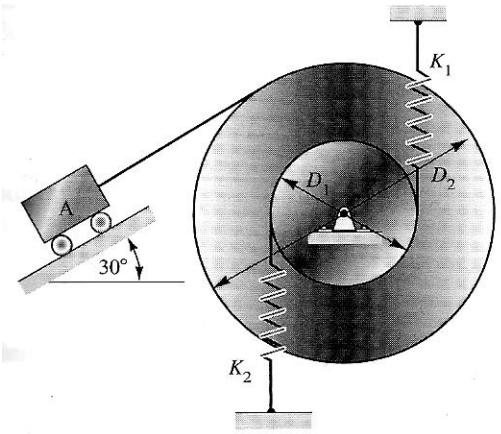
13. Un disco delgado de 2 kg y radio r = 200 mm pende por su borde de un pequeño pasador sin fricción, como se muestra en la figura. Escribir la e. D del movimiento para la posición angular θ(t) del disco y determinar el período y la frecuencia del movimiento vibratorio resultante.



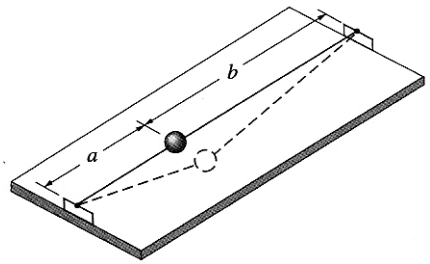
14. El hilo ligero atado al bloque de 50 N de la figura está arrollado a un cilindro uniforme de 35 N. Si el hilo no se desliza por el cilindro, escribir la e. D del movimiento para la posición y(t) del bloque de 50 N y determine el período y la frecuencia de la vibración resultante.



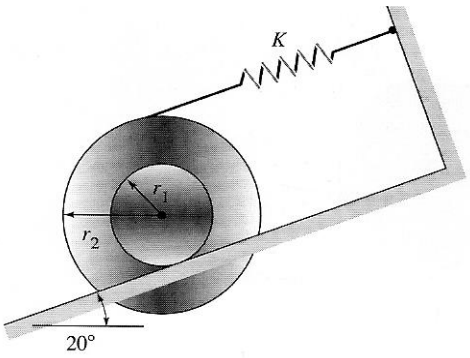
15. ¿Cuál es la frecuencia natural de vibración torsional del cilindro escalonado?. La masa del cilindro es de 45 kg y su radio de giro es de 0,46 m. Utilizar los datos siguientes: D_1 = 0,3 m; D_2 = 0,6 m; K_1 = 875 N/m; K_2 = 1800N/m y W_A = 178 N.



15. Dos cuerdas elásticas están unidas a una pelota de masa *m* y estiradas a una tensión inicial T. Si la pelota recibe un pequeño desplazamiento lateral y se suelta, determine la frecuencia de la vibración resultante.

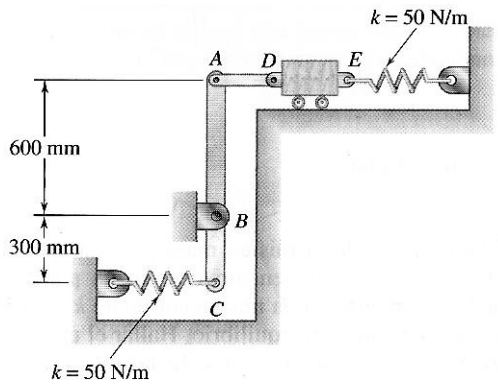


16. Un cilindro escalonado de 3 kg se mantiene sobre un plano inclinado mediante un muelle cuya constante es k = 400 N/m. El radio de giro del cilindro con respecto a su centro de masa es K_G = 125 mm; R_1= 100 mm y R_2 = 200 mm. Determine: (a) La ecuación diferencial del movimiento del carrete, (b) El período y la frecuencia para pequeñas oscilaciones.

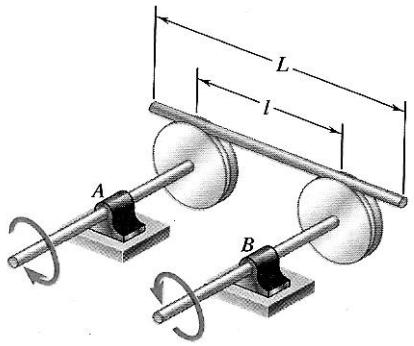


16. Una barra uniforme ABC de 2 kg está sujeta por un pasador en B y sujeta en C a un muelle. En A está conectada a un bloque DE de 2 kg, que puede rodar sin deslizar, unido a un muelle. Sabiendo que ambos muelles pueden trabajar a tracción o a compresión, determine la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del

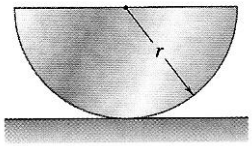
sistema cuando la barra se gira levemente y s suelta.



