

CAPITULO II

CAMPO ELECTRICO



2.1 INTRODUCCIÓN

La noción de campo es una idea de amplia importancia en descripción de un conjunto de fenómenos físicos. Un campo es una función o conjunto de funciones que representa por ejemplo a cada componente de un vector, definida en todos los puntos en un espacio dado de coordenadas y que asocia determinada cantidad física a cada punto en el espacio.

Los campos con que se trabajan son múltiples, uno de ellos lo constituye la temperatura, es decir en todo punto del espacio existe una temperatura única en un tiempo t , expresada por la función $T(x, y, z, t)$, otra magnitud es la densidad de una sustancia fluida $\rho(x, y, z, t)$. Ambas cantidades forman los llamados campos escalares. Además de éstos campos existen los llamados campos vectoriales, es decir magnitudes vectoriales las cuales quedan definidas completamente asociándoles un vector único a cada punto del espacio. Son ejemplos de esta clase el viento en la atmósfera terrestre. En cada punto de la atmósfera el aire tendrá una velocidad \vec{V} , cuyas componentes son funciones de la posición y del tiempo, esto es $V_x(x, y, z, t)$; $V_y(x, y, z, t)$ y $V_z(x, y, z, t)$; . En el caso de que se trate de un campo de fuerzas este viene a ser aquella región del espacio en donde se dejan sentir los efectos de fuerzas a distancia. Así, la influencia gravitatoria sobre el espacio que rodea a la tierra se hace visible en cualquiera de sus puntos se sitúa, a modo de detector, una masa de prueba y se mide su peso, es decir la fuerza con que la tierra lo atrae. Dicha influencia se conoce como campo gravitacional terrestre $\vec{g}(x, y, z)$. De un modo análogo en física se introduce la noción de campo eléctrico $\vec{E}(x, y, z)$, y el de campo magnético $\vec{B}(x, y, z)$, etc.

En este capítulo presentaremos y desarrollaremos el concepto del campo eléctrico que producen cargas estáticas y aprenderemos algunos de los modos en los que nos puede ser útil. Asimismo, se continuará empleando la noción de campo en los capítulos posteriores, porque forma la base de la comprensión de muchos efectos eléctricos y magnéticos.

2.2 INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO.

Es sabido que la principal fuente de los campos eléctricos son las distribuciones de cargas eléctricas, positivas o negativas en reposo o con un movimiento muy pequeño situadas en una región del espacio en donde se dejan sentir sus efectos. Por tanto, si en un punto cualquiera del espacio en donde está definido un campo eléctrico se coloca una carga de prueba o carga testigo q_0 , se observará la aparición de fuerzas eléctricas, es decir la carga de prueba experimentará atracciones o repulsiones. Por ejemplo si consideramos una carga puntual fija $+Q$, tal como se muestra en la figura 2.1a, ésta producirá un campo en el espacio que lo circunda, ello se ve reflejado cuando colocamos a la carga de prueba q_0 en dicho espacio, se observa que ésta última experimenta fuerzas repulsivas radiales. Si ahora remplazamos a la carga $+Q$ por otra negativa $-Q$, la carga testigo experimentará fuerzas de atracción (véase la figura 2.1b), Por lo tanto, decimos que existe un campo eléctrico en una región del espacio si una carga en reposo denominada carga de prueba experimenta una fuerza de origen eléctrico.

El vector intensidad de campo eléctrico \vec{E} , en un punto en el espacio caracterizado por las coordenadas (x, y, z, t) , está definido como la fuerza eléctrica \vec{F} que actúa sobre una carga de prueba positiva colocada en este punto, dividida por la magnitud de la carga de prueba q_0 . Esto es

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \frac{\vec{F}(x, y, z, t)}{q_0}, \quad q_0 \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

Debe notarse que \vec{E} es el campo externo a q_0 – no es el campo producido por q_0 . Debido a que el campo eléctrico es la fuerza por unidad de carga de prueba, la unidad de \vec{E} en el SI es el newton/coulomb (N/C). Además, debe observarse que la dirección del campo es la misma que el de la fuerza eléctrica ya que asumimos \vec{F} actúa sobre una carga $+q_0$. Por otro lado, una vez que se conoce la intensidad de campo eléctrico en algún punto, es posible determinar a partir de la ecuación (2.1), la fuerza sobre cualquier partícula cargada, que se coque es ese punto. Esto es

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (2.2)$$

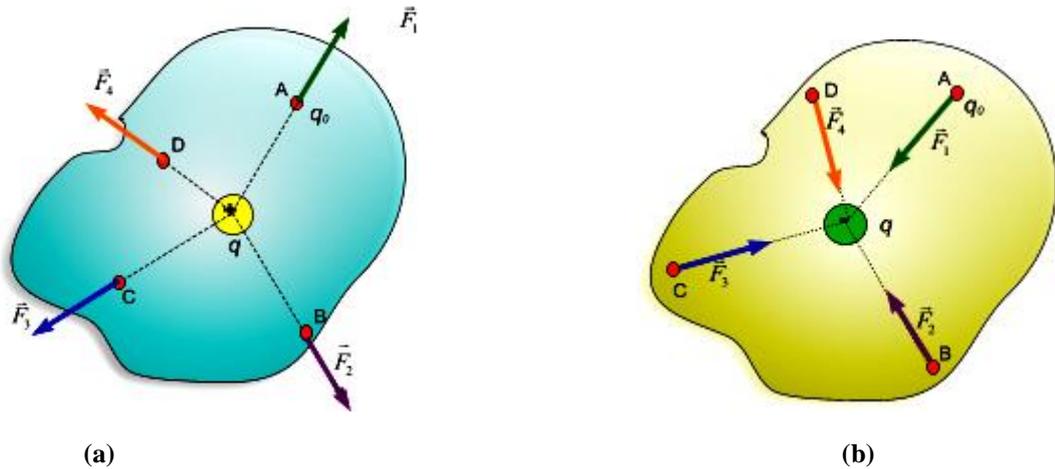


Fig. 2.1 (a) Campo eléctrico generado por una carga puntual positiva, (b) Campo eléctrico generado por una carga puntual negativa

Al aplicar la ecuación (2.1) debe suponerse que la carga de prueba o testigo debe ser lo suficientemente pequeña de tal modo que no perturbe la distribución de carga que produce la intensidad de campo eléctrico.

2.3 INTENSIDAD DE CAMPO ELECTRICO DE UNA CARGA PUNTUAL

Consideremos inicialmente el caso de una carga puntual fija $+q$ ubicada en una región del espacio tal como se muestra en la figura 2.2, y una carga testigo q_0 situada en el punto $P(x, y, z)$ a una distancia r de la carga q . De acuerdo a la ley de Coulomb, la fuerza sobre la carga de prueba es

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \hat{r}$$

Donde \hat{r} , es un vector unitario dirigido desde q hacia q_0

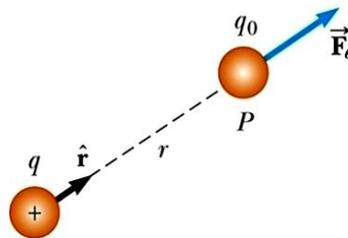


Fig. 2.2 Fuerza eléctrica ejercida por q sobre la carga testigo q_0 .

La intensidad de campo eléctrico en el punto P, debido a la carga q ubicada en el origen de coordenadas es

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \frac{\hat{r}}{q_0}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{e}_r \tag{2.3}$$

Donde q , es la carga que produce el campo y \hat{r} , es un vector unitario dirigido desde q hacia la carga q_0 . Si q es positiva, el campo está dirigido radialmente hacia afuera (figura 2.3a) mientras que si q es negativa el campo eléctrico está dirigida hacia ella (figura 2.3b).



Fig. 2.3. Campo eléctrico generado por cargas puntuales: (a) positiva. (b) negativa

Si la carga que genera el campo no está en el origen de coordenadas, es decir está ubicada por ejemplo en el punto $A(x, y, z)$, tal como se muestra en la figura 2.4, la intensidad de campo eléctrico en el punto $P(x, y, z)$, es

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_A|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}_A) \tag{2.4}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\overline{AP}|^3} (\overline{AP}) \tag{2.5}$$

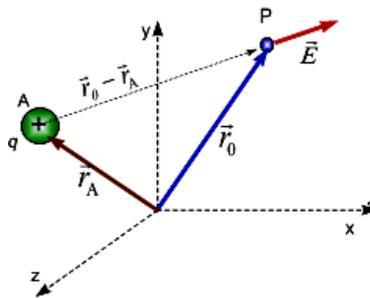


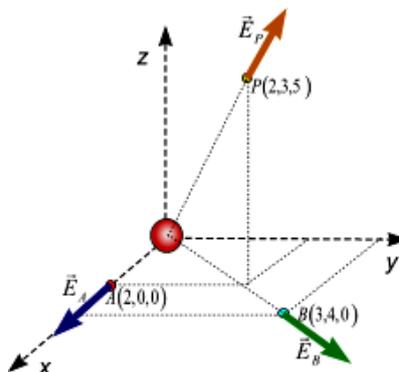
Fig. 2.4. Campo eléctrico generado por una carga puntual positiva fija en un punto fuera del origen.

Ejemplo 2.1

Una carga de $4 \mu\text{C}$ está en el origen. Determine el valor del campo eléctrico en: (a) $A(2,0,0)$ m, (b) $B(3,4,0)$ m y (c) en $P(2,3,5)$ m.

Solución

En la figura se muestra la ubicación de la carga y los puntos correspondientes



(a) El campo en el punto A esta dado por

$$\vec{E}_A = k \frac{q}{|\overline{OA}|^3} (\overline{OA}) = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-6}}{2^3} (2\vec{i}) = (4,5 \cdot 10^3 \text{ N/C})\vec{i}$$

(b) El campo eléctrico en B es

$$\vec{E}_B = k \frac{q}{|\overline{OB}|^3} (\overline{OB}) = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-6}}{5^3} (3\vec{i} + 4\vec{j}) = \left(\frac{108}{125} \cdot 10^3 \text{ N/C}\right)\vec{i} + \left(\frac{144}{125} \cdot 10^3 \text{ N/C}\right)\vec{j}$$

(c) El campo eléctrico en el punto P

$$\vec{E}_P = k \frac{q}{|\overline{OP}|^3} (\overline{OP}) = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-6}}{(2^2 + 3^2 + 5^2)^{3/2}} (2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k})$$

$$\vec{E}_P = \left(\frac{72}{\sqrt{38}} \cdot 10^3 \text{ N/C}\right)\vec{i} + \left(\frac{108}{\sqrt{38}} \cdot 10^3 \text{ N/C}\right)\vec{j} + \left(\frac{180}{\sqrt{38}} \cdot 10^3 \text{ N/C}\right)\vec{k}$$

2.4 INTENSIDAD DE CAMPO ELECTRICO DE UNA DISTRIBUCIÓN DISCRETA DE CARGA.

Para determinar la intensidad d campo eléctrico debido a un sistema de cargas puntuales $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$, mostrado en la figura 2.5, primero se determina la intensidad de campo eléctrico en el punto $P(x, y, z)$ producido por cada una de las cargas utilizando la ecuación (2,4) o (2.5) y posteriormente se procede a realizar la suma vectorial. En otras palabras el campo eléctrico total debido a un sistema de cargas puntuales es igual al vector resultante de la suma de los vectores campo eléctrico de todas las cagas.

Este principio de superposición para campos eléctricos matemáticamente se escribe

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_i + \dots + \vec{E}_n = \sum \vec{E}_i \tag{2.6}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^n \frac{q}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}_i) \tag{2.7}$$

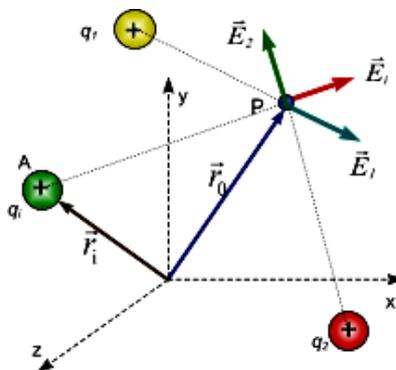


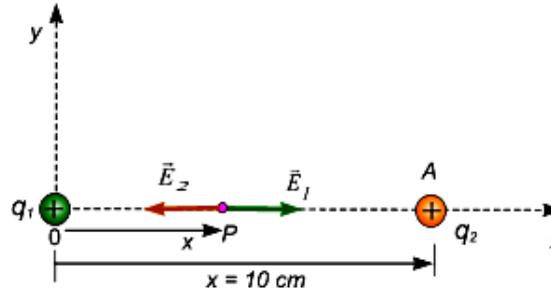
Fig. 2.5. Campo eléctrico generado por un sistema de cargas puntuales.

Ejemplo 2.2 Campo eléctrico de una carga puntual en puntos de espacio

Una carga de $5 \mu\text{C}$ se coloca en $x = 0$ y otra de $10 \mu\text{C}$ es colocada en $x = 10 \text{ cm}$. Encuentre el punto o puntos sobre el eje x donde el campo eléctrico es nulo. ¿Existen otros puntos $E = 0$?

Solución.

En la figura se muestra la ubicación de las cargas en el plano xy .



Los campos eléctricos en P son

$$\vec{E}_1 = k \frac{q_1}{r_1^2} \vec{i} = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-6}}{x^2} \vec{i} = \frac{45 \cdot 10^3}{x^2} \vec{i} \text{ (N/C)}$$

$$\vec{E}_2 = k \frac{q_2}{r_2^2} (-\vec{i}) = -9 \cdot 10^9 \frac{10 \cdot 10^{-6}}{x^2} \vec{i} = -\frac{90 \cdot 10^3}{(0,1-x)^2} \vec{i} \text{ (N/C)}$$

El campo total en el punto P será

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(\frac{45 \cdot 10^3}{x^2} - \frac{90 \cdot 10^3}{(0,1-x)^2} \right) \vec{i}$$

La condición del problema exige que el campo resultante en P deba ser nulo, entonces

$$\frac{45 \cdot 10^3}{x^2} = \frac{90 \cdot 10^3}{(0,1-x)^2} \Rightarrow x^2 + 0,2x + 0,01 = 0$$

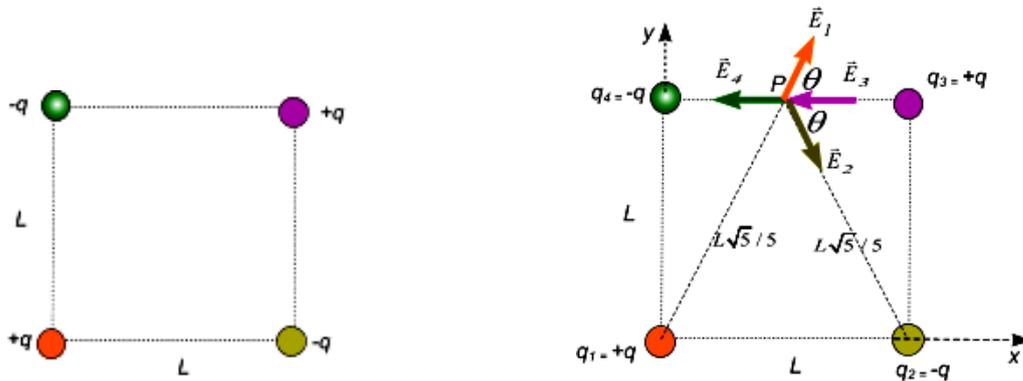
$$x = +4,14 \text{ cm}$$

Respecto a si existen otros puntos en los cuales el campo eléctrico puede ser cero, la respuesta es NO

Ejemplo 2.3. Campo eléctrico de un sistema de cargas puntuales

Cuatro cargas del mismo valor están dispuestas en los vértices de un cuadrado de lado L , como se muestra en la figura. Demostrar que el campo eléctrico debido a las cuatro cargas en el punto medio de uno de los lados del cuadrado está dirigido a lo largo de dicho lado hacia la carga negativa y que su valor es.

$$E = \frac{8kq}{L^2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{25} \right)$$

**Solución.**

Para demostrar lo solicitado, escojamos el punto P mostrado en la figura y tracemos los campos correspondientes. Los campos eléctrico en el punto P (punto medio del lado son

$$\vec{E}_1 = \frac{kq_1}{r_1^2} (\cos \theta \vec{i} + \text{sen} \theta \vec{j}) = \frac{kq}{r^2} (\cos \theta \vec{i} + \text{sen} \theta \vec{j})$$

$$\vec{E}_2 = \frac{kq_2}{r_2^2} (\cos \theta \vec{i} - \text{sen} \theta \vec{j}) = \frac{kq}{r^2} (\cos \theta \vec{i} - \text{sen} \theta \vec{j})$$

$$\vec{E}_3 = -\frac{kq_3}{r_3^2} \vec{i} = -\frac{kq}{r_3^2} \vec{i}$$

$$\vec{E}_4 = -\frac{kq_4}{r_4^2} \vec{i} = -\frac{kq}{r_4^2} \vec{i}$$

El campo resultante en el punto P será

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

$$\vec{E} = \left[\frac{2kq}{r^2} \cos \theta - \frac{kq}{r_3^2} - \frac{kq}{r_4^2} \right] \vec{i} + 0 \vec{j} = \left[\frac{2kq}{\left(\frac{L\sqrt{5}}{2}\right)^2} \frac{L}{2} - \frac{kq}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} - \frac{kq}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \right] \vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{8kq}{L^2} \left(\frac{\sqrt{5}}{25} - 1 \right) \vec{i}$$

El modulo del campo será

$$|\vec{E}| = \frac{8kq}{L^2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{25} \right)$$

2.5 INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO DE UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA.

En la sección anterior se mostró la forma como calcular \vec{E} , de una carga puntual utilizando la ley de Coulomb, así mismo se obtuvo el campo eléctrico neto debido a un sistema de cargas puntuales utilizando el principio de superposición. Sin embargo, existe un conjunto de problemas en los cuales las cargas están muy cercanas entre sí en comparación con las distancias a los puntos donde se quiere determinar la intensidad de campo eléctrico. En estas situaciones puede considerarse al sistema como un continuo.

Para determinar la intensidad de campo eléctrico de una distribución continua de carga (barra, disco, esfera, etc.) se aplica el siguiente procedimiento. En primer lugar, se divide a la distribución de carga en pequeños elementos, cada uno de los cuales contiene una pequeña carga $\Delta q \rightarrow dq$, los que se comportan como cargas puntuales (véase la figura 2.6). A continuación se aplica la ley de Coulomb para calcular el campo eléctrico debido a uno de estos elementos en el punto correspondiente $P(x, y, z)$. Por último se determina la intensidad de campo eléctrico total en el punto P sumando (integrando) las contribuciones de todos los elementos de carga.

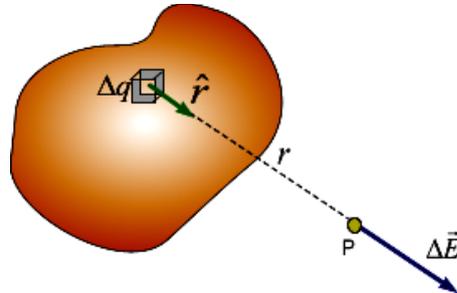


Fig. 2.6. Campo eléctrico debido a un elemento de carga Δq en un punto P.

Es decir, el campo eléctrico debido al elemento de carga dq está dado por la ley de Coulomb la carga puntual

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} \tag{2.8}$$

Donde, r es la distancia de dq al punto P y \hat{r} el vector unitario correspondiente. Usando el principio de superposición, el campo eléctrico total es el vector suma (integral) de todas las contribuciones infinitesimales

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r} \tag{2.9}$$

2.5.1 Campo eléctrico de una distribución lineal de carga.

Si la carga eléctrica es distribuida sobre una línea de longitud l , entonces la densidad de carga λ es

$$\lambda(\vec{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta q}{\Delta l} \right) = \frac{dq}{dl} \tag{2.10}$$

Donde la dimensión de λ es carga por unidad de longitud (C/m). La carga total es la integra sobre la longitud completa

$$Q = \int_{lon} \lambda(\vec{r}) dl \tag{2.11}$$

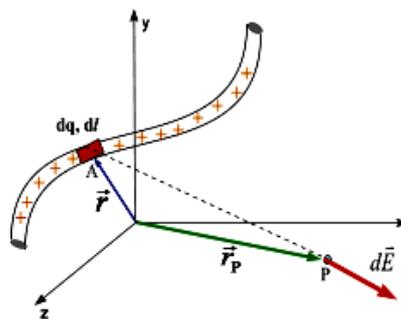


Fig. 2.7. Campo eléctrico debido a una distribución lineal de carga

Para determinar el campo eléctrico de la distribución lineal, se divide a la distribución de carga en elementos de carga dq y longitud dl , como se muestra en la figura 2.7 y a continuación se determina el campo $d\vec{E}$ producido por dq en el punto P, esto es

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\overline{AP}|^3} (\overline{AP}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(\vec{r})dl}{|\overline{AP}|^3} (\overline{AP}) \quad (2.12)$$

El campo total será

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(\vec{r})dl}{|\overline{AP}|^3} (\overline{AP}) \quad (2.13)$$

2.5.2 Campo eléctrico de una distribución superficial de carga.

En una manera similar, la carga eléctrica puede ser distribuida sobre una superficie de área A con una densidad de carga superficial σ , dada por

$$\sigma(\vec{r}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta q}{\Delta A} \right) = \frac{dq}{dA} \quad (2.14)$$

Donde la dimensión de σ es carga por unidad de área (C/m^2). La carga total en la superficie completa es

$$Q = \iint_A \sigma(\vec{r})dA \quad (2.15)$$

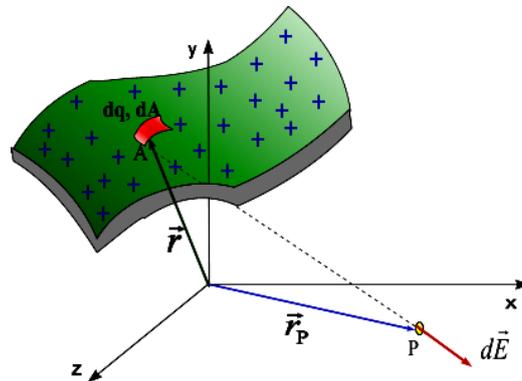


Figura 2.8. Campo eléctrico debido a una distribución superficial de carga.