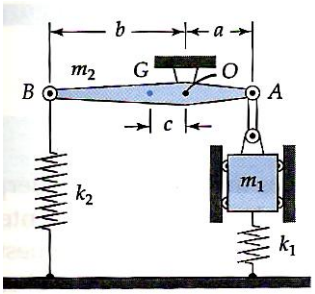
17. Sobre dos poleas A y B que rotan en sentidos opuestos descansa una barra de masa m y longitud L. Siendo μ_K el coeficiente de rozamiento cinético entre la barra y las poleas, halle la frecuencia de vibración si la barra recibe un leve desplazamiento hacia la derecha y se suelta.



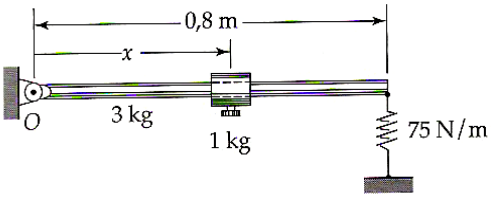
18. Sobre una superficie horizontal se deposita un semicilindro macizo y se le hace rotar un pequeño ángulo y se suelta. Suponiendo que rueda sin deslizar. Determine la frecuencia de sus oscilaciones pequeñas.



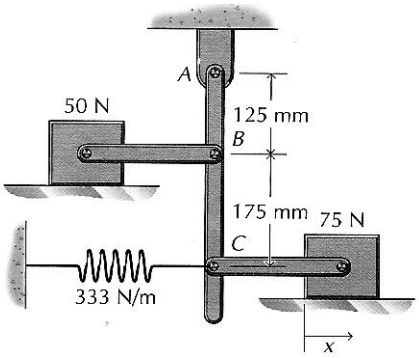
19. Hallar el período T del sistema si la pieza articulada AB de masa m_2 está horizontal en la Posición de equilibrio estático representada. El radio de giro de AB con respecto a O es K_0 y su centro de gravedad está ubicado en el punto G. Suponga pequeñas oscilaciones.



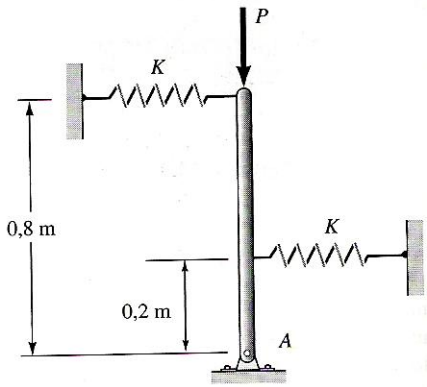
20. Una varilla delgada uniforme tiene una masa de 3 kg. Halle la posición *x* en que debe encontrarse el cursor de 1 kg de masa para que el período del sistema sea 0,9 segundos. Suponer pequeñas oscilaciones en torno a la posición horizontal de equilibrio representada.



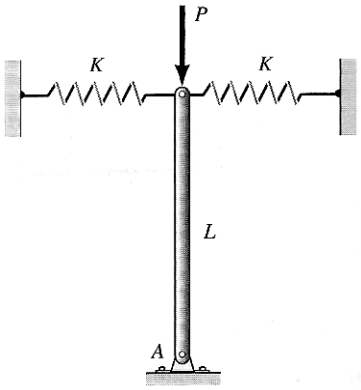
21. Los dos bloques mostrados en la figura se deslizan por sendas superficies horizontales sin fricción. Las barras de conexión tienen peso despreciable y en la posición de equilibrio, ABC está vertical. Supóngase oscilaciones de pequeña amplitud y determine. (a) la ecuación diferencial del movimiento del bloque de 75 N y (b) la pulsación propia de la oscilación.



22. Una barra de 1 m de longitud y 120 N de peso se mantiene en posición vertical mediante dos muelles idénticos cada uno de los cuales tiene una constante k igual a 50 000 N/m. ¿Qué fuerza vertical P hará que la frecuencia natural de la barra alrededor de A se aproxime a un valor nulo para pequeñas oscilaciones.

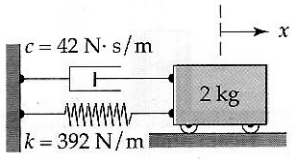


23. Una barra de masa *m* y longitud L está fija en la posición vertical mediante dos muelles idénticos cuya constante es K. Una carga vertical P actúa en el extremo superior de la barra ¿Qué valor de P, en función de *m, L* y *K*, hará que la barra tenga una frecuencia natural de oscilación alrededor de A próxima a cero para pequeñas oscilaciones?. ¿Qué significado físico tiene esto?