Para determinar el campo eléctrico de la distribución superficial, se divide a la distribución de carga en elementos de carga dq y área dA , como se muestra en la figura 2.8, y a continuación se determina el campo $d\vec{E}$ producido por dq en el punto P, es decir

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\overline{AP}|^3} (\overline{AP}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(\vec{r})dA}{|\overline{AP}|^3} (\overline{AP}) \quad (2.16)$$

El campo total será

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_A \frac{\sigma(\vec{r})dA}{|\overline{AP}|^3} (\overline{AP}) \quad (2.17)$$

2.5.3 Campo eléctrico de una distribución volumétrica de carga.

Supongamos que se tiene una distribución volumétrica de carga y se desea obtener el campo eléctrico en algún punto O. Para lograr este objetivo consideremos un pequeño elemento de volumen ΔV_i , el cual contiene una carga Δq_i , la distancia entre cargas dentro del volumen elemental ΔV_i es mucho menor que la distancia entre ΔV_i y P. En el límite cuando ΔV_i llega a ser infinitesimalmente pequeño podemos definir una densidad de carga volumétrica en la forma

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta q}{\Delta V} \right) = \frac{dq}{dV} \quad (2.18)$$

La dimensión de $\rho(\vec{r})$ es carga por unidad de volumen (C/m^3). La carga total en la superficie completa es

$$Q = \sum \Delta q_i = \iiint_V \rho(\vec{r}) dV \quad (2.19)$$

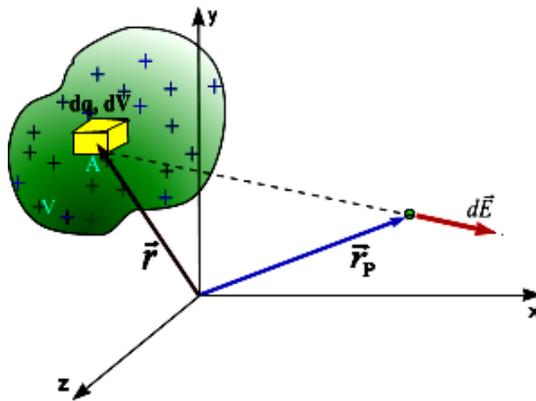


Figura 2.9. Campo eléctrico debido a una distribución volumétrica de carga

Para determinar el campo eléctrico de la distribución superficial, se divide a la distribución de carga en elementos de carga dq y área dV , como se muestra en la figura 2.9 y a continuación se determina el campo $d\vec{E}$ producido por dq en el punto P, es decir

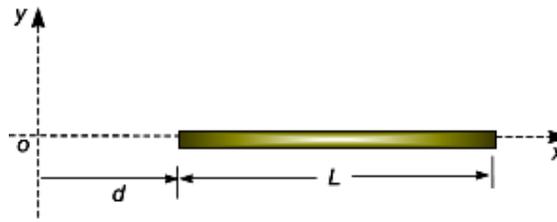
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\overline{AP}|^3} (\overline{AP}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r})dV}{|\overline{AP}|^3} (\overline{AP}) \quad (2.20)$$

El campo total será

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r})dV}{|\overline{AP}|^3} (\overline{AP}) \quad (2.21)$$

Ejemplo 2.4 Campo de una varilla con carga no uniforme en el origen de coordenadas

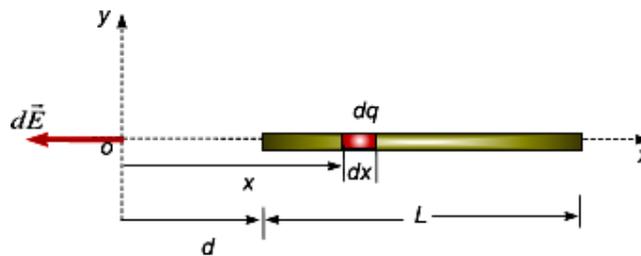
Una línea de carga de longitud L está ubicada a lo largo del eje x como se muestra en la figura y tiene una densidad de carga por unidad de longitud que varía como $\lambda(x) = \frac{\lambda_0(x-d)}{d}$, donde λ_0 es una constante. Determine el campo eléctrico en el origen de coordenadas.



Solución

La densidad de carga lineal no es uniforme y está dada por $\lambda(x) = \frac{\lambda_0}{d}(x-d)$. La cantidad de carga contenida en un pequeño segmento diferencial de longitud dx , mostrado en la figura es

$$dq = \lambda(x)dx = \frac{\lambda_0}{d}(x-d)dx$$



El campo eléctrico producido por dq en el punto O será

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^2} \hat{r} = k \frac{\frac{\lambda_0}{d}(x-d)dx}{x^2} (-\vec{i})$$

$$d\vec{E} = -\frac{k\lambda_0}{d} \frac{(x-d)}{x^2} dx \vec{i}$$

El campo debido a la varilla completa se obtiene integrando la expresión anterior

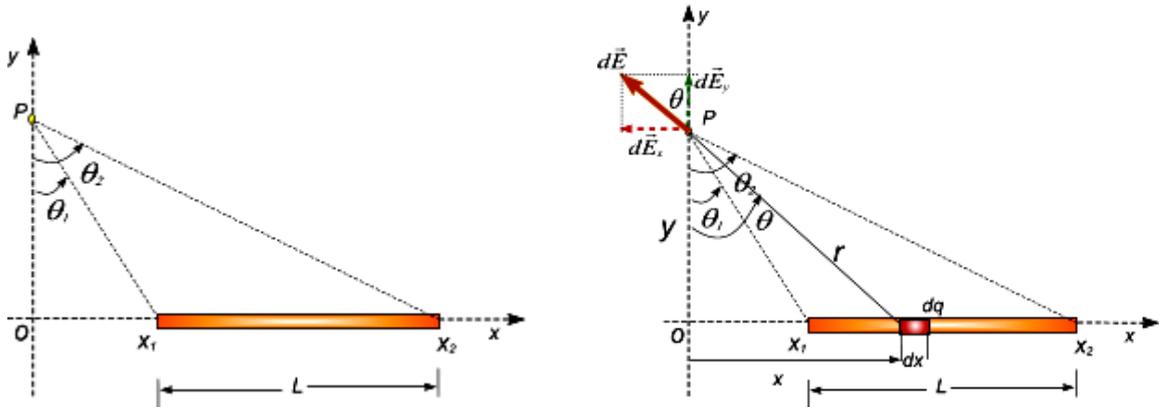
$$\vec{E} = \int d\vec{E} = -\frac{k\lambda_0}{d} \int_d^{L+d} \frac{(x-d)}{x^2} dx \vec{i} = -\frac{k\lambda_0}{d} \left[\int_d^{L+d} \frac{dx}{x} - d \int_d^{L+d} \frac{dx}{x^2} \right] \vec{i}$$

$$\vec{E} = -\frac{k\lambda_0}{d} \left[\ln x + \frac{d}{x} \right]_d^{L+d} \vec{i} = -\frac{k\lambda_0}{d} \left[\ln \left(\frac{L+d}{d} \right) + \frac{d}{L+d} - 1 \right] \vec{i}$$

$$\vec{E} = -\frac{k\lambda_0}{d} \left[\ln \left(\frac{L+d}{d} \right) - \frac{L}{L+d} \right] \vec{i}$$

Ejemplo 2.5 Campo de una varilla con carga uniforme en puntos sobre el eje y

Una barra no conductora de longitud L con una densidad de carga uniforme λ y una carga total Q está localizada a lo largo del eje x , como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en el punto P, localizado a una distancia y del eje que contiene a la barra.



Solución

Dividimos a la varilla en elementos diferenciales dq de longitud dx , ubicados a una distancia x del punto O como se muestra en la figura (b), entonces la carga de dicho elemento es

$$\lambda = \frac{dq}{dx} \rightarrow dq = \lambda dx$$

El campo eléctrico producido por el elemento dq en el punto P esta dado por

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^2} \hat{r} = k \frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)} (-\text{sen}\theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$$

Donde el vector unitario se ha escrito en componentes x e y dado por $\hat{r} = -\text{sen}\theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$.

El campo total se obtiene integrando la ecuación anterior pero en forma de componentes

Componente x

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)} \text{sen}\theta = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{xdx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Evaluando la integral y reemplazando los límites correspondientes se tiene

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y^2}} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \left[\frac{y}{\sqrt{x_2^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x_1^2 + y^2}} \right]$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

Componente y

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)} \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{ydx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Evaluando la integral y reemplazando los límites correspondientes se tiene

$$E_y = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0 y^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \left[\text{sen}\theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} (\text{sen}\theta_2 - \text{sen}\theta_1)$$

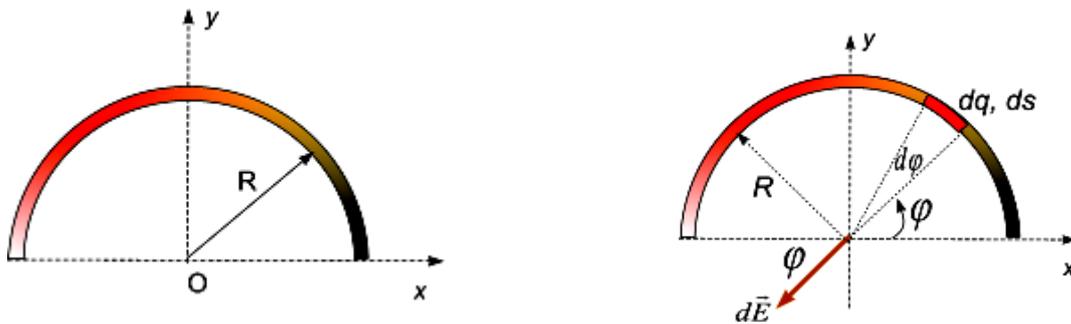
En el caso de una varilla infinita donde $x_1 \rightarrow -\infty$ y $x_2 \rightarrow +\infty$, con $x_i = y \tan\theta_i$, los ángulos correspondientes son $\theta_1 = -\pi/2$ y $\theta_2 = +\pi/2$. Remplazando estos valores en las ecuaciones de las componentes se tiene

$$E_x = 0$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \left(\text{sen} \frac{\pi}{2} - \text{sen} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}$$

Ejemplo 2.6 Campo de un arco de circunferencia con carga no uniforme

Un tubo delgado cargado positivamente tiene la forma de un semicírculo de radio R , como se muestra en la figura. La carga total sobre el semicírculo es Q . Sin embargo, la carga por unidad de longitud a lo largo del semicírculo es no uniforme y está dada por $\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$. Determine el campo eléctrico en el centro del semicírculo



Solución

Se divide a la distribución de carga en elementos infinitesimales de carga dq a un ángulo φ , de longitud ds como se muestra en la figura y su carga será

$$dq = \lambda(\varphi) ds = \lambda_0 \cos\varphi (R d\varphi) = \lambda_0 R \cos\varphi d\varphi$$

El campo eléctrico producido por el elemento de carga es

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{ds}{R^2} (-\text{sen}\varphi \vec{i} - \cos\varphi \vec{j}) = \frac{\lambda(R \cos\varphi d\varphi)}{4\pi\epsilon_0 R^2} (-\text{sen}\varphi \vec{i} - \cos\varphi \vec{j})$$

El campo eléctrico debido a la distribución de carga completa se obtiene sumando (integrando) la ecuación anterior.

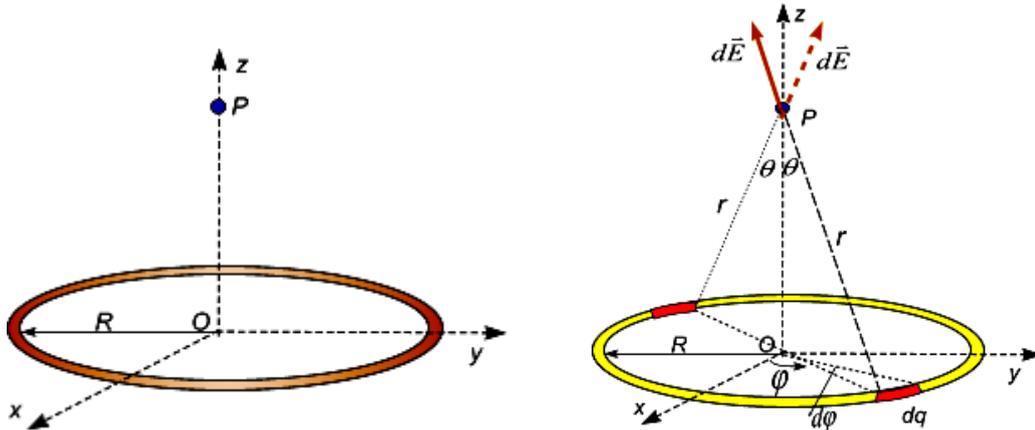
$$\vec{E} = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \left[\int_0^\pi \text{sen}\varphi \cos\varphi d\varphi \vec{i} + \int_0^\pi \cos^2\varphi d\varphi \vec{j} \right]$$

$$\vec{E} = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \left[\left. \frac{\text{sen}^2\varphi}{2} \right|_0^\pi \vec{i} + \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\text{sen}2\varphi}{2} \right) \Big|_0^\pi \vec{j} \right] = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \left(0\vec{i} + \frac{\pi}{2} \vec{j} \right)$$

$$\vec{E} = -\frac{\lambda_0}{8\pi\epsilon_0 R} \vec{j}$$

Ejemplo 2.7 Campo de un anillo

Un anillo no conductor de radio R con una densidad de carga λ y una carga total Q está localizado en el plano xy , como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en un punto P , localizado a una distancia z desde el centro del anillo a lo largo del eje de simetría



Solución

Dividimos al anillo cargado en elementos diferenciales dq de longitud $ds = R d\phi$, como se muestra en la figura (b). La carga del elemento es

$$\lambda = \frac{Q}{L_{Cir}} = \frac{dq}{ds} \rightarrow dq = \lambda ds = \lambda d(R\phi)$$

$$dq = \lambda R d\phi$$

El campo producido por el elemento diferencial en el punto P será

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi}{r^2} \hat{r}$$

Utilizando los argumentos de simetría observamos que las componentes horizontales se anulan mutuamente. Por lo tanto la única componente que queda es la componente z , esto es

$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi}{r^2} \cos \theta$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi}{(R^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\phi}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

El campo eléctrico total es la suma (integral) de la ecuación anterior

$$E_z = \frac{\lambda R z}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_C d\phi = \frac{\lambda R z (2\pi)}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{(2\pi R \lambda) z}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Donde la carga total es $Q = 2\pi R\lambda$. Analizando la ecuación anterior se ve que si $z \rightarrow 0$, el campo en el centro del anillo es nulo $E_O = 0$, además si $z \gg R$, el campo es

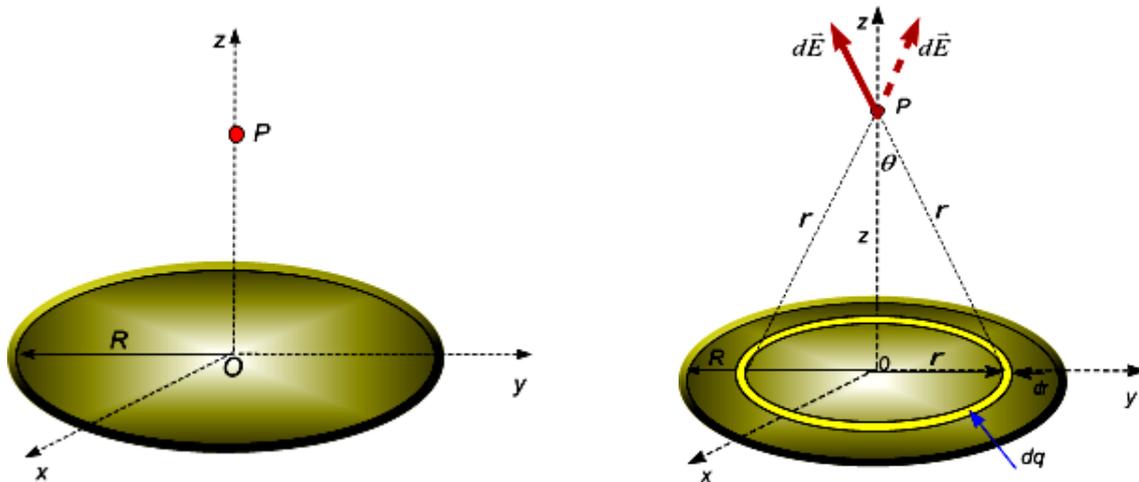
$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{\left[z^2 \left(\left(\frac{R}{z} \right)^2 + 1 \right) \right]^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{z^3}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2}$$

Resultado que debería esperarse pues si observamos el anillo desde una distancia muy grande el anillo se comporta como una partícula puntual.

Ejemplo 2.7 Campo de un disco.

Un disco de radio R uniformemente cargado con una carga total Q se encuentra en el plano xy , centrado en el origen de coordenada como se ve en la figura (a). Determine el campo eléctrico en el punto P, a lo largo del eje z y que pasa a través del centro del disco perpendicular al plano. Discutir el caso límite cuando $R \gg z$.



Solución

Se divide a la distribución de carga en elementos dq en forma de anillos de radio r y espesor dr tal como se muestra en la figura (b), entonces la carga dq está dada por

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA} \rightarrow dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r dr)$$

$$dq = 2\pi\sigma r dr$$

El campo producido por el anillo diferencial en el punto P será

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma r dr}{r^2} \hat{r}$$

Utilizando los argumentos de simetría observamos que las componentes horizontales se anulan mutuamente. Por lo tanto la única componente que queda es la componente z , esto es

$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma r dr}{r^2} \cos \theta$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma r dr}{(r^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

El campo eléctrico total es la suma (integral) de la ecuación anterior

$$E_z = \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(du/2)}{u^{3/2}} = \frac{\pi\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int u^{-3/2} du = \frac{\pi\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \frac{u^{-1/2}}{(-1/2)}$$

$$= -\frac{2\pi\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \Big|_0^R = -\frac{2\pi\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{1}{z} \right]$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]$$

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse

$$E_z = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] & \text{para } z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[-1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

Para determinar el campo para punto muy distantes se hace uso de la serie de Taylor

$$1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = 1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-1/2} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + \dots \right) \approx \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2}$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} = \frac{\sigma(\pi R^2)}{4\pi\epsilon_0 z^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

Este resultado es idéntico al obtenido para una carga puntual. Por otro lado, podemos evaluar el caso donde $R \gg 0$. Físicamente esto nos daría el campo de un plano infinito- El campo eléctrico en este límite es de la forma

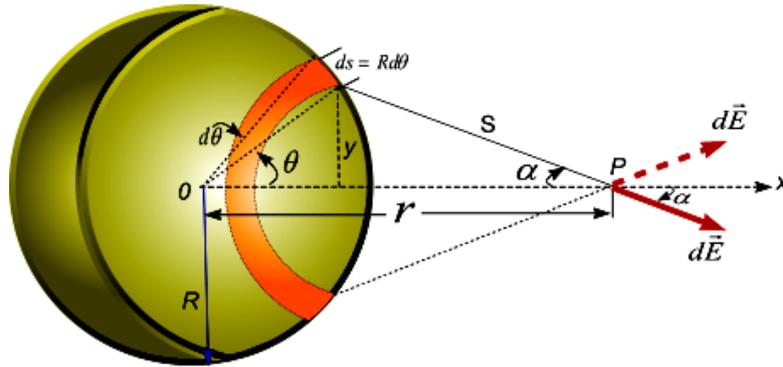
$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_n & \text{para } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_n & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2.7 Campo de un cascarón esférico

Una corteza delgada esférica de radio R posee una carga total Q con una densidad superficial uniforme de carga σ en la superficie. Determinar el campo eléctrico en términos de la distancia r desde el centro de la corteza.

Solución

Se divide a la distribución en elementos diferenciales de carga en forma de anillos de radio y , espesor ds y carga dq como se muestra en la figura.



El elemento diferencial tiene una carga dq dado por

$$dq = \sigma dA = \sigma(2\pi y)(Rd\theta) = \sigma(2\pi R \text{sen}\theta)(Rd\theta)$$

$$dq = 2\pi\sigma R^2 \text{sen}\theta d\theta \tag{a}$$

El campo eléctrico producido por el elemento diferencial dq en el punto P situado a una distancia r del centro del cascarón es

$$d\vec{E} = dE \cos \alpha \vec{i} - dE \text{sen} \alpha \vec{j} \tag{b}$$

La simetría de la distribución de carga exige que las componentes perpendiculares al eje x se cancelen mutuamente, entonces sólo queda la componente horizontal (radial)

$$d\vec{E} = dE \cos \alpha \vec{i} = k \frac{dq}{S^2} \cos \alpha \vec{i} \tag{c}$$

Reemplazando (a) en (c) se tiene

$$d\vec{E} = k \frac{2\pi\sigma R^2 \text{sen}\theta d\theta}{S^2} \cos \alpha \vec{i} \tag{d}$$

Antes de proceder a integrar la ecuación (d) es necesario eliminar dos de tres variables S , θ , y α . En este caso las variables se reemplazan en función de S

Aplicando la ley de cosenos en el triángulo OPA

$$S^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta \tag{e}$$

Derivando la expresión (e), tenemos

$$2SdS = 2rR \text{sen}\theta d\theta$$

$$\text{sen}\theta d\theta = \frac{SdS}{rR} \tag{f}$$

Una expresión para $\cos \alpha$ se obtiene aplicando la ley de cosenos

$$R^2 = S^2 + r^2 - 2rS \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{S^2 + r^2 - R^2}{2rS} \quad (g)$$

Remplazando el valor de las ecuaciones (e), (f) y (g) en (d), tenemos

$$d\vec{E} = \frac{2\pi k\sigma R^2 (SdS / rR)}{S^2} \left(\frac{S^2 + r^2 - R^2}{2rS} \right) \vec{i}$$

$$d\vec{E} = \frac{\pi k\sigma R}{r^2} \left[1 + \frac{(r^2 - R^2)}{S^2} \right] dS \vec{i} \quad (h)$$

El campo eléctrico debido a la corteza esférica completa en el punto P se obtiene integrando la ecuación (h) esto es

$$\vec{E} = \frac{\pi k\sigma R}{r^2} \int_{r-R}^{r+R} \left(1 + \frac{(r^2 - R^2)}{S^2} \right) dS \vec{i} = \frac{\pi k\sigma R}{r^2} \left(S - \frac{r^2 - R^2}{S} \right) \Bigg|_{r-R}^{r+R} \vec{i} \quad (i)$$

Remplazando los límites correspondientes resulta

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(\pi R^2)}{r^2} \vec{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{i} \quad (j)$$

Debido a que el punto P fue escogido arbitrariamente entonces el campo eléctrico de la distribución en cualquier punto del espacio es

$$\vec{E}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r \quad (k)$$

Donde \vec{e}_r es un vector unitario dirigido en dirección radial

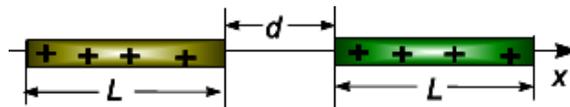
Para puntos interiores

$$\vec{E}_r = \frac{\pi k\sigma R}{r^2} \int_{R-r}^{R+r} \left(1 + \frac{(r^2 - R^2)}{S^2} \right) dS \vec{e}_r = \frac{\pi k\sigma R}{r^2} \left(S - \frac{r^2 - R^2}{S} \right) \Bigg|_{R-r}^{R+r} \vec{e}_r$$

$$\vec{E}_r = 0 \quad (l)$$

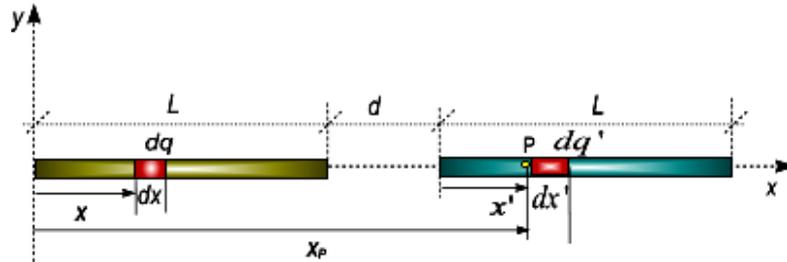
Ejemplo 2.8 Fuerza entre varillas cargadas

Dos cargas lineales uniformes e iguales de longitud L están situadas sobre el eje x separadas una distancia d como indica la figura. (a) ¿Cuál es la fuerza que una carga lineal ejerce sobre la otra?. (b) Demostrar que cuando $d \gg L$, la fuerza tiende al resultado esperado $k(\lambda L)^2/d^2$.