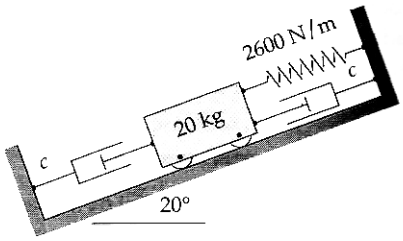


2.6.2. Vibraciones Amortiguadas.

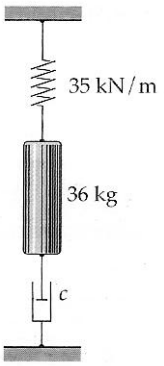
24. Halle el valor de la razón de amortiguamiento del dispositivo sencillo compuesto de una masa, amortiguador y resorte.



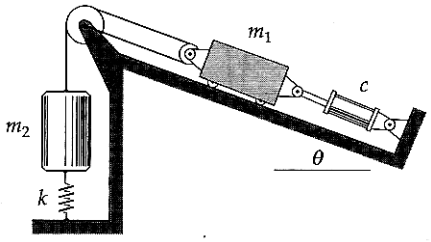
25. Halle el valor del coeficiente de amortiguamiento viscoso para el cual la razón de amortiguamiento del sistema vale. (a) 0,5 y (b) 1,0



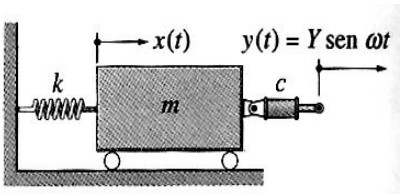
26. Halle el valor del coeficiente de amortiguamiento viscoso para el cual es crítico el amortiguamiento del sistema representado.



27. Halle la razón de amortiguamiento del sistema representado. Se desprecian las masas de las poleas y el rozamiento en las mismas y se supone que el cable está siempre tenso.

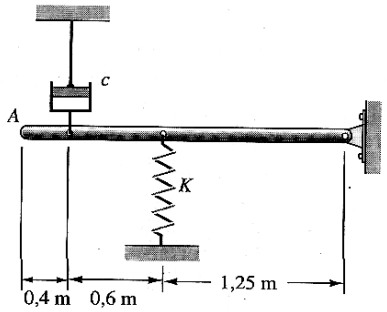


28. (a) Deduzca la ecuación diferencial de movimiento para el sistema que se muestra. (b) Determine la amplitud de la vibración de estado estable y el ángulo por el que x se atrasa a y si *m = 6 kg, k = 8 kN/m, c = 40 N.s/m, Y = 80 mm* y $\omega = 30$ *rad/s.*

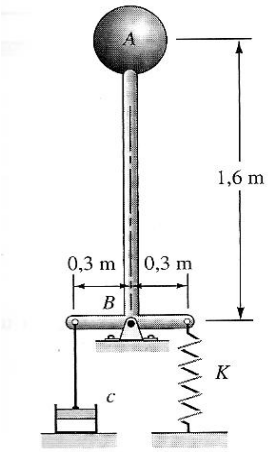


29. Se muestra una barra de 2,25 m de longitud y 250 N de peso en la posición de equilibrio estático y soportada por un muelle de rigidez k =12 N/mm. La barra está conectada a un amortiguador con un coeficiente de

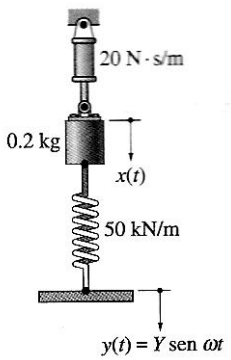
amortiguamiento c = 50 N.s/m. Si un momento impulsivo proporciona a la barra una velocidad angular en el sentido de las agujas del reloj de 0,5 rad/s en la posición que se muestra. ¿Cuál será la posición angular de A para t = 0,2 s?.



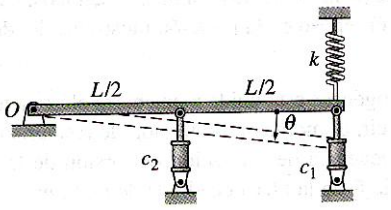
30. Una bola esférica de 134 N de peso está soldada a una barra ligera vertical que, a su vez, está soldada en el punto B a una biela horizontal. Un muelle de rigidez k = 8,8 N/mm y un amortiguador c = 179 N.s/m está conectados a la biela horizontal. Si A se desplaza 75 mm hacia la derecha, ¿Cuánto tiempo tardará en volver a la configuración vertical?.