Solución

Aún cuando este ejemplo puede resolverse directamente mediante la aplicación de la ley de Coulomb a distribuciones continuas de carga. En esta sección se resuelve el problema usando la idea de campo eléctrico. Para ello dividimos a la primera varilla en elementos de carga $dq = \lambda dx$, ubicados a una distancia x del origen de coordenadas, que tiene un espesor dx , como se muestra en la figura y se evalúa el campo producido por este elemento en un punto arbitrario P de la segunda varilla ubicado a una distancia x_p del origen, después se integra esta expresión para determinar el campo resultante en dicho punto. Posteriormente se determina la fuerza ejercida por la primera varilla sobre un elemento $dq' = \lambda' dx'$ perteneciente a la segunda varilla y finalmente se procede a la suma (integración) para calcular la fuerza neta.



El campo producido por dq en el punto P está dado por

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^2} \vec{e}_r = k \frac{\lambda dx}{(x_p - x)^2} \vec{i} \quad (a)$$

El campo neto debido a la primera barra en P es la suma o integración de la ecuación (a)

$$\vec{E} = k\lambda \int_0^L \frac{dx}{(x_p - x)^2} \vec{i} = k\lambda \int_0^L (x_p - x)^{-2} dx \vec{i} \quad (b)$$

Para poder integrar se hace el cambio de variable, $u = x_p - x \rightarrow du = -dx$, con lo que se tiene

$$\vec{E} = -k\lambda \int u^{-2} du \vec{i} = \frac{k\lambda}{u} \vec{i} = \frac{k\lambda}{x_p - x} \Big|_0^L \vec{i} = k\lambda \left(\frac{1}{x_p - L} - \frac{1}{x_p} \right) \vec{i} \quad (c)$$

Del gráfico tenemos que $x_p = L + d + x'$, valor que al ser remplazado en la ecuación (c), da

$$\vec{E} = k\lambda \left(\frac{1}{L + d + x' - L} - \frac{1}{L + d + x'} \right) \vec{i}$$

$$\vec{E} = k\lambda \left(\frac{1}{d + x'} - \frac{1}{L + d + x'} \right) \vec{i} \quad (d)$$

La fuerza producida por la varilla izquierda sobre el elemento de carga dq' de longitud dx' es

$$d\vec{F}' = \vec{E} dq' = k\lambda \left(\frac{1}{d + x'} - \frac{1}{L + d + x'} \right) \vec{i} (dq') = k\lambda \left(\frac{1}{d + x'} - \frac{1}{L + d + x'} \right) (\lambda' dx') \vec{i} \quad (e)$$

La fuerza resultante se obtiene sumando (integrando) la ecuación (e) es decir.

$$\vec{F}' = k\lambda\lambda' \int_0^L \left(\frac{dx'}{d + x'} - \frac{dx'}{L + d + x'} \right) \vec{i}$$

$$\vec{F}' = k\lambda^2 \left[\ln(d+x') - \ln(L+d+x') \right]_0^L$$

$$\vec{F}' = k\lambda^2 \left[\ln(d+L) - \ln(d) - \ln(d+2L) + \ln(d+L) \right]$$

Simplificando obtenemos la fuerza entre varillas, esto es

$$\vec{F}' = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(d+L)^2}{d(d+2L)} \right] \vec{i} \quad \text{Rta.}$$

Parte (b). Para el caso de que $d \gg L$, primero se arregla la ecuación anterior esto es

$$F = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(d+L)^2}{d(d+2L)} \right] = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{\left[d \left(1 + \frac{L}{d} \right) \right]^2}{d \left[d \left(1 + \frac{2L}{d} \right) \right]} \right] = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{\left(1 + \frac{L}{d} \right)^2}{\left(1 + \frac{2L}{d} \right)} \right]$$

$$F = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \left[2 \ln \left(1 + \frac{L}{d} \right) - \ln \left(1 + \frac{2L}{d} \right) \right]$$

La función logaritmo se desarrolla en serie, esto es

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

$$F = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2L}{d} - \left(\frac{L}{d} \right)^2 + \dots - \frac{2L}{d} + 2 \left(\frac{L}{d} \right)^2 - \dots \right]$$

Tomando solamente los dos primeros términos, la ecuación simplificada para la fuerza es

$$F = \frac{\lambda^2 L^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

2.6 LÍNEAS DE CAMPO ELÉCTRICO

Las líneas de fuerza o también conocidas como líneas de campo, son líneas imaginarias que nos permiten visualizar las interacciones eléctricas que experimentan las cargas cuando se encuentran en el interior de un campo eléctrico, permitiendo de este modo una representación gráfica del campo eléctrico en el espacio. Michael Faraday (1791-1867) fue uno de los primeros en introducir una forma de visualizar los campos eléctricos en función de lo que llamó líneas de campo o líneas de fuerza, líneas que están relacionadas con el campo de la manera siguiente.

1. Las líneas de campo eléctrico se trazan de tal manera que la tangente a la línea de campo, en cada punto, especifique la dirección del campo eléctrico \vec{E} en ese punto.
2. La densidad espacial de las líneas del campo eléctrico en determinado punto es proporcional a la intensidad de campo eléctrico en ese punto. En consecuencia \vec{E} , es grande cuando las líneas están muy próximas entre sí y es pequeña cuando están separadas

El patrón de líneas de campo eléctrico puede ser obtenido mediante las consideraciones siguientes.

1. **Simetría.** Por cada punto sobre la línea de unión de las dos cargas existe un punto equivalente debajo de este. Por tanto, el patrón puede ser simétrico cerca de la línea de unión de las dos cargas.

2. **Campo cerca a la carga.** Muy cerca de la carga eléctrica, predomina el campo debido a la carga: Entonces, las líneas son radiales y de simetría esférica.
3. **Campo lejos de la carga.** El patrón de líneas de campo para puntos alejados del sistema de cargas podría ser semejante al de una carga puntual de valor $Q = \sum Q_i$. Así, las líneas podrían ser radialmente hacia afuera, al menos que $Q = 0$.
4. **Punto nulo.** Este es un punto en el cual $\vec{E} = 0$, es decir no podrán pasar líneas a través de dicho punto.

En la figura 2.9a, se muestra las líneas de campo para una carga puntual positiva, en ella se ve que las líneas están dirigidas radialmente hacia afuera, mientras que las líneas están dirigidas hacia el interior de la carga puntual negativa (figura 2.9b), en ambos caso observamos que el espaciado de las líneas está relacionado con la intensidad de campo. Es decir a medida que nos alejamos de las cargas el campo se debilita y las líneas se separan

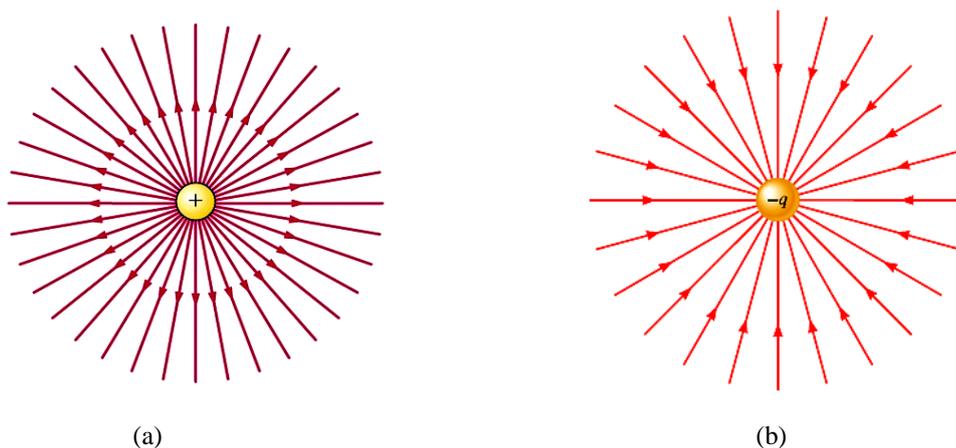


Fig. 2.9. (a) líneas de campo eléctrico de una carga puntual positiva, (b) líneas de campo eléctrico de una carga individual negativa.

En la figura 2,10a, se muestra las líneas de fuerza para dos cargas puntuales positivas que llevan igual carga q y están separadas por un distancia pequeña. El gráfico indica que en puntos cercanos a las cargas el campo se debe únicamente a la carga sola. Estas líneas también muestran la repulsión.

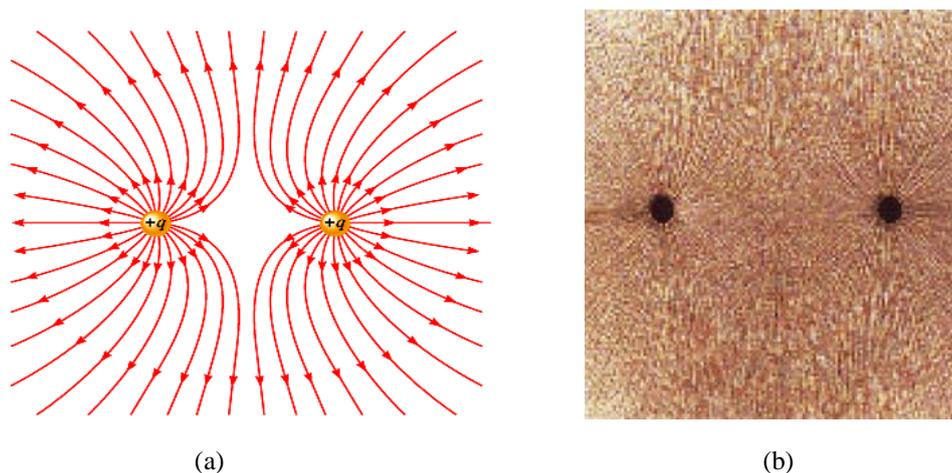


Fig. 2.9. (a) Líneas de campo eléctrico correspondientes a dos cargas puntuales positivas, las flechas se invertirán si son negativas (b) esquema obtenido en el laboratorio usando trozos de hilo en aceite.

Los criterios usados en los ejemplos para trazar líneas de campo permiten general graficar las líneas de fuerza para cualquier distribución. Sin embargo, resumimos a continuación algunas propiedades de las líneas de campos eléctricos como sigue:

- La dirección del vector campo eléctrico \vec{E} en un punto dado es tangente a la línea de campo.
- El número de líneas por unidad de área que atraviesa una superficie perpendicular a la dirección de la línea, es proporcional a la magnitud del campo eléctrico en una región dada.
- Las líneas de campo comienzan en las cargas positivas (o en el infinito) y terminan en las cargas negativas o en el infinito.
- El número de líneas que tienen su origen o terminan en una carga negativa es proporcional a la magnitud de la carga
- Dos líneas de fuerza nunca se cruzan. Porque si lo hicieran el campo en un mismo punto tendría dos direcciones diferentes, lo que es imposible.

Es importante señalar que las líneas de campo no tienen existencia física real. Estas líneas solo se utilizan para describir cualitativamente el campo eléctrico. Para terminar con el estudio de las líneas de fuerza analicemos el caso de dos partículas de igual magnitud pero de signo opuesto y situadas a una distancia muy pequeña una de la otra. A esta configuración se le da el nombre de **dipolo eléctrico**. En la figura 2.10a, se muestran sus líneas de campo, esta indica que el número de ellas que nacen en la carga positiva es igual al número de líneas que entra en la carga negativa. Debe observarse además que el campo es más intenso entre las cargas. La figura 2.10b, muestra una animación del campo eléctrico para un dipolo, aquí una vez más se observa la atracción entre la carga negativa (azul) y la carga positiva (amarilla).

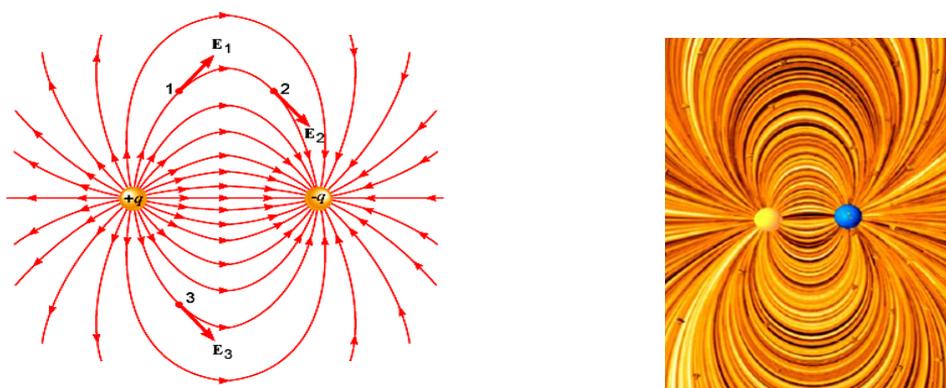
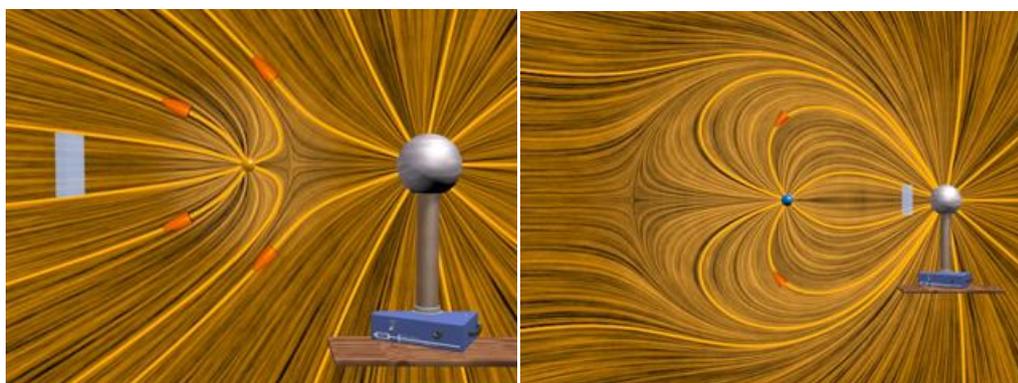


Fig. 2.10. (a) esquema de las líneas de campo eléctrico producidas por un dipolo; líneas de fuerza de dos cargas puntuales (azul negativa y amarilla positiva).

Finalmente a modo de aplicación cualitativa discutamos la importancia de los campos eléctricos en el estudio de las interacciones eléctricas. La Figura 2.11a, ilustra la fuerza repulsiva experimentada por dos objetos debido a sus campos eléctricos. El sistema consta de una esfera metálica cargada en el espacio (cabeza del generador de Van de Graaff). El otro objeto es una esfera pequeña cargada la cual es libre de moverse (desprecie la acción gravitatoria). Según la ley de Coulomb, estas dos cargas, se repelen mutuamente. Es decir la esfera pequeña experimenta una fuerza repulsiva hacia afuera del generador de Van de Graaff.



(a)

(b)

Fig. 2.10. (a) Dos cargas del mismo signo que se repelen entre sí debido a la tensión transmitida por campos eléctricos. (b) Dos cargas de signo opuesto que se atraen entre sí debido a la tensión transmitida por campos eléctricos.

Observe que, la animación muestra la existencia de campos eléctricos así como el movimiento de la esfera pequeña. Por otro lado, la figura 2.10b, muestra la interacción entre dos objetos con carga de signos opuestos. De acuerdo con la ley de Coulomb los objetos se atraen entre sí y la esfera pequeña siente una fuerza atractiva hacia el generador. El punto de vista de estas dos animaciones es subrayar el hecho de que la fuerza de Coulomb entre dos cargas no es de “acción a distancia”. Por el contrario, la tensión es transmitida mediante “contacto” directo e inmediato del generador de van de Graaff y su medio circundante, a través del campo eléctrico de la carga en el generador de van de Graaff. La tensión es entonces transmitida de un elemento del espacio a un elemento vecino, en una manera continua hasta que es transmitida a la región del espacio contiguo a la esfera pequeña, y por último a la esfera pequeña en sí. Aun cuando las dos esferas pequeñas no están en contacto directo una con otra, ellas están en contacto directo con un medio o mecanismo que existe entre ellas. La fuerza entre la esfera pequeña y el generador de van de Graaff es transmitida (a una velocidad finita) mediante la tensión inducida en el espacio interviniente por su presencia.

2.7 FUERZA SOBRE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO ELECTRICO.

Consideremos una carga $+q$ moviéndose entre dos placas paralelas cargadas con carga de signo opuesto, como se muestra en la figura 2.11.

Supongamos que el campo eléctrico entre las placas es $\vec{E} = -E_y\vec{j}$, con $E_y > 0$. (En el capítulo III mostraremos que el campo eléctrico en la región entre dos placas infinitamente grandes de cargas opuestas es uniforme). La carga experimentará una fuerza de Coulomb descendente, dada por

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

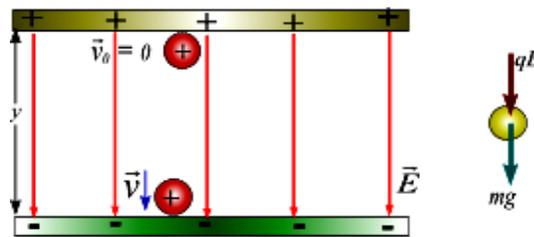


Fig. 2.11. (a) Movimiento de una carga puntual en interior de un campo eléctrico uniforme. (b) diagrama de cuerpo libre de carga puntual positiva.

Tenga en cuenta la distinción entre las cargas que está experimentando una fuerza y las cargas de las placas las cuales son las fuentes del campo eléctrico. Debido a que la carga móvil es también fuente de campos eléctricos, por la tercera ley de Newton, la carga puntual no puede ejercer una fuerza sobre sí misma. Por tanto, \vec{E} es el campo que solamente surge debido a las cargas en las placas.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, una fuerza neta provocara una aceleración en la carga móvil dada por

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a}_y \\ \vec{F}_e + \vec{F}_g &= m\vec{a}_y \\ -qE\vec{j} - mg\vec{j} &= m\vec{a}_y \Rightarrow -(qE + mg)\vec{j} = m\vec{a}_y \\ \vec{a}_y &= -\left(\frac{qE}{m} + g\right)\vec{j} \end{aligned}$$

Si la fuerza gravitacional (peso) de la carga es muy pequeño comparado con la fuerza eléctrica, lo cual es una buena aproximación para el caso de partículas fundamentales como electrones y protones, entonces la ecuación anterior se escribe

$$\vec{a}_y = -\left(\frac{qE}{m}\right)\vec{j}$$

Asumiendo que la partícula está en reposo ($v_0 = 0$) cuando abandona la placa positiva, la velocidad final con la cual impacta en la placa negativa es

$$v = \sqrt{2|a_y|y} = \sqrt{2\frac{qE}{m}y}$$

Donde y es la distancia entre las placas. La energía cinética con la cual la partícula impacta la placa es

$$E_k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\left(\frac{qE}{m}\right)y}\right)^2 = \frac{qE}{m}y$$

Ejemplo 2.8 Experimento de Millikan

Una gota de aceite de radio $r = 1,64 \cdot 10^{-6}m$ y densidad de masa $\rho_{aceite} = 851 kg/m^3$ es dejada caer desde el reposo y entonces entra dentro de una región donde existe un campo eléctrico externo uniforme \vec{E} aplicado en dirección descendente. La gota de aceite tiene una carga eléctrica q desconocida (debido a la irradiación por rayos X). La magnitud del campo eléctrico es ajustado hasta que la fuerza gravitacional (peso) de la gota de aceite es exactamente equilibrado por la fuerza eléctrica ($q\vec{E}$). Suponga que el equilibrio ocurre cuando el campo eléctrico es $\vec{E} = -E_y\vec{j} = -(1,92 \cdot \frac{10^5 N}{C})\vec{j}$. (a)¿Cuál es la masa de la gota de aceite?, (b)¿Cuál es la carga de la gota de aceite en unidades de carga del electrón (e)?

Solución

Parte (a). Asumiendo que la gota es esférica entonces su masa será

$$m = \rho_{ac}V = \rho_{ac}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$m = (851kg/m^3)\left(\frac{4\pi}{3}\right)(1,64 \cdot 10^{-6}m)^3 = 1,57 \cdot 10^{-14}kg$$

Parte (b). La gota de aceite estará en equilibrio estático cuando la fuerza gravitacional (peso) balancee exactamente a la fuerza eléctrica $\vec{F}_e + \vec{F}_g = 0$. Debido a que la fuerza gravitacional está dirigida hacia abajo, la fuerza eléctrica estará dirigida hacia arriba. Utilizando la noción de fuerza, tenemos

$$m\vec{g} + q\vec{E} = 0 \Rightarrow mg = -qE_y$$

Con el campo eléctrico dirigido hacia abajo, concluimos que la carga adquirida por la gota puede ser negativa. Entonces dicha carga será

$$q = -\frac{mg}{E_y} = -\frac{1,57 \cdot 10^{-14}kg(9,8m/s^2)}{1,92 \cdot 10^5 N/C}$$

$$q = -8,02 \cdot 10^{-19}C$$

Debido a que el electrón tiene una carga $e = 1,6 \cdot 10^{-19}C$, la carga de la gota de aceite en unidades de e es

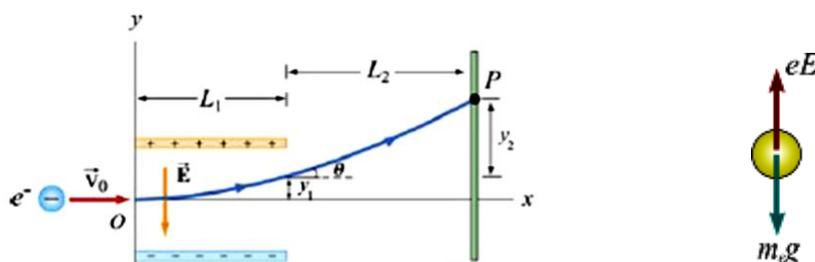
$$N = \frac{q}{e} = \frac{8,02 \cdot 10^{-19}C}{1,6 \cdot 10^{-19}C} = 5$$

Esta ecuación indica que la carga está cuantizada y en la gota existen 5 electrones.

Ejemplo 2.8 Movimiento de una carga perpendicularmente a un campo eléctrico.

Un electrón es lanzado horizontalmente dentro de un campo uniforme producido por dos placas cargadas opuestamente, como muestra la figura. La partícula tiene una velocidad inicial $\vec{v} = v_0 \vec{i}$, perpendicular a \vec{E} .

- Mientras la partícula este entre las placas, ¿cuál es la fuerza sobre el electrón?
- ¿Cuál es la aceleración del electrón cuando este entre las placas?
- Las placas tienen una longitud L_1 en la dirección x . ¿Cuál es el tiempo t_1 que demora el electrón en abandonar las placas?
- Suponga que el electrón ingresa al campo eléctrico en el tiempo $t = 0$. ¿Cuál es la velocidad del electrón en el tiempo t_1 cuando abandona las placas?
- ¿Cuál es el desplazamiento vertical del electrón después de t_1 cuando abandona las placas?
- ¿Cuál es el ángulo θ_1 con la horizontal cuando el electrón abandona las placas a t_1 ?
- El electrón golpea la pantalla a una distancia L_2 después de abandonar las placas en un tiempo t_2 . ¿Cuál es el desplazamiento vertical total del electrón desde $t = 0$, hasta que golpea la pantalla?



Solución

- (a) Debido a que el electrón tiene una carga negativa, $q = -e$, la fuerza sobre el electrón es

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = -e\vec{E} = -e(-E_y\vec{j}) = eE_y\vec{j}$$

Donde el campo eléctrico es escrito $\vec{E} = -E_y\vec{j}$, con $E_y > 0$. La fuerza sobre el electrón está dirigida hacia arriba. Por lo tanto, la aceleración vertical que le produce la fuerza eléctrica ya que para el caso de los electrones se desprecia el peso, el electrón describe una trayectoria parabólica.

- (b) La aceleración que actúa sobre el electrón es

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} = \frac{-e(-E_y\vec{j})}{m} = \frac{eE_y}{m}\vec{j}$$

- (c) Debido a que en la dirección horizontal no existe aceleración el movimiento en esta dirección es uniforme por tanto se tiene

$$x = v_{0x}t \Rightarrow L_1 = v_0 t_1$$

$$t_1 = \frac{L_1}{v_0}$$

- (d) El movimiento del electrón es parabólico y como tal tiene una velocidad horizontal uniforme v_0 mientras que en la dirección vertical la componente y de la velocidad cambia. Por tanto la velocidad con que abandona las placas es

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = v_0 \vec{i} + at_1 \vec{j} = v_0 \vec{i} + \left(\frac{eE_y}{m} \right) t_1 \vec{j} = v_0 \vec{i} + \left(\frac{eE_y}{m} \right) \left(\frac{L_1}{v_0} \right) \vec{j}$$

$$\vec{v} = v_0 \vec{i} + \left(\frac{eE_y L_1}{mv_0} \right) \vec{j}$$

(e) De la figura observamos que el electrón viaja una distancia horizontal L_1 en un tiempo t_1 y entonces abandona las placas con un desplazamiento vertical dado por

$$y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{eE_y}{m} \right) \left(\frac{L_1}{v_0} \right)^2$$

(f) Cuando el electrón abandona las placas en el tiempo t_1 , el electrón forma un ángulo θ_1 con la horizontal dada por la razón de las componentes de la velocidad en dicho instante.

$$\text{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{mv_0}{mv_0} = \frac{eE_y L_1}{mv_0^2}$$

(g) Después que el electrón abandona las placas éste no recibe la acción de fuerzas por lo tanto describirá una trayectoria recta. El desplazamiento y_2 será

$$y_2 = L_2 \text{tg} \theta_1 = L_2 \left(\frac{eE_y L_1}{mv_0^2} \right) = \frac{eL_1 L_2 E_y}{mv_0^2}$$

Por lo tanto el desplazamiento total será

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{eE_y}{m} \right) \left(\frac{L_1}{v_0} \right)^2 + \frac{eL_1 L_2 E_y}{mv_0^2}$$

$$y = \frac{eL_1 E_y}{mv_0^2} \left(\frac{L_1}{2} + L_2 \right)$$

2.8 EL DIPOLO ELECTRICO.

El dipolo eléctrico es un sistema formado por dos cargas puntuales iguales en magnitud pero de signo opuesto $+q$ y $-q$ separadas por un distancia muy pequeña $2a$ en comparación con la distancia de las cargas al punto donde se determina el campo eléctrico.

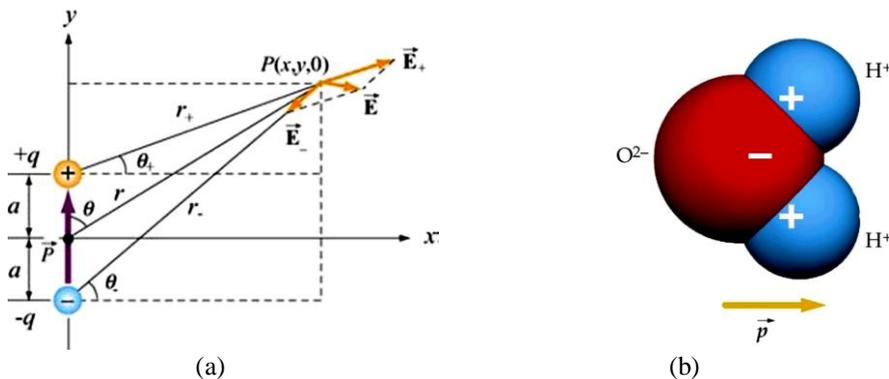


Figura 2.12 (a) Esquema de un dipolo eléctrico, (b) Molécula de agua la cual tiene un carácter dipolar.

La figura 2.12a, muestra un dipolo eléctrico mientras que la figura 2.12b muestra a una molécula de agua la cual se comporta como un dipolo. La molécula en conjunto es eléctricamente neutra pero sus enlaces químicos ocasionan un desplazamiento de carga dando como resultado una carga neta negativa en un extremo (oxígeno) y una carga neta positiva en el extremo del hidrógeno. Esta característica ocasiona que el agua sea un buen disolvente de sustancias iónicas como la sal ($NaCl$). Al disolverse en el agua, la sal se disocia en un ión positivo (Na^+) y en uno negativo (Cl^-) que tienden a ser atraídos a los extremos positivos y negativos de las moléculas del agua, manteniendo los iones en solución.

2.8.1 Momento de un dipolo.

El momento dipolar \vec{p} , es una cantidad vectorial dirigida desde la carga negativa $-q$ a la carga positiva $+q$; su magnitud es igual producto de la carga q por la distancia de separación entre cargas $2a$. Por tanto el momento dipolar es

$$\vec{p} = 2qa\vec{e}_p$$

Donde \vec{e}_p , es un vector unitario dirigido desde la carga negativa a la positiva. La magnitud del momento dipolar es $p = 2qa$ para $q > 0$. Para un sistema de carga promedio neutra el cual tiene N dipolos, el vector momento dipolar es definido como

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i$$

Donde \vec{r}_i , es el vector de posición de la carga q_i . Entre otros ejemplos de dipolos eléctricos incluyen al HCl , CO y otras moléculas polares. En principio pueden considerarse dipolos a las moléculas en las cuales los centros de las cargas positivas y negativas no coinciden. Más adelante demostraremos que cuando se aplica un campo eléctrico externo a moléculas no polarizadas, estas se polarizan bajo la acción de dicho campo.

2.8.2 El campo eléctrico de un dipolo

A modo de aplicación en esta sección se procederá a determinar el campo eléctrico de un dipolo en un punto arbitrario tal como se muestra en la figura 2.12a. Aquí las componentes se determinan independientemente, esto es

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos\theta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\theta_-}{r_-^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{(x^2 + (y-a)^2)^{3/2}} - \frac{x}{(x^2 + (y+a)^2)^{3/2}} \right)$$

Donde

$$r_{\pm} = r^2 + a^2 \mp 2ra \cos\theta = x^2 + (y \mp a)^2$$

Similarmente se determina componente y , es decir

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sin\theta_+}{r_+^2} - \frac{\sin\theta_-}{r_-^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{y-a}{(x^2 + (y-a)^2)^{3/2}} - \frac{y+a}{(x^2 + (y+a)^2)^{3/2}} \right)$$

Para el caso de que $r \gg a$, se puede verificar que las expresiones anteriores se reducen a

$$E_x = \frac{3p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin\theta \cos\theta$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos^2\theta - 1)$$

Donde $\text{sen}\theta = x/r$ y $\text{cos}\theta = y/r$. Con $3pr \text{cos}\theta = \vec{p} \cdot \vec{r}$ y un poco de algebra se puede demostrar que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right)$$

Esta ecuación nos indica que el campo de un dipolo varía con la inversa de de la distancia al cubo ($1/r^3$), a diferencia del campo debido a un dipolo el cual varía con ($1/r^2$). Las líneas de campo de un dipolo eléctrico finito y para un dipolo puntual se muestran en la figura 2.12.

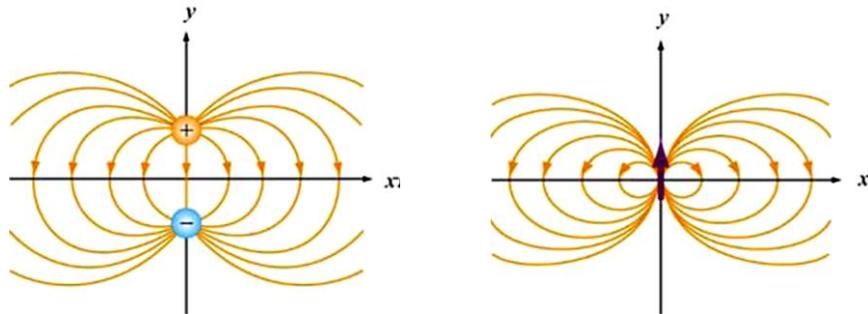


Figura 2.13 Líneas de campo eléctrico para: (a) un dipolo finito y (b) un dipolo puntual.

2.8.3 Dipolo en un campo eléctrico.

¿Qué sucede cuando colocamos el dipolo en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E\vec{i}$ con el vector momento dipolar haciendo un ángulo θ con el eje x ? De la figura 2.14 vemos que el vector unitario que proporciona la dirección de \vec{p} es: $\text{cos}\theta\vec{i} + \text{sen}\theta\vec{j}$.

Entonces el momento dipolar se escribe.

$$\vec{p} = 2qa(\text{cos}\theta\vec{i} + \text{sen}\theta\vec{j})$$

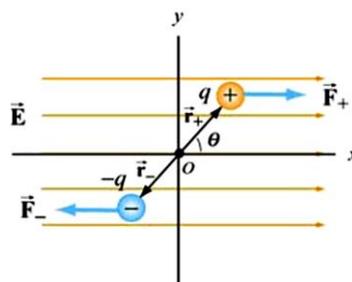


Figura 2.14 Dipolo eléctrico en el interior de un campo uniforme.

Como se ve en la figura 2.14, debido a que cada carga experimenta una fuerza igual pero opuesta al campo, la fuerza neta sobre el dipolo es

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$$

Aun cuando la fuerza neta es nula, el campo eléctrico ejerce un torque o momento sobre el dipolo. El momento con respecto al punto medio O es

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = (a \cos \theta \vec{i} + a \sin \theta \vec{j}) \times (F_+ \vec{i}) + (-a \cos \theta \vec{i} - a \sin \theta \vec{j}) \times (-F_- \vec{i}) \\ \vec{M} &= -aF_+ \sin \theta \vec{k} - aF_- \sin \theta \vec{k} \\ \vec{M} &= -2aF \sin \theta \vec{k}\end{aligned}$$

Donde se ha usado $F_+ = F_- = F$. La dirección del momento es $-\vec{k}$, o entrando a la página. El efecto del torque es hacer rotar al dipolo en sentido horario hasta que el dipolo momentáneamente se alinee con el campo eléctrico \vec{E} , la magnitud del torque ejercido sobre el dipolo puede ser escrita como

$$\begin{aligned}M &= 2aF \sin \theta = 2a(qE) \sin \theta \\ M &= pE \sin \theta\end{aligned}$$

Una expresión general para el torque sobre el dipolo es

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Esto indica que el torque es igual al producto vectorial del momento dipolar por el campo eléctrico.

2.8.4 Energía potencial de un dipolo eléctrico.

El trabajo hecho por el campo eléctrico para rotar el dipolo en un ángulo $d\theta$, es

$$dW = -Md\theta = -pE \sin \theta d\theta$$

El signo negativo indica que el torque se opone a un incremento en θ . Por lo tanto, la cantidad total de trabajo hecho por el campo eléctrico para rotar al dipolo de un ángulo θ_0 a θ es

$$W = -pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = pE(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

El resultado muestra que el campo realiza un trabajo positivo cuando $\cos \theta > \cos \theta_0$. El cambio en la energía potencial del dipolo ΔU , es el negativo del trabajo realizado por el campo, esto es

$$\Delta U = U - U_0 = -pE(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Donde $U_0 = -pE \cos \theta_0$, es la energía potencial en un punto de referencia. Podemos asumir que la energía potencial es nula cuando $\theta_0 = \pi/2$. Es decir, en la presencia de un campo eléctrico externo el dipolo eléctrico tiene una energía potencial.

$$U = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Un sistema está en equilibrio estable cuando su energía potencial es mínima. Esto ocurre cuando el momento dipolar \vec{p} , está alineado paralelamente a \vec{E} , en este caso U toma un *mínimo* $U_{min} = -pE$. Por otro lado cuando \vec{p} y \vec{E} son anti-paralelos, $U = +pE$ es un máximo y el sistema es estable.

Si el dipolo está localizado en un campo no uniforme, podría aparecer una fuerza neta sobre el dipolo sumado al torque, y el movimiento resultante podría ser una combinación de aceleración lineal y una rotación. En la figura 2.15, suponemos que el campo eléctrico \vec{E}_+ en la carga q difiere del campo eléctrico \vec{E}_- en la carga $-q$

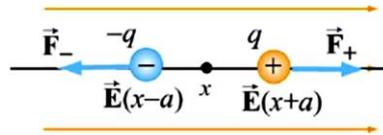


Fig. 2.15 Fuerza sobre un dipolo en un campo no uniforme.

Asumiendo que el dipolo es muy pequeño, expandimos el campo alrededor de x :

$$E_+(x+a) \approx E(x) + a \left(\frac{dE}{dx} \right); \quad E_-(x-a) \approx E(x) - a \left(\frac{dE}{dx} \right)$$

La fuerza sobre el dipolo llegará a ser

$$\vec{F}_e = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = 2qa \left(\frac{dE}{dx} \right) \vec{i} = p \left(\frac{dE}{dx} \right) \vec{i}$$

Un ejemplo de una fuerza neta actuando sobre un dipolo es la atracción entre pequeños trozos de papel y un peine, el cual ha sido cargado mediante frotación con el pelo. El papel posee momentos de dipolo inducidos mientras el campo sobre el peine es no uniforme debido a su forma irregular (véase la figura 2.16)

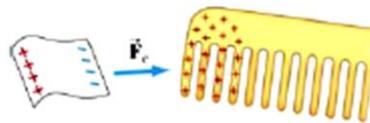


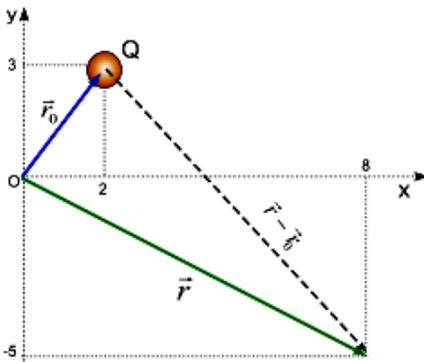
Fig 2.16 Atracción electrostática entre el peine y un trozo de papel

Problema 01

En el punto definido por el radio vector $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ de un plano xy se encuentra una carga positiva de $50 \mu\text{C}$, donde \vec{i} y \vec{j} son los vectores unitarios de los ejes x e y . Determine el vector de intensidad de campo eléctrico \vec{E} y su módulo, en el punto con radio vector $\vec{r} = 8\vec{i} + 5\vec{j}$. Aquí r_0 y r se dan metros.

Solución

En la figura se muestra la ubicación de la carga puntual y el punto donde se pide hallar la intensidad de campo eléctrico



La intensidad de campo en el punto P es

$$\vec{E} = \frac{kQ}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} (\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{kQ}{\sqrt{6^2 + 8^2}^3} (6\vec{i} - 8\vec{j})$$

$$\vec{E} = 9.10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2 / \text{C}^2 \left(\frac{50 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{10^3 \text{ m}^3} \right) (6\vec{i} - 8\vec{j})$$

$$\vec{E} = 450(6\vec{i} - 8\vec{j}) \text{ N/C}$$

$$\vec{E} = (2,7\vec{i} - 3,6\vec{j}) \cdot 10^3 \text{ C}$$

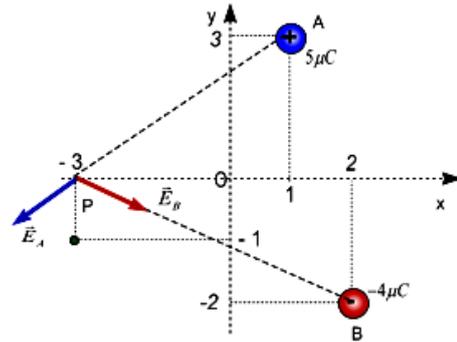
$$E = 4,5 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

Problema 02

Una carga puntual de $5 \mu\text{C}$ está localizada en $x = 1 \text{ m}$, $y = 3 \text{ m}$ y otra de $-4 \mu\text{C}$ está localizada en $x = 2 \text{ m}$, $y = -2 \text{ m}$. (a) Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico en $x = -3 \text{ m}$, $y = 1 \text{ m}$. (b) Determine la magnitud y la dirección de la fuerza sobre un protón en $x = -3 \text{ m}$, $y = 1 \text{ m}$.

Solución

En la figura se muestra la ubicación de las cargas puntuales y el punto donde se pide hallar el campo eléctrico



El campo eléctrico de cada carga en el punto P es

$$\vec{E}_A = \frac{kq_A}{|\overline{AP}|^3} (\overline{AP}) = \frac{kq_A}{\sqrt{25}^3} (-4\vec{i} - 3\vec{j})$$

$$\vec{E}_A = \frac{9 \cdot 10^9 (5 \cdot 10^{-6})}{125} (-4\vec{i} - 3\vec{j})$$

$$\vec{E}_A = -1440\vec{i} - 1080\vec{j}$$

$$\vec{E}_B = \frac{kq_B}{|\overline{PB}|^3} (\overline{PB}) = \frac{kq_B}{\sqrt{29}^3} (5\vec{i} - 2\vec{j})$$

$$\vec{E}_B = \frac{9 \cdot 10^9 (4 \cdot 10^{-6})}{156,2} (5\vec{i} - 2\vec{j})$$

$$\vec{E}_B = 1152\vec{i} - 461\vec{j}$$

El campo resultante en P será

$$\vec{E}_B = 1152\vec{i} - 461\vec{j}$$

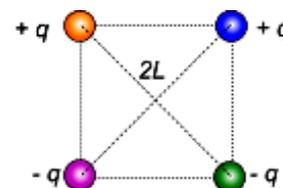
$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = -288\vec{i} - 1541\vec{j}$$

Su magnitud será

$$E = \sqrt{288^2 + 1541^2} = 2480 \text{ N/C}$$

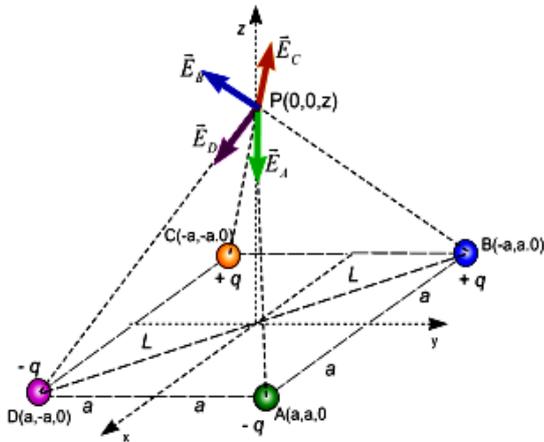
Problema 03

En los vértices de un cuadrado, cuya diagonal es $2L$, se encuentran las carga puntuales $+q$ y $-q$, como se muestra en la figura. Determine el módulo del vector de a intensidad de campo eléctrico en un punto que está a la distancia z y se sitúa simétricamente respecto a los vértices del mismo.