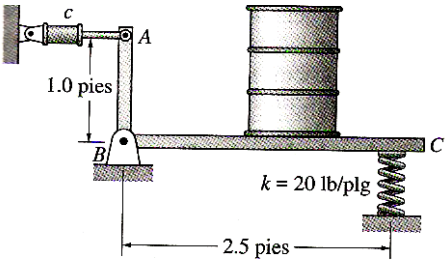
31. Encuentre la expresión para le respuesta de estado estable x(t) del bloque si *Y = 10 mm* ω *= 600 rad/s.* ¿Se adelanta o se atrasa *x(t)* al desplazamiento impuesto *Y(t)*?.



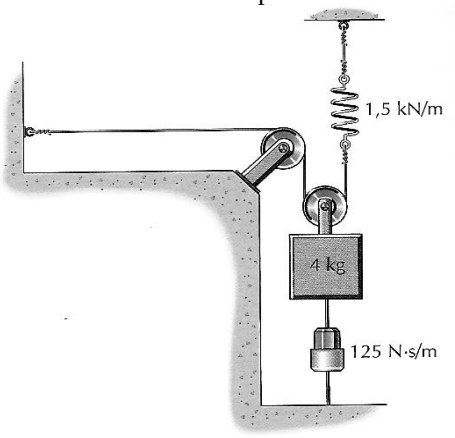
32. La barra uniforme de masa m está en equilibrio en la posición horizontal. (a) Deduzca la ecuación diferencial de movimiento para pequeñas oscilaciones de la barra. (b) Determine la razón de amortiguamiento si m = 16 kg; c_1 = 30 N.s/m; c_2 = 20 N.s/m;y k = 90 N/m.



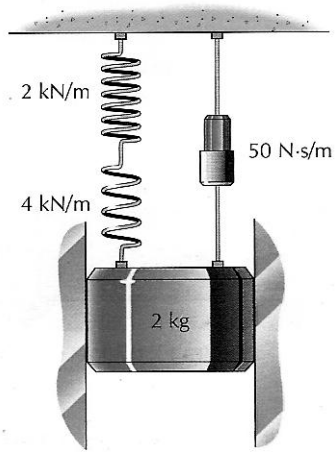
33. La plataforma, soportada por un pasador en B y un muelle en C, está en equilibrio en la posición que se muestra. Cuando el amortiguador viscoso situado en A se desconecta, la frecuencia del sistema para pequeñas oscilaciones es 2,52 Hz. Determine el coeficiente de amortiguamiento c que amortiguará críticamente al sistema.



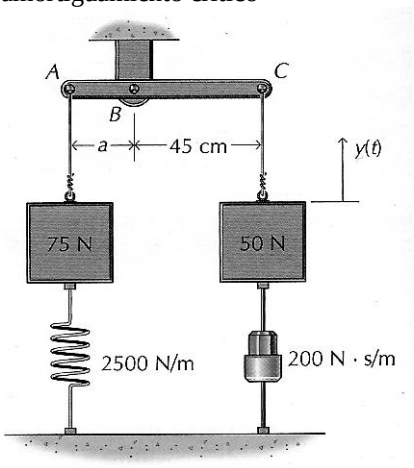
34. Una masa de 4 kg pende en un plano vertical como se ve en la figura. El resorte se halla sometido a tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y sin fricción. Si se desplaza la masa 15 mm por encima de su posición de equilibrio y se suelta dándole una velocidad hacia debajo de 0,75 m/s cuando t = 0, determine: (a) La ecuación diferencial que rige al movimiento, (b) El período de la vibración resultante y (c) la posición de la masa en función del tiempo.



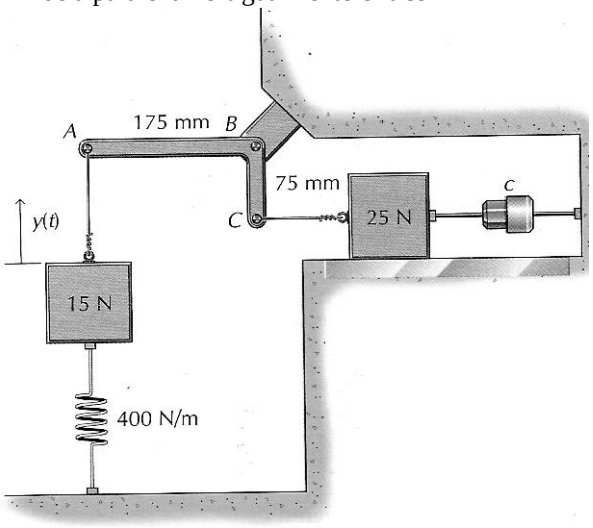
35. Una masa de 2 kg pende, en el plano vertical, de dos muelles, como se muestra en la figura. Si se desplaza la masa 5 mm por debajo de su posición de equilibrio y se suelta dándole una velocidad hacia arriba de 20 mm/s cuando t = 0, determine: (a) la ecuación diferencial que rige al movimiento; (b) El período de la vibración resultante; (c) la posición de la masa en función del tiempo.



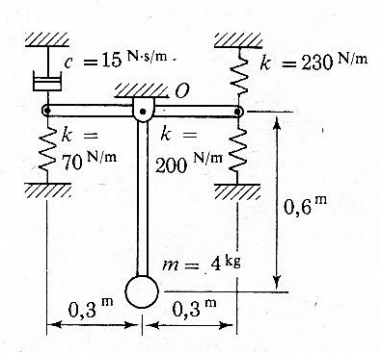
36. Los dos bloques de la figura penden, en un plano vertical, de una barra de masa despreciable que está horizontal en la posición de equilibrio. Si a = 15 cm y se suponen oscilaciones de pequeña amplitud, determine: (a) La ecuación diferencial del movimiento; (b) La razón de amortiguamiento; (c) El tipo de movimiento ; (d) El período de la vibración resultante (si procede) y (c) El valor de a para el amortiguamiento crítico



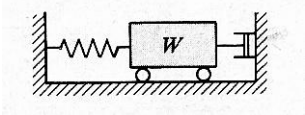
37. El bloque de 25 N de peso de la figura se desliza por una superficie horizontal sin fricción mientras que el que pesa 15 N pende en un plano vertical. La barra ABC tiene una masa despreciable y en la posición de equilibrio tiene su brazo AB horizontal. Si c = 250 N.s/m y se supone oscilaciones pequeñas, determine: : (a) La ecuación diferencial del movimiento; (b) La razón de amortiguamiento; (c) El tipo de movimiento ; (d) El período de la vibración resultante (si procede) y (c) El valor de a para el amortiguamiento crítico



38. La barra rígida en forma de T y de masa despreciable mostrada en la figura gira en un plano vertical alrededor de un eje horizontal que pasa por e punto O. El equilibrio del sistema se perturba girando la barra y liberándola del reposo. Calcule la frecuencia amortiguada y la razón entre los ciclos primer y tercero.



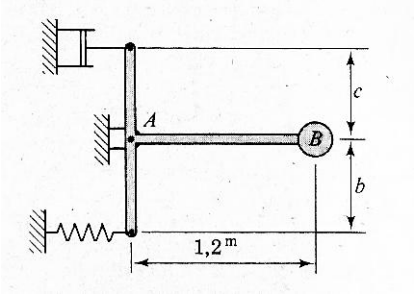
39. El sistema de la figura está compuesto por el cuerpo W de 45 kg, un resorte cuya constante es 650 N/m y un amortiguador viscoso cuyo coeficiente es 200 N.s/m. Determine el coeficiente de amortiguamiento crítico y el decremento logarítmico.



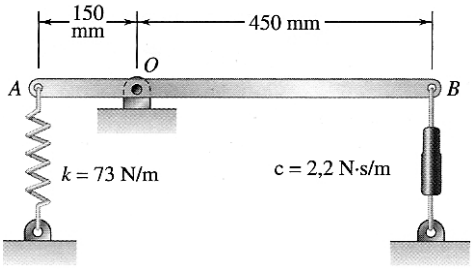
40. La masa del cuerpo en forma de T del sistema de la figura es despreciable y la masa del cuerpo B es de 30 kg, el modulo del resorte es 1200 N/m y el coeficiente de amortiguamiento es 270N.s/m. El sistema está en equilibrio AB se encuentra horizontal. Suponga que b = c =

0,6 m y calcule, para el movimiento que se produce al perturbar el equilibrio, (a) El tipo de movimiento que se desarrolla, (b) La frecuencia de la oscilación si procede y (c) La razón de amortiguamiento.

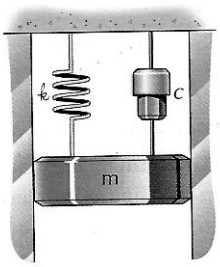
41.