Solución

En la figura se muestra la ubicación de las cargas puntuales y el punto donde se pide hallar el campo eléctrico



Los campos producidos por cada carga son

$$\vec{E}_A = \frac{kq_A(\vec{a}_i + \vec{a}_j - z\vec{k})}{(a^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{kq}{(2a^2 + z^2)^{3/2}}(\vec{a}_i + \vec{a}_j - z\vec{k})$$

$$\vec{E}_B = \frac{kq_B(\vec{a}_i - \vec{a}_j + z\vec{k})}{(a^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{kq}{(2a^2 + z^2)^{3/2}}(\vec{a}_i - \vec{a}_j + z\vec{k})$$

$$\vec{E}_C = \frac{kq_C(\vec{a}_i + \vec{a}_j + z\vec{k})}{(a^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{kq}{(2a^2 + z^2)^{3/2}}(\vec{a}_i + \vec{a}_j + z\vec{k})$$

$$\vec{E}_D = \frac{kq_D(\vec{a}_i - \vec{a}_j - z\vec{k})}{(a^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{kq}{(2a^2 + z^2)^{3/2}}(\vec{a}_i - \vec{a}_j - z\vec{k})$$

El campo eléctrico resultante es

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$$

$$\vec{E} = \frac{4kqa}{(2a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{i}$$

Teniendo en cuenta que $a = L\sqrt{2}/2$, se tiene

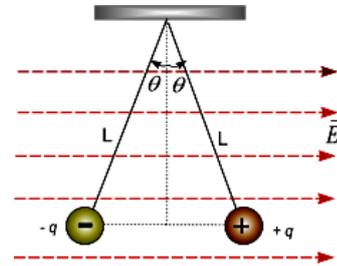
$$\vec{E} = \frac{4kq(L\sqrt{2}/2)}{[2(L\sqrt{2}/2)^2 + z^2]^{3/2}} \vec{i} = \frac{2kqL\sqrt{2}}{(L^2 + z^2)^{3/2}} \vec{i}$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qL\sqrt{2}}{(L^2 + z^2)^{3/2}}$$

Problema 04

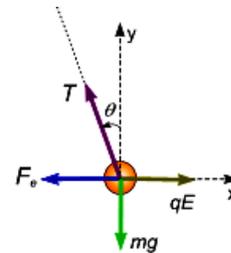
Dos pequeñas esferas cada una de 2 gramos de masa están suspendidas por cuerdas ligeras de 10 cm de longitud. Un campo eléctrico uniforme se aplica en la

dirección horizontal y hacia la izquierda. Si las esferas llevan cargas de -50 nC y $+50 \text{ nC}$. Determine la intensidad de campo eléctrico para que las dos esferas se mantengan en equilibrio cuando $\theta = 10^\circ$



Solución

En la figura se muestra el DCL de la carga positiva. Las fuerzas que actúan son: la tensión T , el peso mg la fuerza debido al campo qE y la fuerza de atracción electrostática F_e



La aplicación de las ecuaciones de equilibrio nos da

$$\sum F_y = 0$$

$$T \cos \theta - mg = 0$$

$$T = \frac{mg}{\cos \theta} \tag{a}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$qE - T \sin \theta - F_e = 0$$

$$T \sin \theta = qE - \frac{kq^2}{r^2} \tag{b}$$

Reemplazando (a) en (b), se tiene

$$mgtg\theta = qE - \frac{kq^2}{(2L \sin \theta)^2}$$

$$qE = mgtg\theta + \frac{kq^2}{4L^2 \sin^2 \theta}$$

$$E = \frac{mgtg\theta}{q} + \frac{kq}{4L^2 \sin^2 \theta}$$

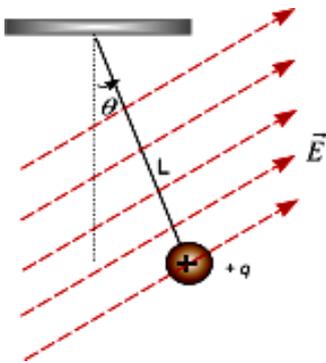
Remplazando los valores del enunciado obtenemos

$$E = \frac{2 \cdot 10^{-3} (9,8) \operatorname{tg} 10^\circ}{50 \cdot 10^9} + \frac{9 \cdot 10^9 (50 \cdot 10^9)^2}{4 (10 \cdot 10^{-2})^2 (\operatorname{sen} 10^\circ)^2}$$

$$E = 106,43 \text{ kN/C}$$

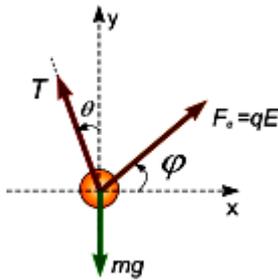
Problema 05.

Una esfera pequeña cargada de 1 gramo de masa está suspendido de una cuerda ligera en presencia de un campo eléctrico uniforme como se muestra en la figura. Cuando $\vec{E} = (3\vec{i} + 5\vec{j}) \cdot 10^5 \text{ N/C}$, la esfera está en equilibrio cuando $\theta = 37^\circ$, determine: (a) la carga en la esfera y (b) la tensión en el cable.



Solución

En la figura se muestra el DCL de la carga asumiendo que es positiva. Las fuerzas que actúan son: la tensión T , el peso mg y la fuerza debido al campo qE .



La aplicación de las ecuaciones de equilibrio nos da

$$\sum F_y = 0$$

$$T \cos \theta + F_e \operatorname{sen} \phi - mg = 0$$

$$T \cos 37^\circ + qE(5/\sqrt{34}) = mg$$

$$\frac{4}{5}T + q(\sqrt{34} \cdot 10^5)(5/\sqrt{34}) = 1 \cdot 10^{-3} (9,8)$$

$$\frac{4}{5}T + 5 \cdot 10^5 q = 9,8 \cdot 10^{-3} \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_e \operatorname{Cos} \phi = T \operatorname{sen} \theta$$

$$qE \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3}{5}T$$

$$q(\sqrt{34} \cdot 10^5) \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3}{5}T$$

$$T = 5 \cdot 10^5 q \quad (2)$$

Remplazando la ecuación (2) en (1), resulta

$$9 \cdot 10^5 q = 9,8 \cdot 10^{-3}$$

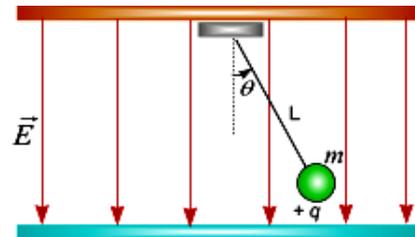
$$q = 10,8 \text{ nC}$$

$$T = 5 \cdot 10^5 (10,8 \cdot 10^{-9})$$

$$T = 5,4 \text{ mN}$$

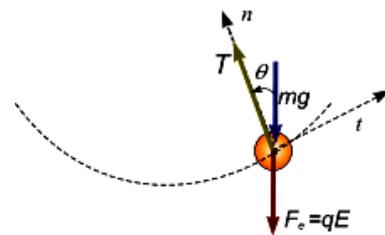
Problema 06

Una esferita de masa m y carga q está suspendida de un hilo delgado de longitud L dentro de un condensador plano de láminas horizontales. La intensidad de campo eléctrico es igual a E , las líneas de fuerza están dirigidas hacia abajo como se muestran en la figura, determinar la ecuación de movimiento de m y a partir de ella el período de las oscilaciones para pequeños ángulos



Solución

En la figura se muestra el DCL de la carga $+q$. Las fuerzas que actúan son: la tensión T , el peso mg y la fuerza debido al campo $F_e = qE$.



Aplicando la segunda ley de Newton en dirección tangencial se tiene

$$\sum F_t = ma_t$$

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -(mg + qE) \text{sen}\theta$$

$$m \frac{d(L\theta)}{dt^2} + (mg + qE) \text{sen}\theta = 0$$

Para ángulos pequeños $\text{sen}\theta \approx \theta$, con lo que la ecuación anterior se escribe

$$mL \frac{d^2 \theta}{dt^2} + (mg + qE)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{(mg + qE)}{mL} \theta = 0$$

La ecuación determinada es la ecuación diferencial de un MAS, cuya frecuencia es

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{(mg + qE)}{mL}}$$

Entonces el período será

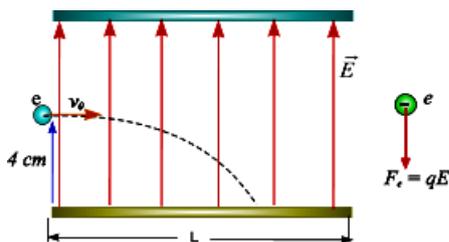
$$T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L}{\left(g + \frac{qE}{m}\right)}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L}{g_{\text{efectiva}}}}$$

Donde g_{ef} es la llamada gravedad efectiva expresada por

$$g_{\text{ef}} = g + \frac{qE}{m}$$

Problema 07

Un electrón penetra en un condensador plano paralelamente sus láminas y a una distancia de 4 cm de la lámina cargada positivamente y cuya longitud es de 15 cm. ¿Cuánto tiempo demora en caer el electrón en dicha lámina, si la intensidad de campo eléctrico en el condensador es igual a $E = 500 \text{ V/m}$?. ¿Cuál es la velocidad mínima que debe tener el electrón para que éste no llegue a caer sobre la lámina?.



Solución

En la figura se muestra el DCL del electrón. La única fuerza que actúa sobre el electrón es la fuerza debida al campo eléctrico $F_e = qE$, en el caso de electrones se desprecia la fuerza gravitacional (peso). Esta fuerza le produce una aceleración $\vec{a} = -eE\vec{j}$, Por lo tanto el movimiento descrito por el electrón es horizontal

Movimiento horizontal. La velocidad en esta dirección es constante y la posición para cualquier instante es

$$x = v_{0x}t \quad (1)$$

Movimiento vertical. En esta dirección debido a que existe aceleración el movimiento es uniformemente variado, siendo sus ecuaciones

$$v_y = v_{0y} + at = 0 - \frac{eE}{m}t = -\frac{eE}{m}t$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 = h_0 - \frac{eE}{m}t^2$$

Reemplazando valores en la última ecuación se tiene

$$0 = 0,04 - \frac{1,6 \cdot 10^{-19}(500)}{9,1 \cdot 10^{-31}}t^2$$

$$t = 3 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

La velocidad mínima solicitada será aquella que se le dé al electrón de tal manera que logre abandonar las placas del condensador saliendo por el extremo inferior derecho de la placa entonces se tiene

$$x = L = v_{0x}t_1 \Rightarrow L = v_{0,\text{min}}t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{L}{v_{0,\text{min}}}$$

$$y = h_0 - \frac{eE}{m}t^2$$

$$0 = h_0 - \frac{eE}{m}t_1^2 \Rightarrow h_0 = \frac{eE}{m}t_1^2$$

$$h_0 = \frac{eE}{m} \left(\frac{L}{v_{0,\text{min}}} \right)^2 \Rightarrow v_{0,\text{min}} = L \sqrt{\frac{eE}{mh_0}}$$

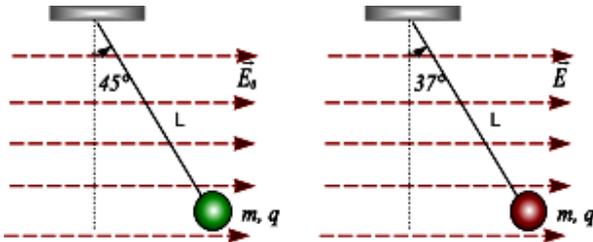
Reemplazando valores se tiene

$$v_{0,\text{min}} = 0,15 \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19}(500)}{9,1 \cdot 10^{-31}(0,04)}}$$

$$v_{0,\text{min}} = 5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

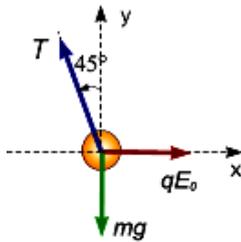
Problema 08

Una esfera conductora muy pequeña suspendida de un hilo aislante es usada para medir la intensidad de campo eléctrico. Cuando se coloca en un campo cuya intensidad es E_0 , se observa que el hilo forma un ángulo de 45° . Calcular la intensidad de campo eléctrico E si el sistema (hilo más esfera) se desvía un ángulo de 37° . Considere que $E_0 = 80 \text{ N/C}$.



Solución

En la figura se muestra el DCL de la carga positiva. Las fuerzas que actúan son: la tensión T , el peso mg la y la fuerza debido al campo qE_0 .



Aplicando las ecuaciones de equilibrio resulta

$$\sum F_y = 0$$

$$T \cos 45^\circ = mg$$

$$T = mg / \cos 45^\circ \quad (1)$$

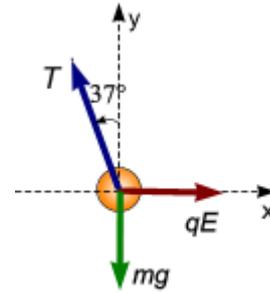
$$\sum F_x = 0$$

$$qE_0 = T \sin 45^\circ \quad (2)$$

Reemplazando la ecuación (1) en (2), resulta

$$qE_0 = mgtg45^\circ \quad (3)$$

En la figura se muestra el DCL de la carga positiva. Las fuerzas que actúan son: la tensión T , el peso mg la y la fuerza debido al campo qE .



Aplicando las ecuaciones de equilibrio resulta

$$\sum F_y = 0$$

$$T_1 \cos 37^\circ = mg$$

$$T_1 = mg / \cos 37^\circ \quad (4)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$qE = T_1 \sin 37^\circ \quad (5)$$

Reemplazando la ecuación (4) en (5), resulta

$$qE = mgtg37^\circ \quad (6)$$

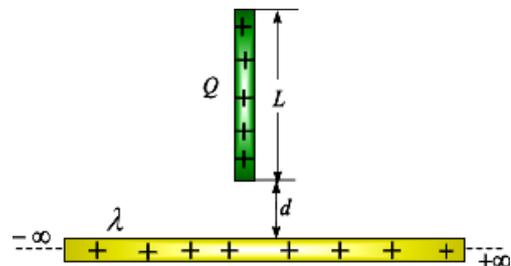
Dividiendo las ecuaciones (3) y (6), se tiene

$$\frac{qE}{qE_0} = \frac{mgtg37^\circ}{mgtg45^\circ} \Rightarrow E = \frac{tg37^\circ}{tg45^\circ} E_0$$

$$E = 60 \text{ N/C}$$

Problema 09

Una barra de longitud L tiene una carga total distribuida uniformemente en su longitud y se encuentra en dirección perpendicular a una carga lineal uniforme e infinitamente larga de densidad $\lambda \text{ C/m}$, como se muestra en la figura. El extremo más próximo de la barra a la carga lineal dista de esta la longitud d . determine la fuerza que la carga lineal infinita ejerce sobre la barra de longitud L .

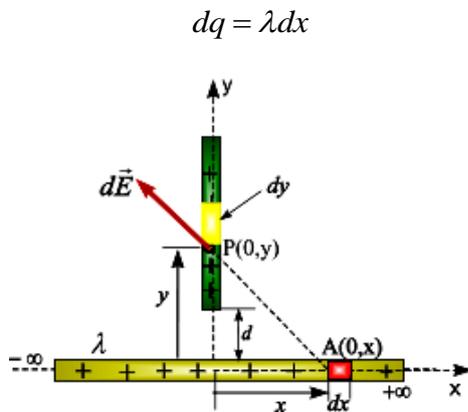


Solución

Primero se determina el campo eléctrico producido por la carga lineal in finita en un punto P perteneciente a la barra de longitud L situado a una distancia y , como se

muestra en la figura. Par ello dividimos la carga horizontal en elementos diferenciales dq de longitud dx .

Entonces se tiene



El campo eléctrico producido por dq en P será

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{|\vec{AP}|^3} \vec{AP} = \frac{k dq}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (-x\vec{i} + y\vec{j})$$

$$d\vec{E} = -\frac{k\lambda x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{i} + \frac{k\lambda y dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j}$$

Por simetría se anulan las componentes x.

$$d\vec{E}_y = -\frac{k\lambda y dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j}$$

El campo total se obtiene integrando la ecuación anterior

$$\vec{E}_y = k\lambda y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j}$$

Integrando la ecuación anterior se tiene

$$\vec{E}_y = \frac{2k\lambda}{y} \vec{j}$$

Determinamos ahora la fuerza ejercida por la distribución lineal infinita sobre el elemento de carga dq' y longitud dy . De acuerdo con la definición de campo eléctrico, tenemos

$$d\vec{F} = \vec{E}_y dq' = \left(\frac{k\lambda}{y} \vec{j} \right) (dq')$$

La carga dq' está dada por

$$\lambda' = \frac{Q}{L} = \frac{dq'}{dy} \Rightarrow dq' = \frac{Q}{L} dy$$

Remplazando esta cantidad tenemos

$$d\vec{F} = \vec{E}_y dq' = \left(\frac{k\lambda}{y} \vec{j} \right) \left(\frac{Q}{L} dy \right) \vec{j}$$

$$d\vec{F} = \frac{k\lambda Q}{L} \left(\frac{dy}{y} \right) \vec{j}$$

Integrando esta cantidad para toda la longitud L se tiene

$$\vec{F} = \frac{k\lambda Q}{L} \int_d^{L+d} \frac{dy}{y} \vec{j} = \frac{k\lambda Q}{L} \ln y \Big|_d^{L+d} \vec{j}$$

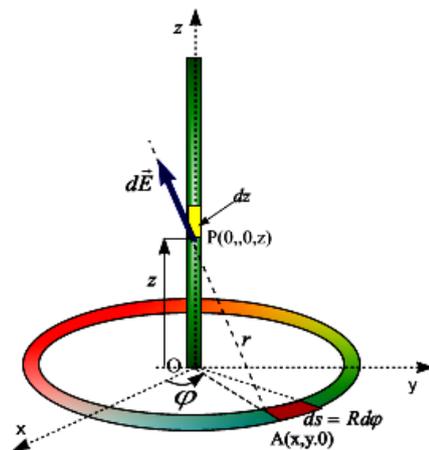
$$\vec{F} = \frac{k\lambda Q}{L} \ln \left(\frac{L+d}{d} \right) \vec{j}$$

Problema 10

Un sistema se compone de un anillo de alambre fino de radio R cargado y de un hilo muy largo uniformemente cargado, dispuesto en el eje del anillo de modo que uno de sus extremos coincide con el centro de éste. El anillo tiene una carga q. A la unidad de longitud del hilo le corresponde una carga λ . Determine la fuerza de interacción entre el anillo y el hilo.

Solución

Primero se determina el campo eléctrico producido por el anillo de carga q en un punto P perteneciente al hilo muy largo situado a una distancia z, como se muestra en la figura. Para ello dividimos la carga en el anillo en elementos diferenciales dq de longitud ds .



La carga del elemento diferencial dq , es

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R} = \frac{dq}{ds} \Rightarrow dq = \frac{q}{2\pi} d\phi$$

El campo eléctrico producido por dq en P (0, 0, z) será

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{|\vec{AP}|^3} \vec{AP} = \frac{k \left(\frac{q}{2\pi} d\varphi \right)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (-x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$d\vec{E} = -\frac{kqR \cos \varphi d\varphi}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{i} - \frac{kqR \sin \varphi d\varphi}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{j} + \frac{kqz d\varphi}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}$$

Debido a que el anillo lleva una distribución de carga uniforme, entonces la simetría exige que las componentes x e y. Por tanto se tiene

$$d\vec{E}_z = \frac{kqz d\varphi}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}$$

El campo total en el punto P debido al anillo será

$$\vec{E}_z = \frac{kqz}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \vec{k} = \frac{kqz}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} (\varphi)_0^{2\pi}$$

$$\vec{E}_z = \frac{kqz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}$$

Determinamos ahora la fuerza ejercida por el anillo cargado sobre el elemento de carga dq' y longitud dz . De acuerdo con la definición de campo eléctrico, tenemos

$$d\vec{F} = \vec{E}_z(dq') = \left[\frac{kqz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} \right] (dq') \vec{k}$$

La carga dq' está dada por

$$\lambda = \frac{dq'}{dz} \Rightarrow dq' = \lambda dz$$

Remplazando esta cantidad tenemos

$$d\vec{F} = \vec{E}_z dq' = \left[\frac{kqz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} \right] (\lambda dz)$$

$$d\vec{F} = \frac{k\lambda qz dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}$$

Integrando esta cantidad para toda la longitud L se tiene

$$\vec{F} = k\lambda q \int_0^\infty \frac{z dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} = k\lambda q \left[-\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]_0^\infty \vec{k}$$

Remplazando los límites correspondientes

$$\vec{F} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \vec{k}$$

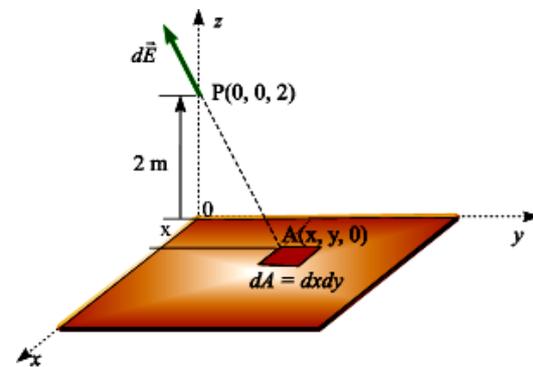
Problema 11

Una distribución de carga laminar finita de densidad $\sigma = 2x(x^2 + y^2 + 4)^{3/2} C/m^2$, yace en el plano $z = 0$ para $0 \leq x \leq 2m$ y $0 \leq y \leq 2m$. Determine la magnitud, dirección y sentido de la intensidad de campo eléctrico \vec{E} en el punto $P(0, 0, 2) m$.

Solución

En la figura se representa la distribución de carga. Para determinar la intensidad de campo en P dividimos a la distribución de carga en elementos diferenciales de área $dA = dx dy$, y carga dq , dada por

$$dq = \sigma dA = 2x(x^2 + y^2 + 4)^{3/2} dx dy$$



El campo eléctrico producido por dq en $P(0, 0, 2)$ será

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{|\vec{AP}|^3} \vec{AP} = \frac{2kx(x^2 + y^2 + 4)^{3/2} dx dy}{(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}} (-x\vec{i} - y\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$d\vec{E} = 2kx dx dy (-x\vec{i} - y\vec{j} + 2\vec{k})$$

El campo total se determina integrando la ecuación anterior

$$\vec{E} = 2k \left[-\int_0^2 \int_0^2 x^2 dx dy \vec{i} - \int_0^2 \int_0^2 xy dx dy \vec{j} + \int_0^2 \int_0^2 2x dx dy \vec{k} \right]$$

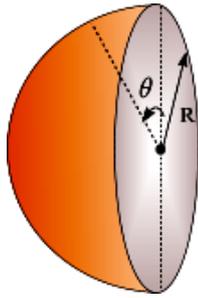
Evaluando cada una de las integrales y remplazando los límites correspondientes se tiene

$$\vec{E} = 2(9 \cdot 10^9) \left(-\frac{16}{3} \vec{i} - 4 \vec{j} + 8 \vec{k} \right)$$

$$\vec{E} = (-96\vec{i} - 72\vec{j} + 144\vec{k}) 10^9 N/C$$

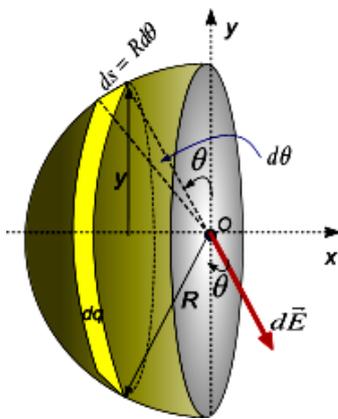
Problema 12

Determine el campo eléctrico en el centro O de un cascarón semiesférico de radio R cargado con una densidad de carga superficial constante σ . Halle \vec{E} si se sabe que la carga distribuida es $Q = 1 \mu C$ y $R = 10 cm$.



Solución

Para resolver el problema dividimos al cascarón hemisférico en elementos en forma de anillos de radio y , de ancho ds y carga dq tal como se muestra en la figura.