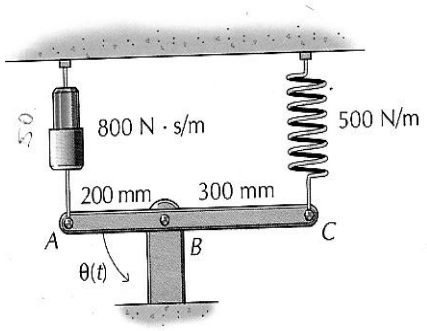
42. Una barra uniforme de 1,6 kg está articulada en O y sujeta en A por un muelle y en B está unida a un amortiguador. Halle: (a) La ecuación diferencial del movimiento para pequeñas oscilaciones, (b) El ángulo que forma la barra con la horizontal 5 segundos después de empujar la barra 23 mm hacia abajo y soltarla.



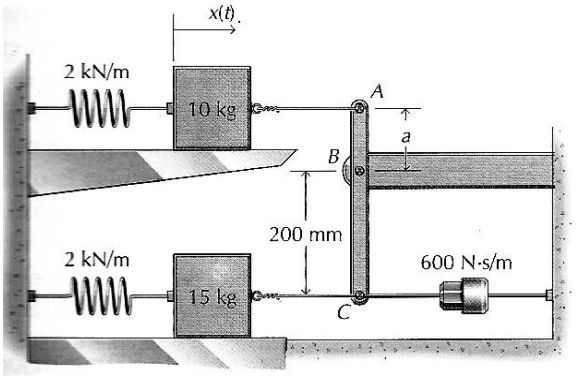
43. Se quiere determinar el coeficiente de amortiguamiento c de un amortiguador observando la oscilación de un bloque de 50N de peso que pende de él según se muestra en la figura. Cuando se tira hacia abajo el bloque y se suelta, se observa que la amplitud de la vibración resultante disminuye de 125 mm a 75 mm en 20 ciclos de oscilación. Determine el valor de c si los 20 ciclos se completan en 5 s.



44. Una barra esbelta uniforme de 2 kg y 500 mm de longitud gira alrededor del pivote exento de fricción situado en B, como se muestra en la figura. En la posición de equilibrio la barra es horizontal. Determine: determine: (a) La ecuación diferencial del movimiento; (b) La razón de amortiguamiento; (c) El tipo de movimiento ; (d) El período de la vibración resultante (si procede) y (c) El valor de a para el amortiguamiento crítico

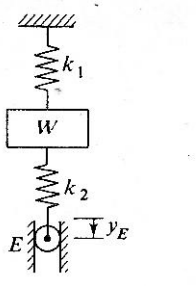


45. Las dos masas mostradas en la figura se deslizan por superficies sin fricción. En la posición de equilibrio la barra ABC está vertical, siendo despreciable la masa. Si a = 100 mm y se suponen oscilaciones de pequeña amplitud, determine: (a) La razón de amortiguamiento; (b) El tipo de movimiento; (c) La frecuencia y el período del movimiento (si procede) y (d) El valor de a que da amortiguamiento crítico.

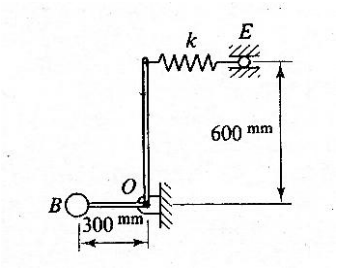


2.6.3 Vibraciones forzadas.

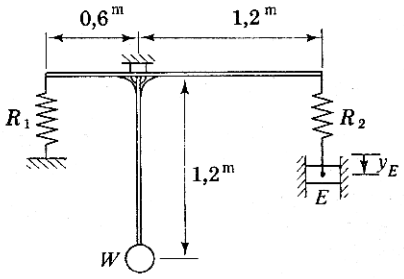
46. El sistema mostrado está compuesto por un cuerpo W de 4 kg y dos resortes de constantes k_1 = 350 N/m y k_2 = 250N/m. El desplazamiento de E es armónico y está dado por $y_E = 1{,}2\cos 2t$, donde y_E y t se expresan en metros y segundos, respectivamente. Determine la amplitud de la vibración estable de W.



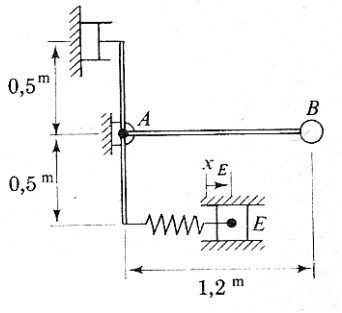
47. En la figura se muestra la forma como se sustenta a una esferita de 25 kg. La masa de la barra es despreciable y la constante del resorte es k = 400 N/m. El movimiento del rodillo E es armónico y está dado por $y_E = 12\cos 7t$, donde y_E y t se expresan en milímetros y segundos, respectivamente. Obtenga la solución estable que describe el movimiento de B.



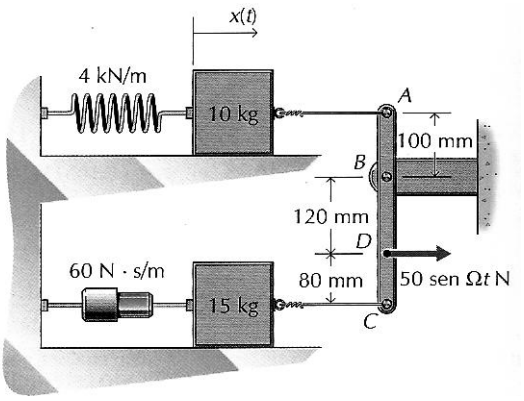
48. El movimiento del bloque E de la figura es armónico y lo define la ecuación $y_E = 0{,}15\ sen10t$, donde y_E y t se expresan en metros y segundos, respectivamente. La constante de R_1 es 150 N/m y la constante de R_2 es 250 N/m. Se considera despreciable la masa de las barras que soportan al cuerpo W de 15 kg. Halle la solución estable que describe el movimiento del sistema.



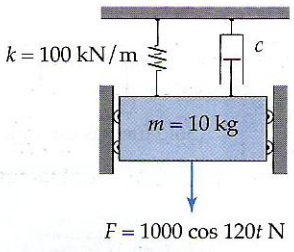
49. El sistema representado en la figura se ajusta para que se encuentre en equilibrio cuando AB esté horizontal y x_E sea igual a cero. La masa del cuerpo B es 25 kg, la constante del resorte es 1200 N/m y el valor del coeficiente de amortiguamiento es c = 300 nN.s/m. La posición del punto E varía de acuerdo con la ecuación $x_E = 0{,}125\ sen\ 5t$, donde x_E y t se expresan en metros y segundos, respectivamente. Determine la amplitud del movimiento de B y su velocidad máxima.



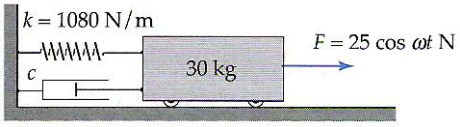
50. Las dos masas de la figura se deslizan por superficies horizontales lisas. La barra ABC es de masa despreciable y está vertical en la posición de equilibrio. Si al punto D de la barra se aplica una fuerza P(t) = 50 senΩt N, determine la máxima amplitud de la oscilación estacionaria del bloque de 10 kg.



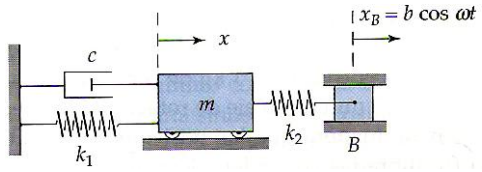
51. Hallar la amplitud X del movimiento estacionario de la masa de 10 kg si (a) c = 500 N.s/m y (b) c = 0.



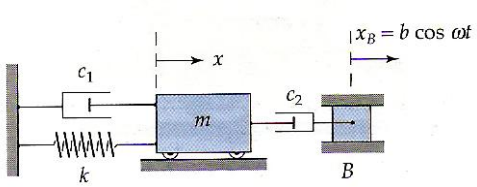
52. El carro de 30 kg está sometido a la acción de una fuerza arónica como se indica. Si c = 0, determine los límites permitidos a la pulsación excitadora ω de modo que la amplitud de la respuesta estacionaria sea inferior a 75 mm.



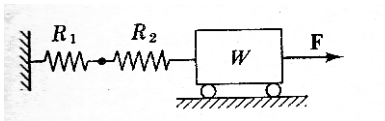
53. El elemento de fijación B recibe un movimiento horizontal $x_B = b\ cos\ \omega t$. deducir la ecuación del movimiento de a masa m y determine la pulsación crítica para la cual las oscilaciones se vuelven extremadamente grandes.



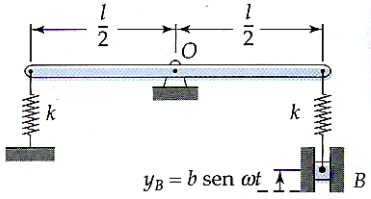
54. El elemento de fijación B recibe un movimiento horizontal $x_B = b\ cos\ \omega t$. deducir la ecuación del movimiento de a masa m y determine la pulsación crítica para la cual las oscilaciones se vuelven extremadamente grandes. Halle también la razón de amortiguamiento.