La carga de este elemento diferencial es

$$dq = \sigma dA = \sigma(2\pi y ds) = \sigma(2\pi)(R \cos \theta)(R d\theta)$$

$$dq = 2\pi\sigma R^2 \cos \theta d\theta$$

El campo producido por este anillo en el punto O es

$$d\vec{E} = dE \text{sen} \theta \vec{i} - dE \cos \theta \vec{j}$$

La componente en la dirección y se cancelan debido a que la distribución presenta simetría, entonces se tiene

$$d\vec{E}_x = dE \text{sen} \theta \vec{i} = \frac{k dq}{R^2} \text{sen} \theta \vec{i}$$

$$d\vec{E}_x = \frac{k(2\pi\sigma R^2 \cos \theta d\theta)}{R^2} \text{sen} \theta \vec{i}$$

$$d\vec{E}_x = 2\pi\sigma k (\cos \theta \text{sen} \theta d\theta) \vec{i}$$

El campo eléctrico total debido al cascarón se obtiene integrando la ecuación anterior esto es

$$\vec{E}_x = 2\pi\sigma k \int_0^{\pi/2} \cos \theta \text{sen} \theta d\theta \vec{i}$$

$$\vec{E}_x = 2\pi\sigma k \frac{\text{sen}^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} \vec{i}$$

$$\vec{E}_x = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} \vec{i}$$

Remplazando valores

$$\vec{E}_x = \frac{9 \cdot 10^2 (1.10^{-6})}{2(0,1)^2} \vec{i} = (450 \cdot 10^3 \vec{i}) \text{ N/C}$$

Problema 13

Una lámina plana infinita lleva una carga uniformemente distribuida sobre su superficie con una densidad σ . Si la lámina se encuentra en el plano xy . Determine la intensidad de campo eléctrico en puntos perpendiculares a la lámina.

Solución

En la figura se muestra la ubicación de la lámina, así como el punto donde se va a determinar el campo eléctrico. Para determinar éste, se divide a la distribución de carga en elementos de carga dq y área dA . La carga del elemento diferencial esta dado por

$$\sigma = \frac{dq}{dA} \Rightarrow dq = \sigma dA = \sigma(r dr d\phi)$$

La intensidad de campo eléctrico producido por el elemento dq en el punto P es

$$d\vec{E} = \frac{k dq}{|\overline{AP}|^3} (\overline{AP}) = \frac{k\sigma(r dr d\phi)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (-r\vec{e}_r + z\vec{e}_z)$$

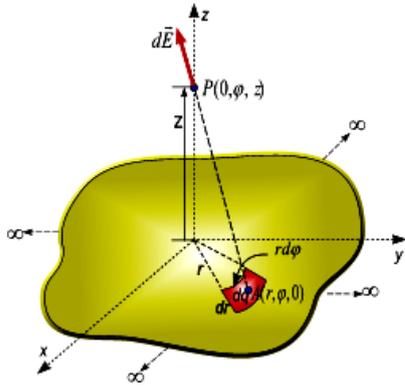
$$d\vec{E} = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 dr d\phi}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_r + \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{z r dr d\phi}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

La simetría de la distribución exige que la componente radial se elimine pues para cada componente existe otra de un elemento simétrico en el lado opuesto. Por tanto

$$d\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{z r dr d\phi}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

El campo total debido a la lámina infinita se obtiene integrando la ecuación anterior, esto es

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} \frac{r dr d\phi}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z = \frac{\sigma z (2\pi)}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^{\infty} \vec{e}_z$$



Remplazando los límites correspondientes se tiene

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

La intensidad de campo eléctrico en puntos inferiores será

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

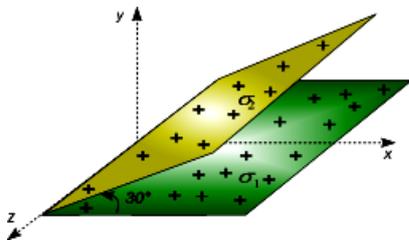
Como el eje se ha elegido arbitrariamente para cualquier ubicación del plano el campo será

$$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_n$$

Donde \vec{e}_n es un vector unitario perpendicular al plano

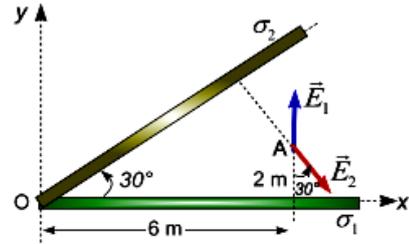
Problema 14

Un plano infinito situado en el plano xz posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma_1 = 65nC/m^2$. Un segundo plano infinito portador de una carga de densidad uniforme $\sigma_2 = 45nC/m^2$, corta al plano xz en el eje z y forma un ángulo de 30° co el plano xz como se muestra en la figura. Determine la intensidad de campo eléctrico en el plano xy en los puntos (a) A (6, 2, 0) m y (b) B(6, 5, 0)m.



Solución

Parte (a) En la figura se muestra la vista de perfil de la ubicación de los planos, en este caso el punto A(6, 2, 0) está entre los dos planos.



Los campos eléctricos son

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{e}_{1n} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{j}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \vec{e}_{2n} = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (\text{sen}30^\circ \vec{i} - \text{cos}30^\circ \vec{j})$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \right)$$

El campo eléctrico resultante en el punto A se obtiene sumando vectorialmente los campos debido a los planos, esto es

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{j} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \right)$$

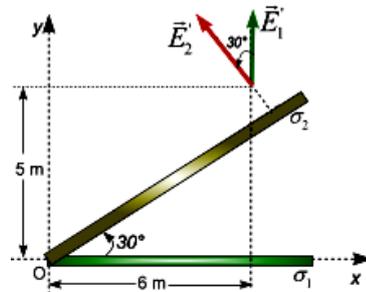
$$\vec{E} = \frac{\sigma_2}{4\epsilon_0} \vec{i} + \left(\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2 \sqrt{3}}{4\epsilon_0} \right) \vec{j}$$

Remplazando los valores de las densidades de cargas dadas se tiene

$$\vec{E} = \frac{45 \cdot 10^{-9}}{4(8,85 \cdot 10^{-12})} \vec{i} + \left[\frac{65 \cdot 10^{-9}}{2(8,85 \cdot 10^{-12})} - \frac{45 \cdot 10^{-9} \sqrt{3}}{4(8,85 \cdot 10^{-12})} \right] \vec{j}$$

$$\vec{E} = (1271\vec{i} + 1470\vec{j}) N/C$$

Parte (a) En la figura se muestra la vista de perfil de la ubicación de los planos, en este caso el punto B(6, 5, 0) está fuera de los planos, esto es encima de σ_1 .



Los campos eléctricos son

$$\vec{E}'_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{e}_{1n} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{j}$$

$$\vec{E}'_2 = E'_2 \vec{e}_{2n} = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (-\text{sen}30^\circ \vec{i} + \text{cos}30^\circ \vec{j})$$

$$\vec{E}'_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \right)$$

El campo eléctrico resultante en el punto B se obtiene sumando vectorialmente los campos debido a los planos, esto es

$$\vec{E}_B = \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{j} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \right)$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma_2}{4\epsilon_0} \vec{i} + \left(\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2 \sqrt{3}}{4\epsilon_0} \right) \vec{j}$$

Remplazando los valores de las densidades de cargas dadas se tiene

$$\vec{E} = -\frac{45 \cdot 10^{-9}}{4(8,85 \cdot 10^{-12})} \vec{i} + \left[\frac{65 \cdot 10^{-9}}{2(8,85 \cdot 10^{-12})} + \frac{45 \cdot 10^{-9} \sqrt{3}}{4(8,85 \cdot 10^{-12})} \right] \vec{j}$$

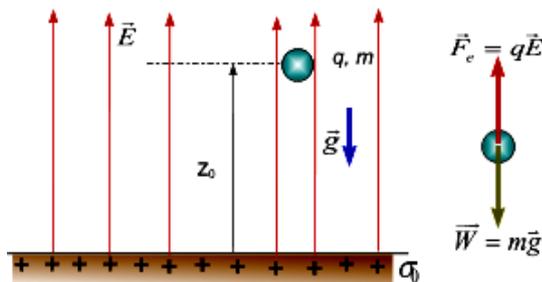
$$\vec{E} = (-1271 \vec{i} + 5874 \vec{j}) \text{ N/C}$$

Problema 15

Una carga puntual q, con masa m se deja caer libremente desde el reposo en un campo gravitacional a una altura z₀ arriba de una lámina horizontal de carga superficial de densidad uniforme σ₀.

- a) ¿Cuál es la posición de la carga como una función del tiempo?.
- b) ¿Para qué valores de σ₀ la carga eléctrica permanecerá estacionaria?.
- c) Si σ₀ es menor que el valor de la parte (b). ¿En qué tiempo y con qué velocidad la carga llegará a la lámina?.

Solución



Parte (a).

En la figura se muestra a la carga y el plano así como el diagrama de cuerpo libre de la carga para cualquier posición z respecto al plano cargado.

Sabeos que el campo eléctrico para un plano infinito está dado por

$$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_n$$

Aplicando la segunda ley de newton al movimiento de la carga puntual considerada positiva es

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{F}_e = m\vec{a}_z \Rightarrow (qE - mg)\vec{k} = m\vec{a}_z$$

$$m \frac{d\vec{v}_z}{dt} = (qE - mg)\vec{k} \Rightarrow \frac{d\vec{v}_z}{dt} = \left(\frac{qE}{m} - g \right) \vec{k}$$

Remplazando el campo eléctrico tenemos

$$\frac{d\vec{v}_z}{dt} = \left(\frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0 m} - g \right) \vec{k}$$

Separando variables e integrando la expresión anterior nos da

$$\int_0^{\vec{v}_z} d\vec{v}_z = \left(\frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0 m} - g \right) \int_0^t dt \vec{k}$$

$$\vec{v}_z = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0 m} - g \right) t \vec{k}$$

Para determinar la posición en función del tiempo se integra la ecuación de la velocidad

$$d\vec{r} = \left(\frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0 m} - g \right) t dt \vec{k}$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \left(g - \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0 m} \right) t dt \vec{k}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \left(\frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0 m} - g \right) \frac{t^2}{2} \vec{k}$$

$$z\vec{k} = z_0\vec{k} + \left(\frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0 m} - g \right) \frac{t^2}{2} \vec{k}$$

$$z = z_0 - \frac{1}{2} \left(g - \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0 m} \right) t^2$$

Parte (b).

El valor de v_0 para el equilibrio se obtiene aplicando la ecuación de equilibrio en dirección vertical, esto es

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= 0 \\ F_e &= mg \Rightarrow qE = mg \\ q \left(\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \right) &= mg \\ \sigma_0 &= \frac{2mg\epsilon_0}{q} \end{aligned}$$

Parte (c). Para determinar el tiempo con el cual impacta sobre la placa se hace $z = 0$ en la ecuación de la posición, es decir

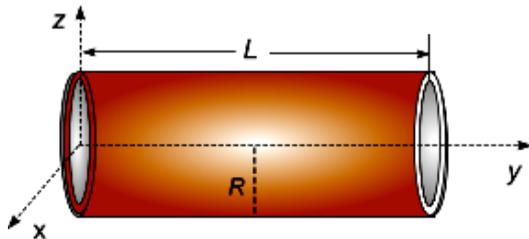
$$\begin{aligned} 0 &= z_0 - \frac{1}{2} \left(g - \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0 m} \right) t^2 \rightarrow z_0 = \frac{1}{2} \left(g - \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0 m} \right) t^2 \\ t &= \sqrt{\frac{2z_0}{g - \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0 m}}} \end{aligned}$$

La velocidad con que llega será

$$v = at = \frac{1}{2} \left(g - \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0 m} \right) \sqrt{\frac{2z_0}{g - \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0 m}}}$$

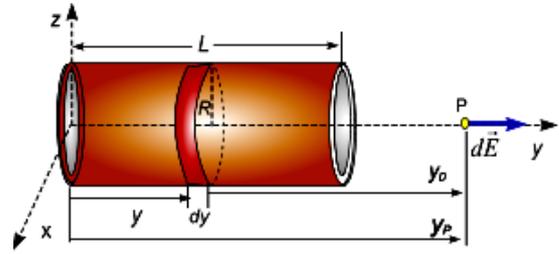
Problema 16

El eje de un tubo hueco de radio R y longitud L está alineado con el eje y , la orilla izquierda del tubo está en $y = 0$, como se muestra en la figura. El tubo tiene una carga total Q distribuida uniformemente en su superficie. Integrando el resultado para una espira (anillo) de carga a lo largo de su propio eje, determine la intensidad de campo eléctrico a lo largo del eje y , como función de y .



Solución

Se divide a la distribución de carga en elementos diferenciales de carga dq en forma de anillos de radio R y de ancho dy como se muestra en la figura



Se ha demostrado en el problema 10, que el campo eléctrico debido a un anillo en un punto sobre el eje z está dado por

$$\vec{E}_z = \frac{kqz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}$$

Para un anillo con centro en el origen de coordenadas, el campo que produciría en cualquier punto sobre el eje y sería

$$\vec{E}_y = \frac{kqy}{(R^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j}$$

Aplicando esta ecuación para el problema debemos observar que el anillo es un elemento diferencial dq de radio R y por tanto producirá un campo diferencial $d\vec{E}_y$ dado por

$$d\vec{E}_y = \frac{k(dq)(y_D)}{(R^2 + y_D^2)^{3/2}} \vec{j}$$

Debido a que la distribución de carga es superficial, el elemento tiene una carga

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\pi RL} = \frac{dq}{dA} \\ dq &= \frac{Q}{2\pi RL} dA = \frac{Q}{2\pi RL} (2\pi R dy) \\ dq &= \frac{Q}{L} dy \end{aligned}$$

Al reemplazar esta cantidad y usar la geometría se tiene

$$\begin{aligned} d\vec{E}_y &= \frac{k(dq)(y_D)}{(R^2 + y_D^2)^{3/2}} \vec{j} = \frac{k \left(\frac{Q}{L} dy \right) (y_p - y)}{\left[(y_p - y)^2 - R^2 \right]^{3/2}} \vec{j} \\ d\vec{E}_y &= \frac{kQ(y_p - y)dy}{L \left[(y_p - y)^2 - R^2 \right]^{3/2}} \vec{j} \end{aligned}$$

El campo total debido a la distribución completa se obtiene integrando la ecuación anterior, esto es

$$\vec{E}_y = \frac{kQ}{L} \int_0^L \frac{(y_p - y)dy}{[(y_p - y)^2 - R^2]^{3/2}} \vec{j}$$

La integral se evalúa haciendo el cambio de variable siguiente

$$u = (y_p - y)^2 - R^2$$

$$du = 2(y_p - y)(-dy) \Rightarrow dy = -\frac{du}{2(y_p - y)}$$

Al sustituir estos valores se tiene

$$\vec{E}_y = \frac{kQ}{L} \int \frac{(y_p - y) \left(-\frac{du}{2(y_p - y)} \right)}{u^{3/2}} \vec{j}$$

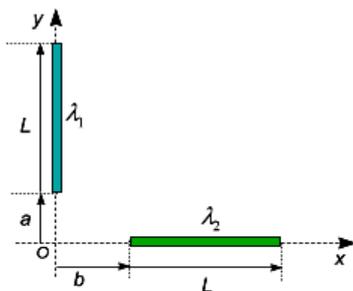
$$\vec{E}_y = -\frac{kQ}{2L} \int u^{-3/2} du \vec{j} = -\frac{kQ}{2L} \left(\frac{u^{-1/2}}{-1/2} \right) \vec{j} = \frac{kQ}{L} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right) \vec{j}$$

$$\vec{E}_y = \frac{kQ}{L} \left[\frac{1}{\sqrt{(y_p - y)^2 - R^2}} \right]_0^L \vec{j}$$

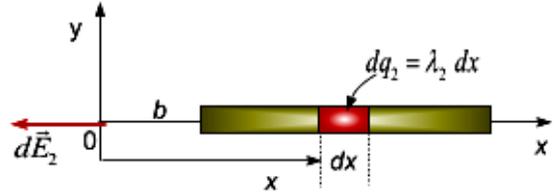
$$\vec{E}_y = \frac{kQ}{L} \left[\frac{1}{\sqrt{(y_p - L)^2 - R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(y_p)^2 - R^2}} \right] \vec{j}$$

Problema 17

Dos barras de longitudes iguales $L = 1,5 \text{ m}$, transportan densidades de carga uniformes $\lambda_1 = 20 \mu\text{C/m}$ y $\lambda_2 = 35 \mu\text{C/m}$, respectivamente. Si la distancia $a = 0,15 \text{ m}$, mientras que la distancia $b = 0,25 \text{ m}$. (a) Encuentre el campo eléctrico \vec{E} en el origen del sistema coordenado. (b) Si ahora se coloca una carga puntual $Q = 25 \mu\text{C}$ en dicho origen ¿Cuál será la fuerza eléctrica sobre la carga puntual ejercida por las distribuciones?.



Se determina el campo de cada una individualmente, esto es



El campo producido por el elemento de carga $dq_2 = \lambda_2 dx$, es

$$d\vec{E}_2 = -\frac{k dq_2}{x^2} \vec{i} = -\frac{k \lambda_2 dx}{x^2} \vec{i}$$

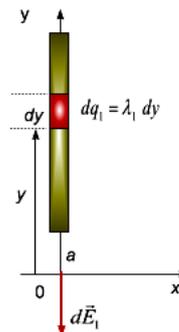
El campo neto será

$$\vec{E}_2 = -k \lambda_2 \int_b^{b+L} x^{-2} dx \vec{i}$$

$$\vec{E}_2 = -k \lambda_2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+L} \right) \vec{i}$$

$$\vec{E}_2 = -k \lambda_2 \left(\frac{L}{b(b+L)} \right) \vec{i}$$

El campo de la varilla vertical es



El campo producido por el elemento de carga $dq_1 = \lambda_1 dy$

$$d\vec{E}_1 = -\frac{k dq_1}{y^2} \vec{j} = -\frac{k \lambda_1 dy}{y^2} \vec{j}$$

El campo neto será

$$\vec{E}_1 = -k \lambda_1 \int_a^{a+L} y^{-2} dy \vec{j}$$

$$\vec{E}_2 = -k \lambda_2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L} \right) \vec{j}$$

$$\vec{E}_1 = -k \lambda_1 \left(\frac{L}{a(a+L)} \right) \vec{j}$$

El campo total es

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\left(\frac{k\lambda_1 L}{a(a+L)}\right)\vec{j} - \left(\frac{k\lambda_2 L}{b(b+L)}\right)\vec{i}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{9 \cdot 10^9 \times 20 \cdot 10^{-6} \times 1,5}{0,15(1,65)}\right)\vec{j} - \left(\frac{9 \cdot 10^9 \times 35 \cdot 10^{-6} \times 1,5}{0,25(1,75)}\right)\vec{i}$$

Simplificando tenemos

$$\vec{E} = -1091 \cdot 10^3 \vec{j} - 1080 \cdot 10^3 \vec{i}$$

La fuerza sobre la carga $Q = 25 \mu\text{C}$, será

$$\vec{F}_e = Q\vec{E} = Q(-1091 \cdot 10^3 \vec{j} - 1080 \cdot 10^3 \vec{i})$$

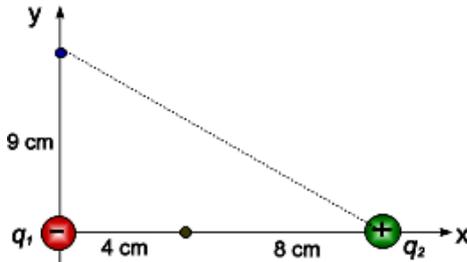
$$\vec{F}_e = 25 \cdot 10^{-6}(-1091 \cdot 10^3 \vec{j} - 1080 \cdot 10^3 \vec{i})$$

$$\vec{F}_e = (-27,3\vec{j} - 27\vec{i})N$$

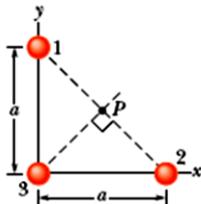
$$|\vec{F}_e| = 38,39N$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dos cargas puntuales $q_1 = -6 \text{ nC}$ y $q_2 = +6 \text{ nC}$, están separadas 12 cm , como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en el punto A y en el punto B.



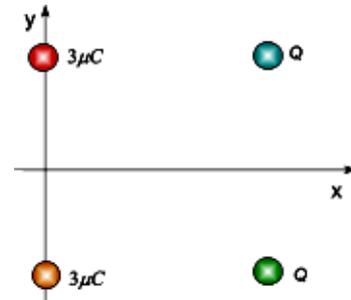
2. Se colocan cargas de $-2 \mu\text{C}$ y $+4 \mu\text{C}$ en los vértices de un triángulo equilátero de 10 cm de lado. a) ¿Cuál es la magnitud de la intensidad de campo eléctrico en el tercer vértice?. b) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza que actuaría sobre una carga de $-2 \mu\text{C}$ colocada en dicho vértice?.
3. En la figura, las tres partículas se encuentran fijas en las posiciones mostradas y tienen las cargas $q_1=q_2=+e$ y $q_3 = +2e$. Si la distancia $a = 6 \mu\text{m}$. Determine, la magnitud y la dirección del campo magnético en el punto P debido a las partículas.



4. Se tiene dos cargas puntuales de $+5 \mu\text{C}$ y $-10 \mu\text{C}$, que distan en 1 m . a) Encontrar el módulo y la dirección del campo eléctrico en un punto situado a $0,6 \text{ m}$ de la primera carga y a $0,8 \text{ m}$ de la segunda. b) Hallar el punto donde el campo eléctrico de estas dos cargas es cero.
5. Dos carga puntuales iguales y positivas de valor $q_1 = q_2 = 8 \text{ nC}$, están situadas sobre el eje y en los puntos $y_1 = +4 \text{ cm}$ e $y_2 = -4 \text{ cm}$. (a) ¿Cuál es el valor y dirección del campo eléctrico sobre el eje x en $x = 5 \text{ cm}$?. (b) ¿Cuál es la fuerza eléctrica sobre una tercera carga de prueba $q_0 = 2 \text{ nC}$ ubicada en el punto P $(3, 4) \text{ cm}$?
6. Una carga puntual de $-5 \mu\text{C}$, esta ubicada en el punto A $(4, -2) \text{ m}$. Una segunda carga puntual de

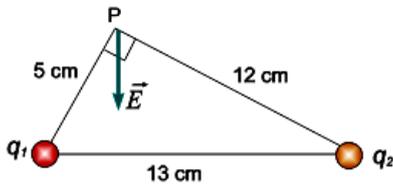
$12 \mu\text{C}$ está ubicada en el punto B $(1, 2) \text{ m}$. (a) Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico en P $(-1, 0) \text{ m}$. (b) Si en el punto P se coloca un electrón, ¿cuál es la fuerza experimentada por dicho electrón?