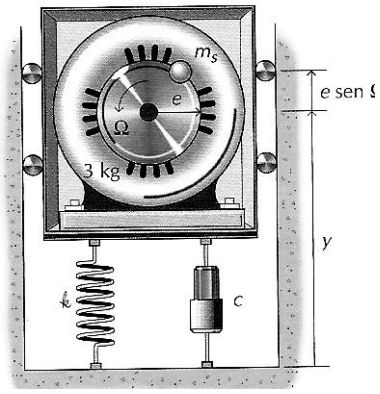
55. El cuerpo W de 30 kg mostrado en la figura se une a la pared mediante los resortes R_1 z R_2cuzos módulos son 1 kN/m y 400 N/m, respectivamente. La fuerza F expresada en newtons varía con la ley F = 10 sen 2t, donde t es el tiempo en segundos. (a) obtenga la solución estable que describe el movimiento de W, (b) Determine la velocidad máxima de W.



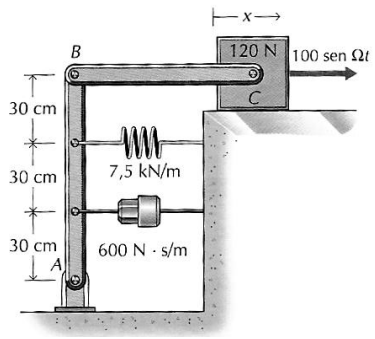
56. La barra uniforme de masa m y longitud L tiene un eje de oscilación en su centro. E resorte de constante k de la izquierda está sujeto a una superficie inmóvil, pero el de la derecha, también de constante k, lo está a un soporte sometido a un movimiento armónico dado por $y_B = b\ sen\ \omega t$. halla la pulsación excitadora de resonancia.



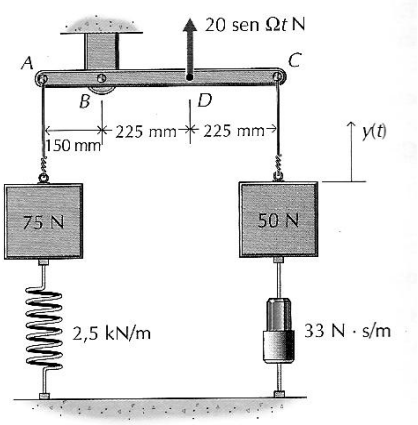
57. El motor de 3 kg descansa sobre un resorte (k = 150 kN/m) y un amortiguador (c = 120 N. s/m) según se indica en la figura. En el borde de la polea del motor (e = 25 cm) está fija una pequeña masa (m = 0,5 kg). Determine la máxima amplitud de la vibración forzada resultante del motor.



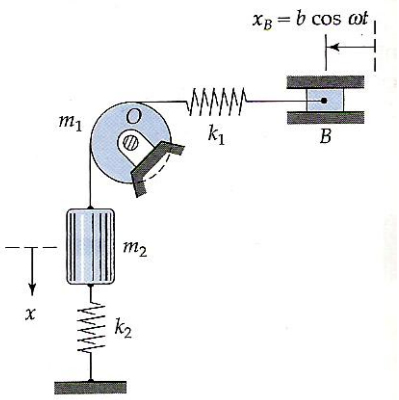
58. El bloque que pesa 12 N se desliza por una superficie sin fricción tal como se indica en la figura. El resorte tiene una longitud natural cuando la barra AB está vertical y BC horizontal. Las masas de las barras son despreciables. Suponiendo pequeñas oscilaciones, determine: (a) El dominio de pulsaciones Ω para el cual el movimiento angular estacionario de la barra AB es inferior a $\pm 5^o$ (b) La posición del bloque en función del tiempo si se desplaza 5 cm hacia la derecha y se suelta a partir del reposo cuando t = 0 y Ω= 25 rad/s.



59. Los dos bloques de la figura penden en un plano vertical, de una barra de masa despreciable que está horizontal en la posición de equilibrio. Si se le aplica al punto D de la barra una fuerza hacia arriba (P = 20 sen Ωt) N, determine: (a) La máxima amplitud de la oscilación estacionaria del bloque de 50 N; (el dominio de pulsaciones Ω que hay que evitar para que la amplitud de la oscilación del bloque de 50 N no supere los 37,5 mm.



60. La polea cilíndrica maciza y homogénea tiene una masa m_1 y un radio r. Si el pnto de fijación B está sometido al desplazamiento armónico indicado, escribir la ecuación diferencial del movimiento del sistema en función de la variable *x*. La cuerda que enlaza la masa m_2 al resorte superior no resbala en la polea.



61. (a) Deduzca la ecuación diferencial de movimiento para el sistema que se muestra. (b) Determine la amplitud de la vibración de estado estable y el ángulo por el que *x* se atrasa a *y* si m = 6 kg, k = 8 kN/m, c = 40 N.s/m, Y = 80 mm y ω =30 rad/s.