7. Tres cargas puntuales de $-5 \mu\text{C}$, $+3 \mu\text{C}$ y $+5 \mu\text{C}$ están localizadas a lo largo del eje x en $x = -1 \text{ cm}$, $x = 0 \text{ cm}$, y en $x = +1 \text{ cm}$, respectivamente. Calcular el campo eléctrico en $x = +3 \text{ cm}$ y en $x = 15 \text{ cm}$. ¿Existe algún punto sobre el eje x en donde la magnitud del campo eléctrico sea cero?. Localizar dicho punto.
8. Dos cargas de $+3 \mu\text{C}$ están localizadas en $(0, 2) \text{ m}$ y en $(0, -2) \text{ m}$. Otras dos cargas Q están localizadas en $(4, 2) \text{ m}$ y en $(4, -2) \text{ m}$. Como se muestra en la figura. El campo eléctrico en el origen de coordenadas es $\vec{E} = (4 \cdot 10^3 \text{ i}) \text{ N/C}$. Determine Q .

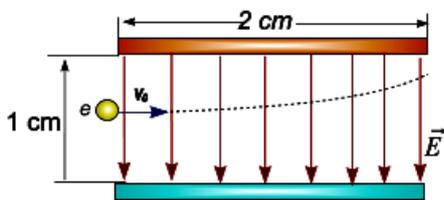


9. Una carga $q_1 = -0,3 \mu\text{C}$ se encuentra localizada en el punto A $(25, -30, 15) \text{ cm}$, mientras que una segunda carga $q_2 = 0,5 \mu\text{C}$ se encuentra ubicada en el punto B $(-10, 8, 12) \text{ cm}$. Encuentre la intensidad de campo eléctrico en: (a) el origen de coordenadas y (b) P $(15, 20, 50) \text{ cm}$.
10. Dos cargas puntuales positivas Q se mantienen fijas sobre el eje x una en $x = a$ y la otra en $x = -a$. Una tercera carga puntual q de masa m , está situada sobre el eje x tal que $|x| \ll a$. La carga q que puede moverse libremente a lo largo del eje x, es liberada. Encuentre la frecuencia de oscilación de la carga q . (b) Suponga ahora que la carga q está colocada sobre el eje y tal que $|y| \ll a$ y que se libera. Si esta carga tiene libertad de moverse en cualquier parte del plano xy, ¿qué le pasará?. Explique su respuesta.
11. Dos cargas están situadas como se muestra en la figura. La magnitud de q_1 es $3 \mu\text{C}$, pero su signo y valor de la carga q_2 no se conocen. El campo eléctrico neto \vec{E} en el punto P es enteramente en la dirección y negativa. (a) Considerando los posibles signos de q_1 y q_2 , hay cuatro posibles diagramas que

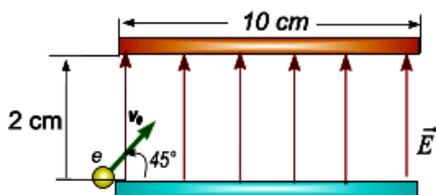
podrían representar los campos \vec{E}_1 y \vec{E}_2 producidas por q_1 y q_2 . Trace las cuatro posibles configuraciones del campo eléctrico, (b) Utilizando los dibujos del apartado (a) y la dirección del campo eléctrico neto en P, deduzca los signos de q_1 y q_2 . (c) Determine la magnitud del campo eléctrico neto \vec{E} .



12. Un electrón se lanza con una velocidad inicial $v_0 = 4 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ dentro del campo eléctrico entre las placas paralelas de la figura. La dirección del campo es verticalmente hacia abajo y el campo es cero excepto entre las placas. El electrón entra al campo en un punto situado a la mitad entre las placas. (a) Si el electrón apenas pasa la placa superior al salir del campo, encuentre la magnitud del campo eléctrico. (b) Suponga que en la figura el electrón es remplazado por un protón con la misma velocidad inicial v_0 . ¿tocaría el protón una de las placas?. ¿Cuál es la magnitud y dirección de su desplazamiento vertical al salir de la región entre las placas?. (c) Compare las trayectorias descritas por ambas partículas y explique las diferencias.

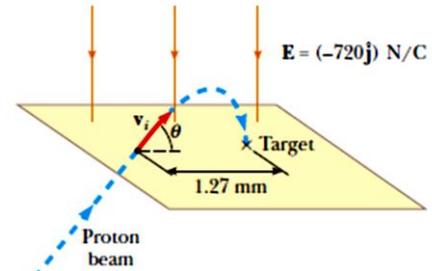


13. Un electrón parte de la posición indicada en la figura con una velocidad inicial $v_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ formando un ángulo de 45° con el eje x. El campo eléctrico tiene la dirección y positiva y su magnitud es de $3,5 \text{ kN/C}$. ¿Sobre cuál de las placas y en qué lugar chocará el electrón?.

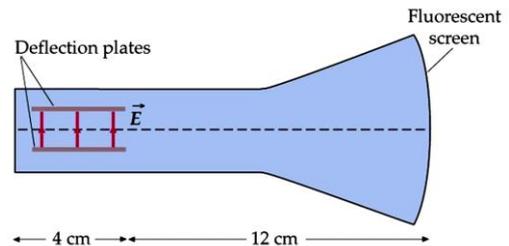


14. Se proyectan varios protones con una velocidad inicial $v_i = 9,55 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ en una región donde está presente un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (-720 \hat{j}) \text{ N/C}$, como se muestra en la figura.

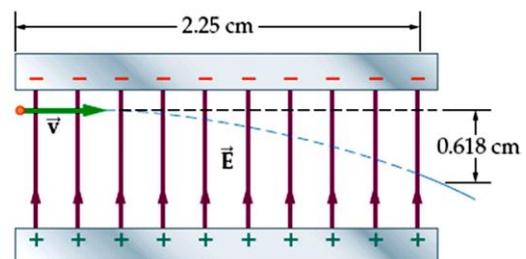
Los protones deben alcanzar un objetivo que se encuentra a una distancia horizontal de $1,27 \text{ mm}$ del punto por donde los protones atraviesan el plano y entran en el campo eléctrico de la figura. Determine: (a) los dos ángulos de proyección θ que logren el resultado esperado, (b) el tiempo total de vuelo para cada una de las trayectorias. Considere que $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ y $q_p = +1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$



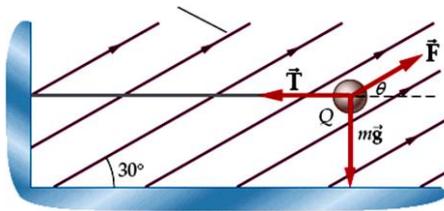
15. Un electrón cuya energía cinética es $2 \cdot 10^{-16} \text{ J}$ se mueve hacia la derecha a lo largo del eje de un tubo de rayos catódicos como se muestra en la figura. En la región comprendida entre las placas deflectoras existe un campo eléctrico $\vec{E} = (2 \cdot 10^4 \text{ N/C}) \hat{j}$. En cualquier otro sitio $E = 0$. (a) ¿A qué distancia del eje del tubo se encuentra el electrón cuando alcanza el extremo de la placa?. (b) ¿Bajo qué ángulo respecto al eje se mueve el electrón? Y (c) ¿A qué distancia del eje se encuentra el electrón cuando choca contra la pantalla fluorescente?.



16. La figura muestra un electrón entrando a un capacitor de placas paralelas con una velocidad $v_0 = 5,45 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. El campo eléctrico del capacitor ha desviado al electrón una distancia $0,618 \text{ cm}$ en el punto donde el electrón sale del capacitor. Encuentre: (a) la magnitud de la intensidad de campo eléctrico en el capacitor, (b) la magnitud y dirección de la velocidad del electrón cuando sale del capacitor (c) La energía cinética del electrón en el instante que sale del capacitor. Considere que $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.



17. Una placa horizontal infinita tiene una densidad de carga uniforme $\sigma = 64,2 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Se coloca una pastilla de $4,75 \text{ g}$ de masa, en reposo, a $0,866 \text{ m}$ de la placa. Si la pastilla tiene una carga negativa $q = -3,6 \mu\text{C}$. ¿Cuál es su rapidez cuando llega a la placa?. Solo tenga en cuenta la interacción electrostática.
18. Un cuerpo de masa $m = 3,7 \text{ g}$ y carga $Q = +44 \mu\text{C}$ unido mediante una cuerda unida a la pared es colocada en el interior de un campo eléctrico como se muestra en la figura. Si el objeto permanece en equilibrio estático cuando la cuerda se encuentra horizontal. Determine: (a) la magnitud del campo eléctrico y (b) la tensión en el hilo.

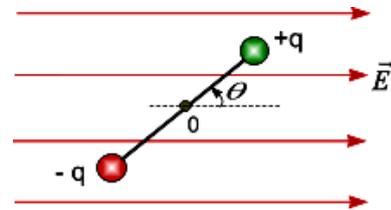


19. Se tiene un alambre infinito con densidad de carga uniforme λ , a lo largo del eje z . Una partícula de masa m y carga q se mueve en una circunferencia, en el plano xy , con centro en el alambre. Determine la velocidad de la partícula y demuestre que es independiente del radio del círculo. Sólo tenga en cuenta la interacción electrostática entre el alambre y la carga.
20. Una carga positiva $+q$ puede moverse en una órbita circular con respecto a un alambre infinito negativamente cargado, con densidad lineal de carga $-\lambda$. Demuestre que el período de la órbita es proporcional al radio de la misma. Compare este resultado con la dependencia del período de una órbita circular respecto al radio de la misma, para una carga puntual que interactúe con otra carga puntual.
21. Una pelota de corcho de $0,40 \text{ g}$ de masa se coloca entre dos placas horizontales grandes. La placa de abajo tiene una densidad de carga uniforme de $\sigma_1 = 0,8 \mu\text{C}/\text{m}^2$, mientras que la superior tiene una densidad de carga uniforme $\sigma_2 = -0,5 \mu\text{C}/\text{m}^2$, la pelota de corcho que tiene una carga desconocida, se coloca entre las placas, y se observa que flota inmóvil. ¿Cuál es la magnitud y signo de la carga que posee la pelota?

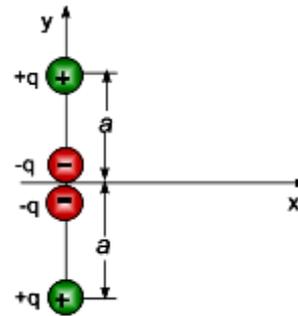
22. Una pelota de corcho de 5 g de masa, con una carga de $-2\mu\text{C}$, está colgada de un hilo de 1 m de longitud sobre una placa horizontal, uniformemente

cargada, con densidad de carga $\sigma = 1 \mu\text{C}/\text{m}^2$. La pelota se desplaza de la vertical un ángulo pequeño y se le permite oscilar. Demuestre que la pelota describe un movimiento armónico simple y calcule la frecuencia de oscilación de ese movimiento.

23. La figura muestra una palanqueta formada por dos masas idénticas m sujetas a los extremos de una barra delgada (sin masa) de longitud a con un pivote en su centro, las masas transportan las cargas $+q$ y $-q$ y el sistema está localizado en un campo eléctrico uniforme \vec{E} . Demuestre que para pequeños valores del ángulo θ entre la dirección del dipolo y el campo eléctrico, el sistema ejecutará un MAS y deducir el período de este movimiento.



24. Un cuadrupolo consta de dos cargas próximas entre sí como se indica en la figura. La carga efectiva en el origen es $-2q$ y las otras dos cargas están sobre el eje y en $y = a$ e $y = -a$ valen $+q$. (a) Determine el campo eléctrico en un punto sobre el eje x a gran distancia de manera que $x \gg a$. (b) Determine el campo eléctrico en un punto sobre el eje y a gran distancia de manera que $y \gg a$.



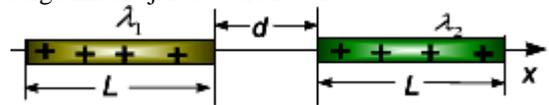
25. Determine el campo eléctrico debido a una varilla delgada, infinitamente larga, con una densidad de carga uniforme $\lambda = 4 \mu\text{C}/\text{m}$, a una distancia de 70 cm de la varilla. Suponga que la varilla está alineada con el eje y .
26. Una carga lineal uniforme de densidad $\lambda = 5 \text{ nC}/\text{m}$, se distribuye desde $x = 0$ hasta $x = 3\text{m}$. (a) Determine la carga total. (b) Determine el campo eléctrico en los puntos $A(4, 0) \text{ m}$; $B(8, 0) \text{ m}$ y en $P(0, 3) \text{ m}$.

27. Dos planos cargados verticales e infinitos son paralelos y están separados una distancia $d = 2 \text{ m}$. Determinar el campo eléctrico a la izquierda de los planos, a la derecha y entre ambos cuando: (a) Cada uno de los planos posee una densidad de carga uniforme $\sigma = +5 \mu\text{C}/\text{m}^2$ y (b) El plano izquierdo tiene una carga $\sigma = +4 \mu\text{C}/\text{m}^2$ y el derecho $\sigma = -3 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Dibuje las líneas de campo eléctrico en cada caso.
28. Una carga de $+8 \mu\text{C}$ está distribuida en un anillo de 10 cm de radio. Determine la intensidad de campo eléctrico sobre el eje del mismo en: (a) $2,5 \text{ cm}$, (b) $4,6 \text{ cm}$ y (c) 5 m , (d) determine el campo eléctrico en 5 m con la aproximación de que el anillo es una carga puntual en el origen y comparar este resultado con el obtenido en (c), ¿Cuál es el error porcentual que se comete al hacer esta aproximación?
29. Un disco de 5 cm de radio es portador de una densidad de carga superficial de $\sigma = +20 \mu\text{C}/\text{m}^2$, Utilizando aproximaciones razonables determine el campo eléctrico en puntos sobre el eje a distancias de: (a) $0,05 \text{ cm}$, (b) 2 cm , (c) 8 cm y (d) 6 m .
30. Una carga lineal finita de densidad de carga lineal uniforme λ está situada sobre el eje x desde $x = -a$ hasta $x = +b$. determinar el campo eléctrico en puntos sobre el eje y a una distancia d de la barra.
31. Un sistema está compuesto por una carga lineal infinita de densidad lineal de carga uniforme $\lambda = -7 \mu\text{C}/\text{m}$, es paralela al eje y en $x = -2,5 \text{ m}$. Una carga puntual de $5 \mu\text{C}$ está localizada en el punto $A(3, 4) \text{ m}$. Determine la intensidad de campo eléctrico en el punto $P(2, -3) \text{ m}$.
32. Un semianillo de radio $R = 20 \text{ cm}$ tiene una carga uniforme de $q = 0,70 \text{ nC}$, está ubicado en el plano xy con su centro de curvatura en el origen de coordenadas. Determine la intensidad de campo eléctrico en el punto $P(0, 0, 20) \text{ cm}$.
33. En el centro de un anillo fino de radio R , en el cual está distribuido uniformemente una carga $-q$, se encuentra una carga puntual $+Q$. determine el módulo del vector intensidad de campo eléctrico en un punto del eje del anillo, distante z de su centro, si $z \gg R$.
34. Un sistema se compone de un disco de radio R cargado con una densidad de carga uniforme σ y de una varilla uniformemente cargada con una

densidad λ , de longitud L , dispuesto en el eje del disco de modo que uno de sus extremos coincide con el centro de éste. Determine la fuerza de interacción entre el disco y la varilla.

35. Dos planos infinitos de carga son paralelos entre sí y paralelos al plano yz . Uno de ellos a $x = -2 \text{ m}$ y su densidad de carga superficial es $\sigma = -3,5 \mu\text{C}/\text{m}^2$. El otro corresponde a $x = +2 \text{ m}$ y tiene una densidad superficial de carga $\sigma = +6 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Determine el campo eléctrico para (a) $x < -2 \text{ m}$, (b) $-2 \text{ m} < x < 2 \text{ m}$ y (c) $x > 2 \text{ m}$.

36. Dos cargas lineales uniformes de densidades de carga λ_1 y λ_2 tienen igual longitud L y están situadas sobre el eje x separadas una distancia d como indica la figura. ¿Cuál es la fuerza que una carga lineal ejerce sobre la otra?

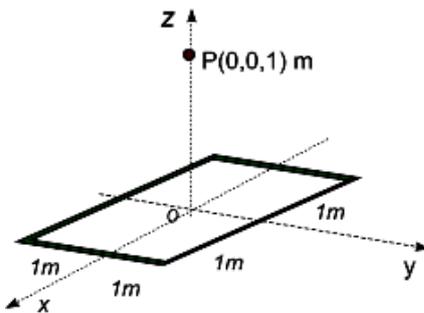


37. Dos cargas laminares uniformes e infinitas paralelas al plano yz cada una con una densidad σ , se colocan en $x = \pm 1$. Determinar el campo eléctrico en todas las regiones.
38. Repita el problema anterior para el caso en el plano en $x = -1 \text{ m}$ posee una distribución de carga $+\sigma$ y el plano en y y el plano en $x = 1 \text{ m}$ posee una distribución de carga $-\sigma$.
39. Sobre un disco circular de radio R ubicado en el plano $z = 0$ se ha distribuido una densidad de carga no uniforme dada por $\sigma = \sigma_0 \text{Sen}^2 \varphi$. Determinar \mathbf{E} en el punto $(0, \varphi, h)$.
40. Sobre un disco de radio $R = 0,5 \text{ m}$ ubicado en el plano $z = 0$ se ha distribuido una carga con una densidad no uniforme tal que su densidad de carga está dada por $\sigma = (10^{-4}/r) \text{C}/\text{m}^2$. Determine \mathbf{E} en el punto sobre el eje z situado a una distancia de 3 m desde el centro del disco.
41. Hay una carga en el plano $Z = -3 \text{ m}$ en forma de una hoja cuadrada definida por $-2 \leq x \leq 2 \text{ m}$, $-2 \leq y \leq 2 \text{ m}$, con densidad de carga $\sigma = 2(x^2 + y^2 + 9)^{3/2} \text{ nC}/\text{m}^2$ Halle el campo eléctrico en el origen de coordenadas.

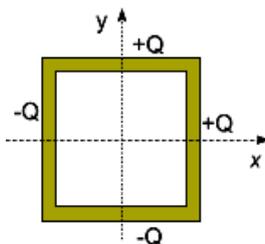
42. Un anillo fino aislante de radio R tiene una carga, cuya densidad lineal de carga es $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$, donde λ_0 es una constante positiva y φ es el ángulo azimutal. Determine el módulo de la intensidad del campo eléctrico: (a) En el centro del anillo, b) En el eje del anillo en dependencia de la distancia z hasta su centro.

43. Se corta un orificio circular de radio R de un plano infinito que lleva una carga por unidad de área, σ . Calcule el campo eléctrico en un punto a lo largo del eje que pasa por el centro del orificio y a una distancia H del plano.

44. Una carga lineal uniforme de densidad $\lambda = 1 \text{ nC/m}$ está arreglada en la forma de un cuadrado de 2 m de lado, como se muestra en la figura. Encuentre la magnitud de la intensidad de campo eléctrico en el punto $P(0, 0, 1) \text{ m}$.

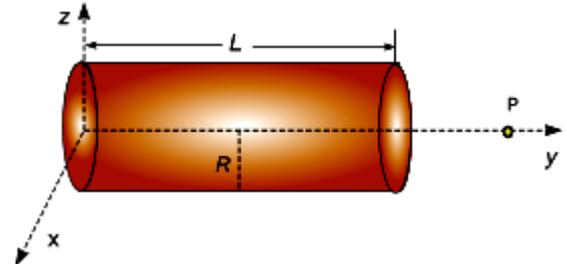


45. Una carga eléctrica está distribuida a lo largo de cada lado del cuadrado de lado a . Dos lados adyacentes tienen una distribución de carga positiva con carga total $+Q$ sobre cada uno. (a) Si los otros dos lados tienen una distribución de carga negativa con una carga total $-Q$ sobre cada uno. ¿Cuáles son las componentes x e y del campo eléctrico neto en el centro del cuadrado?. (b) Repita el cálculo del apartado (a) considerando que sobre los cuatro lados del cuadrado ha sido distribuida cargas positivas $+Q$



46. El eje de un cilindro de radio R y longitud L está alineado con el eje y , la orilla izquierda del cilindro

está en $y = 0$, como se muestra en la figura. El cilindro tiene una carga total Q distribuida uniformemente en todo su volumen. Integrando el resultado para un disco de carga a lo largo de su propio eje, determine la intensidad de campo eléctrico en el punto P a lo largo del eje del cilindro en función de $Q, L, y R$



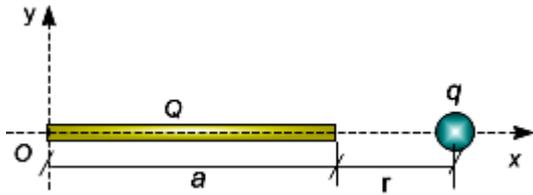
47. Entre dos placas separadas 4 cm existe un campo eléctrico uniforme de magnitud 640 N/C . De manera simultánea se libera un protón de la placa positiva y un electrón de la placa negativa. (a) Determine la distancia a la placa positiva en el momento en que ambos se cruzan. Desprecie la atracción eléctrica existente entre el protón y el electrón. (b) ¿Qué sucedería si? Repita el inciso (a) ahora con un ión de sodio (Na^+) y con un ión de cloro (Cl^-).

48. Una distribución de carga lineal uniforme, infinita en extensión se encuentra a lo largo del eje z . Si la densidad de carga es $\lambda = 20 \text{ nC/m}$, determine la intensidad de campo eléctrico \vec{E} en el punto $P(6, 8, 3) \text{ m}$.

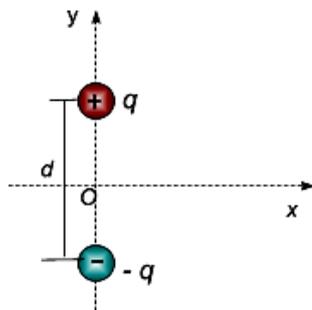
49. Dos cargas lineales idénticas y uniformes de $\lambda = 5 \text{ nC/m}$, son paralelas al eje z , en $x = 0, y = \pm 4 \text{ m}$. Determine el vector campo eléctrico \vec{E} en el punto $P(\pm 4, 0, z)$.

50. El plano $-x + 3y - 6z = 6 \text{ m}$ contiene una distribución superficial de carga $\sigma = 0,53 \text{ nC/m}^2$. Encuentre el vector intensidad de campo eléctrico en el lado que contiene al origen de coordenadas.

51. La carga positiva Q está distribuida uniformemente a lo largo del eje de las x desde $x = 0$, hasta $x = a$. Sobre el eje también existe una carga puntual $+q$ situada en $x = a + r$, una distancia r a la derecha del extremo de Q como se ve en la figura. (a) Determine las componentes x e y de la intensidad de campo eléctrico producido por la distribución de carga Q en puntos sobre el eje $x < a$. (b) Determine la fuerza (magnitud y dirección) que la distribución de carga Q ejerce sobre q . (c) Demuestre que si $r \gg a$, la magnitud de la fuerza del inciso (b) es aproximadamente al de una carga puntual Q situada en el origen de coordenadas.

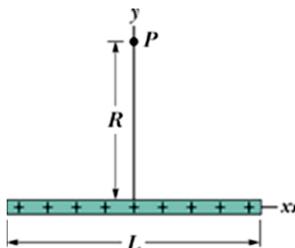


52. Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas puntuales $q_1 = +2e$ y $q_2 = -2e$ donde e es la carga del electrón, separadas por una distancia $d = 10^{-9} m$. Las cargas están localizadas a lo largo del eje y como se ve en la figura. Suponiendo que se aplica un campo eléctrico externo constante $\vec{E} = (3\hat{i} + 3\hat{j}) N/C$. (a) ¿Cuál es la magnitud y dirección del momento dipolar. (b) ¿Cuál es la magnitud y dirección del torque sobre el dipolo?.



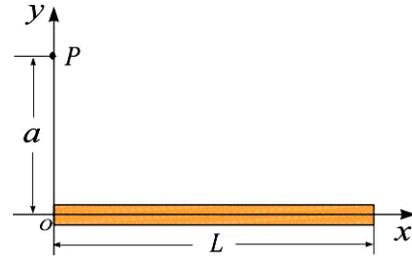
53. Una carga positiva $+Q$ está distribuida a lo largo del eje x de $x = 0$ a $x = a$. La carga negativa $-Q$ está distribuida a lo largo de eje $-x$ de $x = 0$ a $x = -a$. Hay una carga positiva $+q$ sobre el eje positivo de las y a una distancia y del origen. Determine el campo eléctrico debido a las distribuciones en el punto donde se localiza la carga puntual $+q$ y a partir de él determine la fuerza eléctrica que ejercen las distribuciones sobre la carga puntual.

54. Una carga positiva $q = 7,81 pC$ es distribuida uniformemente sobre una barra no conductora delgada de longitud $L = 14,5 cm$. Determine: (a) la magnitud y dirección del campo eléctrico producido por la barra en el punto P ubicado a una distancia $R = 6 cm$ en el bisector perpendicular a la barra y (b) Si en P se coloca una carga de $2,32 \mu C$. ¿Cuál será la magnitud y dirección de la fuerza experimentada por ésta última?

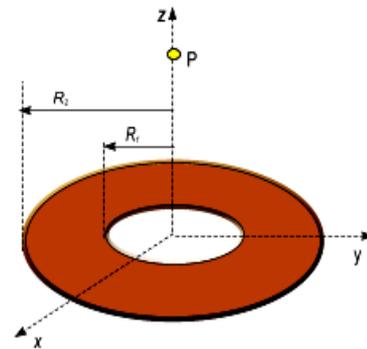


55. Sobre una barra delgada de longitud L fija a lo largo del eje x con uno de sus extremos en el origen

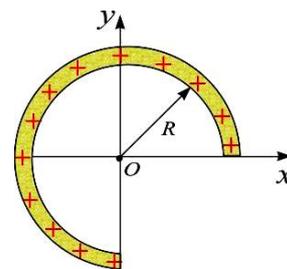
de coordenadas se ha distribuido una carga con una densidad $\lambda = \lambda_0 x$, donde λ_0 es una constante. Determine: (a) la componente vertical y de la intensidad de campo eléctrico producido por la barra y (a) la componente horizontal x de la intensidad de campo eléctrico.



56. Un disco delgado con un orificio circular en su centro, conocido como corona circular, tiene un radio interno R_1 y un radio externo R_2 como se muestra en la figura. El disco tiene una densidad de carga superficial uniforme σ en su superficie. (a) ¿Cuál es la carga total de la corona?. (b) Halle la intensidad de campo eléctrico \vec{E} en puntos sobre el eje z .

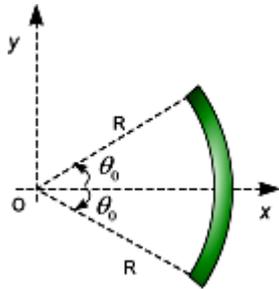


57. Una varilla delgada es doblada en la forma de un arco de un círculo de radio $R = 7,5 cm$. El arco que tiene la forma de $3/4$ partes de una circunferencia se encuentra centrado en el origen de coordenadas, como muestra la figura. Si sobre la varilla se distribuye uniformemente una carga $Q = 4,7 nC$. Determine la magnitud y dirección de la intensidad de campo eléctrico en el origen de coordenadas.



58. Una varilla delgada con una carga por unidad de longitud λ es doblada en la forma de un arco de un círculo de radio R . El arco subtiene un ángulo total

$2\theta_0$, simétricamente alrededor del eje x , como muestra la figura- ¿Cuál es el campo eléctrico \vec{E} en el origen O ?

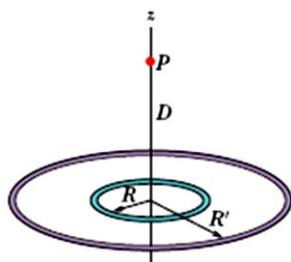


59. Una barra delgada de longitud L está situada sobre el eje x con un extremo en $x = d$ y el otro en el extremo en $x = d + L$. Si sobre la barra lleva una densidad de carga no uniforme $\lambda = \lambda_0 x^2$. Encuentre la intensidad de campo eléctrico en el origen de coordenadas.

60. Un anillo de radio R está ubicado en el plano xy con su centro en el origen de coordenadas. Si sobre el anillo se ha distribuido una densidad de carga no uniforme dada por $\lambda = \lambda_0 \sin \varphi$, donde λ_0 es una constante y φ es el ángulo azimutal, determine la intensidad de campo eléctrico en un punto P ubicado en el eje del anillo a una distancia H , desde el centro.

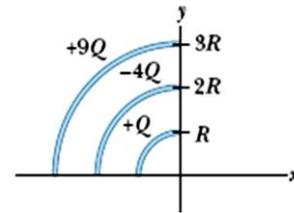
61. Un disco de radio R está ubicado en el plano yz con su centro en el origen de coordenadas. Sobre el disco se ha distribuido una carga con una densidad superficial no uniforme dada por $\sigma = \sigma_0 r$, donde σ_0 es una constante positiva y r es la distancia medida a partir del centro del disco.

62. La figura muestra dos anillos concéntricos, de radios R y $R' = 3R$, que se encuentran fijos en el mismo plano. El punto P se encuentra fijo sobre el eje central Z , a una distancia $D = 2R$ del centro del anillo. El anillo pequeño tiene una carga $+Q$ distribuido uniformemente. En términos de Q , determine la carga uniformemente distribuida sobre el anillo más grande si el campo eléctrico neto en el punto P es cero?



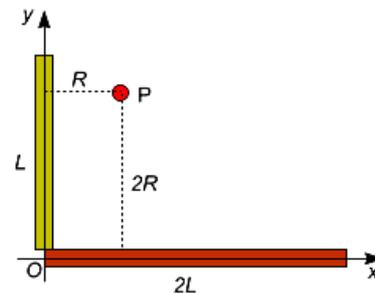
63. La figura muestra tres arcos circulares centrados en el origen de coordenadas. Sobre cada uno de los

arcos de ha distribuido en términos de $Q = 2 \mu C$. Los radios se expresan en función de $R = 10 \text{ cm}$. Determine la magnitud y dirección (referente al eje x positivo) del campo eléctrico neto en el origen debido a los arcos cargados.

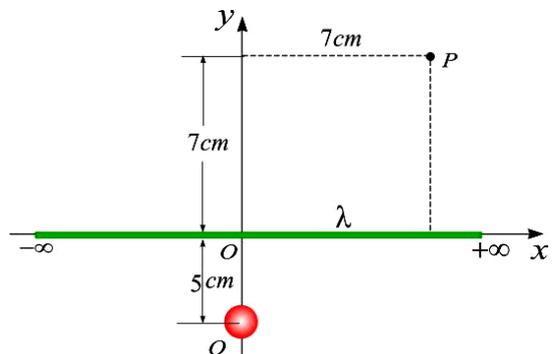


64. Encuentre la ecuación para el campo eléctrico entre dos discos de carga. El primero lleva una densidad de carga $+\sigma$ mientras que el segundo lleva una densidad de carga uniforme $-\sigma$

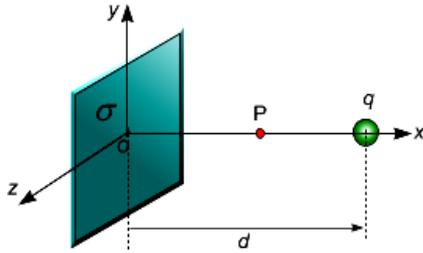
65. Una línea de carga de longitud $2L$ y densidad λ_1 se fija sobre el eje x , mientras una segunda línea de carga de longitud L y densidad de carga λ_2 se encuentra fija sobre el eje y . Encuentre el campo eléctrico en el punto P mostrado en la figura



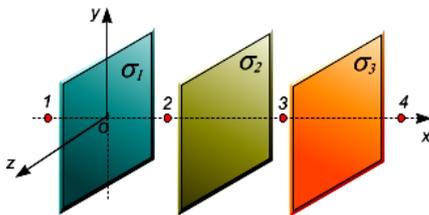
66. Sobre una varilla delgada infinita fija sobre el eje x se ha distribuido una carga con una densidad lineal $\lambda = 2 \mu C/m$ como se muestra en la figura. Una carga puntual $Q = -2 \mu C$ se encuentra ubicada en $x = 0 \text{ cm}$, $y = -5 \text{ cm}$. Determine la intensidad de campo eléctrico en el punto $P (7, 7) \text{ cm}$.



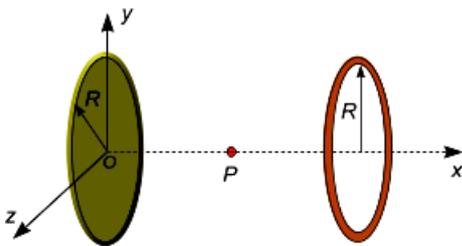
67. Encuentre el campo eléctrico en un punto medio P entre una lámina infinita que lleva una densidad de carga superficial $\sigma = 84,5 \mu C/m^2$ y una carga puntual $q = 5,25 \mu C$ como se muestra en el diagrama. La distancia d entre la lámina de carga y la carga puntual es $7,55 \text{ cm}$



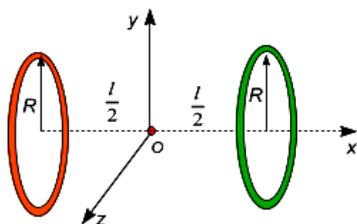
68. Tres láminas infinitas de carga son ubicada en las posiciones mostradas en la figura. La lámina 1 lleva una densidad de carga $\sigma = 1 \mu\text{C}/\text{m}^2$; la lámina 2 una densidad de carga $\sigma = 2 \mu\text{C}/\text{m}^2$; mientras que la lámina 3 lleva una densidad de carga superficial, $\sigma = 3 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Encuentre la intensidad de campo eléctrico en los puntos indicados con 1, 2, 3 y 4 del diagrama.



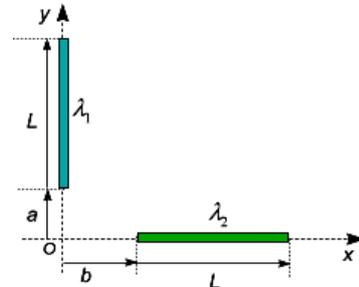
69. Encuentre la intensidad de campo eléctrico en el punto medio P entre un disco de carga el cual tiene una densidad de carga $\sigma = 250 \mu\text{C}/\text{m}^2$ y un anillo de carga el cual tiene una carga total $q = 5,6 \mu\text{C}$. El radio del disco es $0,15 \text{ m}$ y el radio del anillo es $0,15 \text{ m}$ y la distancia de separación entre las distribuciones es $4R$



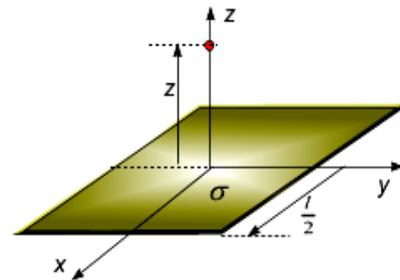
70. Dos anillos circulares de radio R tienen sus centros sobre el eje x separados por una distancia l como se muestra en la figura. Si cada uno lleva una carga Q distribuida uniformemente en su longitud. Encuentre la intensidad de campo $\vec{E}(x)$, en puntos a lo largo del eje x .



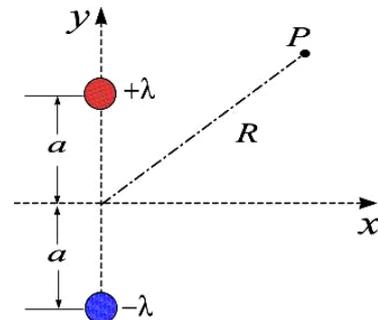
71. Encuentre el campo eléctrico \vec{E} en el origen del sistema coordenado mostrado debido a dos barras delgadas cargadas de longitud $L = 1,5 \text{ m}$. La densidad de carga lineal es $\lambda_1 = - 25 \mu\text{C}/\text{m}$, mientras que $\lambda_2 = - 45 \mu\text{C}/\text{m}$. La distancia $a = 0,15 \text{ m}$, mientras que la distancia $b = 0,25 \text{ m}$.



72. Encuentre la magnitud y dirección de la intensidad de campo eléctrico a una distancia z sobre el centro de un cuadrado el cual lleva una densidad de carga σ uniformemente distribuido sobre su superficie.

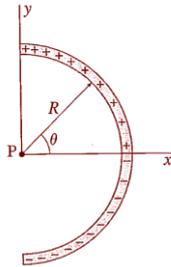


73. Dos líneas de carga esencialmente infinitas está en el plano yz y llevan densidades de carga lineales uniformes $+\lambda$ y $-\lambda$. Encuentre la ecuación para la intensidad de campo eléctrico en un punto arbitrario P. ¿Cuál podría ser el momento dipolar eléctrico?.

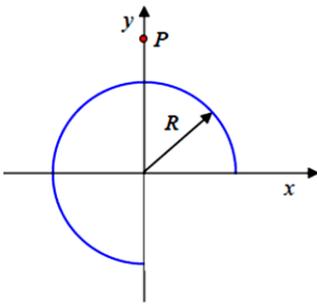


74. Con una barra de vidrio delgada se forma un semicírculo de radio R , tal como se muestra en la figura. Una carga es distribuida a lo largo de la varilla en forma no uniforme con una densidad de carga dada por $\lambda = \lambda_0 \text{sen}\theta$, donde λ_0 es una constante positiva. El punto P es el centro de la semi-círculo. Encuentre la intensidad de campo eléctrico en el punto P. Determine la aceleración,

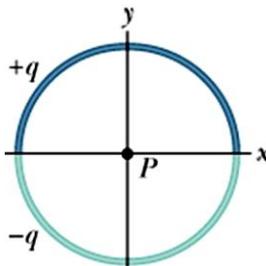
de un electrón localizado en el punto P, asuma que $R = 5 \text{ cm}$ y $\lambda_0 = 1,0 \text{ }\mu\text{C/m}$.



75. El objeto curvado tiene una carga Q uniformemente distribuido a lo largo de su longitud. El radio de curvatura es R . Derive expresiones para las componentes del campo eléctrico en un punto P a una distancia a desde el centro a lo largo del eje y .

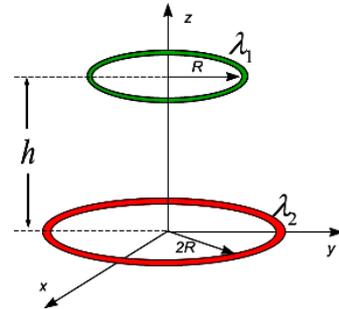


76. Sobre dos barras de plástico curvadas de radio $r = 8,5 \text{ cm}$ ubicadas en el plano xy se han distribuidas cargas $\pm q$. El eje x pasa a través de ambos extremos y la carga es distribuida uniformemente en ambas barras. Si $q = 15 \text{ pC}$. (a) ¿Cuál es la magnitud y la dirección respecto al eje del campo eléctrico producido en el punto P (centro del círculo)?; y (b) si en el centro del círculo se coloca una carga puntual $q_0 = + 2 \text{ pC}$, ¿Cuál será la fuerza que ejerce la distribución de carga sobre ésta última?

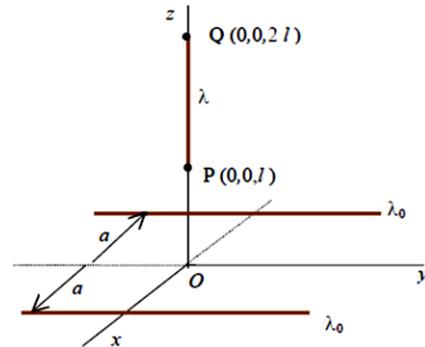


67. La distribución de carga de la figura está formada por dos hilos conductores circulares de radios R y $2R$, cuyas densidades lineales de carga (ambas positivas) son λ_1 y λ_2 , respectivamente. La distancia sobre el eje z que separa a los centros de ambas espiras es h . Se pide: (a) el campo eléctrico en un punto situado sobre la línea que une los centros, a una distancia z del origen de coordenadas (siendo $z \leq h$); (b) la relación matemática entre λ_1 y λ_2 para que el campo

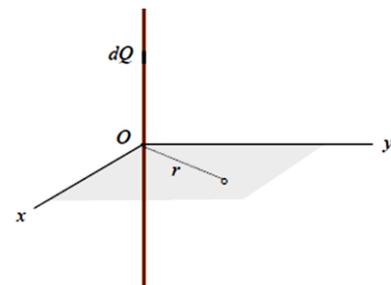
eléctrico resultante se anule a una distancia $z = 2R$. Suponga para este apartado que $h = 3R$; (c) razona si la condición del apartado (b) se cumple en el caso en que los signos de λ_1 y λ_2 son distinto.



- 67 Dos distribuciones de carga de longitud infinita, de densidad de carga λ , constante están ubicadas en el plano xy paralelas al eje y y a una distancia a del origen. Sobre un hilo recto de longitud L y masa m , situado sobre el eje z tal como se muestra en la figura, se distribuye una carga de densidad lineal uniforme λ . Determine: (a) El campo eléctrico que crean las cargas rectilíneas en los puntos del eje z . Dar su expresión en función de z y dibujar su gráfica, (b) el valor de λ para que el hilo se mantenga en equilibrio

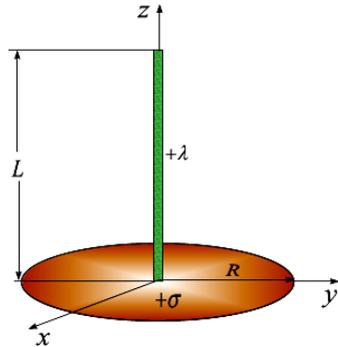


- 68 En la figura se dispone de una distribución rectilínea de carga positiva de densidad $\lambda = kz$, para $z > 0$ y $\lambda = -kz$, para $z < 0$, siendo k una constante positiva. Determine el campo eléctrico E en un punto cualquiera del plano x - y , situado a la distancia r del origen

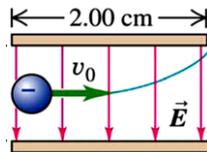


68. Un sistema se compone de un disco de radio R cargado con una densidad de carga uniforme

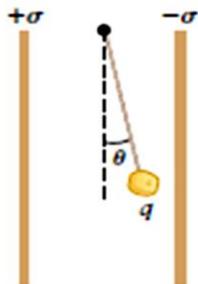
σ y de una varilla uniformemente cargada con una densidad de carga λ , de longitud L , dispuesto en el eje del disco de modo que uno de sus extremos coincide con el centro de éste. Determine la fuerza de interacción entre el disco y la varilla.



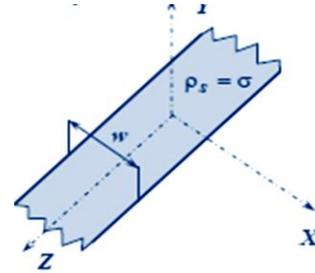
67 La figura muestra un dispositivo para controlar la trayectoria de las gotas de tinta en un tipo de impresora de inyección de tinta. Las gotas son desviadas por un campo eléctrico uniforme generado por dos placas planas cargadas. Una gota de tinta de masa $m = 1.3 \cdot 10^{-10} \text{ kg}$ y carga eléctrica $Q = -1.5 \cdot 10^{-13} \text{ C}$ entra en la región entre las placas con velocidad de $v_0 = 18 \text{ m/s}$. La longitud de las placas es $L = 1,6 \text{ cm}$. Suponga que el campo es uniforme y vale $E = 1.4 \cdot 10^6 \text{ N/C}$. Calcular: a) la relación entre la fuerza eléctrica y la fuerza gravitatoria sobre la gota, ¿puede despreciarse ésta última? b) la desviación vertical de la gota al salir del espacio entre las placas.



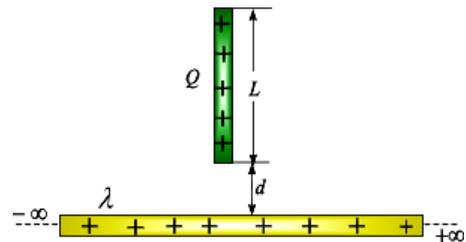
68. Dos placas planas paralelas muy largas tienen densidades de carga por unidad de área de $+2 \mu\text{C}/\text{m}^2$ y $-2 \mu\text{C}/\text{m}^2$, respectivamente. Un pequeño grano de polen de masa $m = 200 \text{ mg}$ y carga q cuelga de un punto fijo mediante un cable flexible e inextensible como se muestra en la figura. Si el cable forma un ángulo $\theta = 30^\circ$ con la vertical. Determine la carga q del grano de polen.



69. Calcular el campo eléctrico creado por una tira indefinida de densidad superficial de carga constante en los puntos del eje Y.



77. Sobre la barra de longitud L se ha distribuido una carga con una densidad $\lambda(y) = ay^2$ en donde y es la distancia medida desde el punto medio de la barra infinita y se encuentra en dirección perpendicular a una carga lineal uniforme e infinitamente larga de densidad $\lambda \text{ C/m}$, como se muestra en la figura. El extremo más próximo de la barra a la carga lineal dista de esta la longitud d . Determine: (a) la constante a , (b) la fuerza total que la carga lineal infinita ejerce sobre la barra de longitud L .



78. Un objeto cargado con $q = -2,05 \mu\text{C}$ unido a una cuerda flexible e inextensible se suspendido en el espacio comprendido entre dos placas grandes y verticales como se muestra en la figura. Si la tensión en el cable es de $0,35 \text{ N}$ y el ángulo que la cuerda forma con la vertical es $\theta = 12^\circ$. Determine: (a) la masa del objeto y (b) la magnitud del campo eléctrico.

Rta: $0,035 \text{ kg}$; $3,5 \cdot 10^4 \text{ N/C}$

