

CAPITULO III

LEY DE GAUSS



3.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior aprendimos el significado del campo eléctrico y como emplear la ley de Coulomb para determinar el campo eléctrico de distribuciones de carga. En este capítulo se describirá un método alternativo para evaluar los campos eléctricos, esto es, el uso de la Ley de Gauss. Esta ley es una expresión fundamental de la ley de Coulomb y constituye una de las leyes fundamentales del electromagnetismo. La aplicación de la ley de Gauss facilita en muchos casos el cálculo de los campos eléctricos. En particular simplifica mucho el cálculo del campo eléctrico cuando la distribución presenta una alta simetría. Además la aplicación de la ley de Gauss permite analizar el comportamiento de los conductores. Para aplicar la ley de Gauss se necesita en primer lugar el conocimiento del flujo eléctrico, magnitud física análoga a aquel flujo que se estudió en mecánica de fluidos.

3.2 FLUJO ELECTRICO

El estudio cualitativo de las líneas de fuerza fue realizado ampliamente en el Capítulo II. Sin embargo, es necesario poner de manifiesto la utilidad de estas líneas, denominadas ahora *líneas de flujo eléctrico*, apoyándonos en una base cuantitativa, explicándose como deben trazarse. Al hacer esto, debe tenerse en cuenta que las líneas de flujo eléctrico son sólo representación ya que no tienen existencia física real, su justificación es su utilidad como ayuda para concebir las situaciones y ejecutar los cálculos.

Las líneas deben trazarse de tal manera que indiquen la dirección de la fuerza eléctrica sobre una carga de prueba positiva estacionaria. El único requisito es que *el número de líneas N que pasen a través del área unitaria perpendicular A a las líneas sea numéricamente igual a la intensidad de campo eléctrico E* . Es decir

$$E \propto \frac{\# \text{ de líneas}}{A_{\perp}} = \frac{N}{A_{\perp}} \quad (3.1)$$

Una forma gráfica de la situación expresada anteriormente se muestra en la figura 3.2.1,

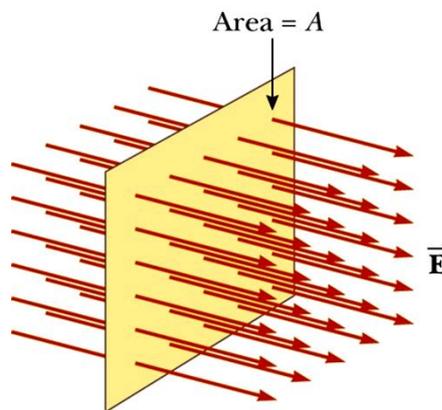


Figura 3.2.1 Líneas de fuerza que atraviesan una superficie perpendicular.

3.2.1 Flujo de un campo uniforme a través de una superficie plana

Se define el flujo eléctrico (Φ_E), que atraviesa una superficie perpendicular al campo como *el producto del campo eléctrico que atraviesa la superficie por unidad de área*. Puesto que la intensidad del campo eléctrico es proporcional al número de líneas de fuerza que atraviesa la superficie, el flujo eléctrico es por tanto proporcional al número de líneas que atraviesan el área. Matemáticamente el flujo se puede expresar como

$$\Phi_E = EA_{\perp} \quad (3.2)$$

Las unidades del flujo eléctrico en el sistema internacional de unidades es el Nm^2/C . Por otro lado si el área A no es perpendicular a las líneas de campo, como lo muestra en la figura 3.2.2, debe observarse que en este caso las líneas de flujo eléctrico rozan la superficie y ninguna ingresa o sale de la superficie, entonces

$$\Phi_E = 0 \quad (3.3)$$

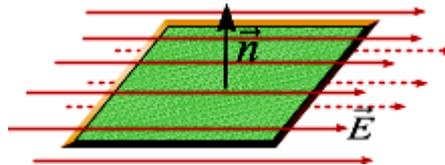


Figura 3.2.2. Las líneas de fuerza no atraviesan la superficie por tanto el flujo es nulo

Si la superficie en consideración no es perpendicular a las líneas de fuerza, el flujo eléctrico que pasa a través de ella debe ser menor que el dado por la ecuación (3.2). Esto puede verse en la figura 3.2.3 en donde la superficie de área A no es perpendicular a \vec{E} sino que se encuentra formando un ángulo θ con el campo eléctrico. Del gráfico se observa que el número de líneas de fuerza que atraviesan el área A es igual al número de líneas de fuerza que atraviesan el área proyectada A_{\perp} , área que sí es perpendicular al campo eléctrico. Las áreas se encuentran relacionadas por $A_{\perp} = A \cos\theta$.

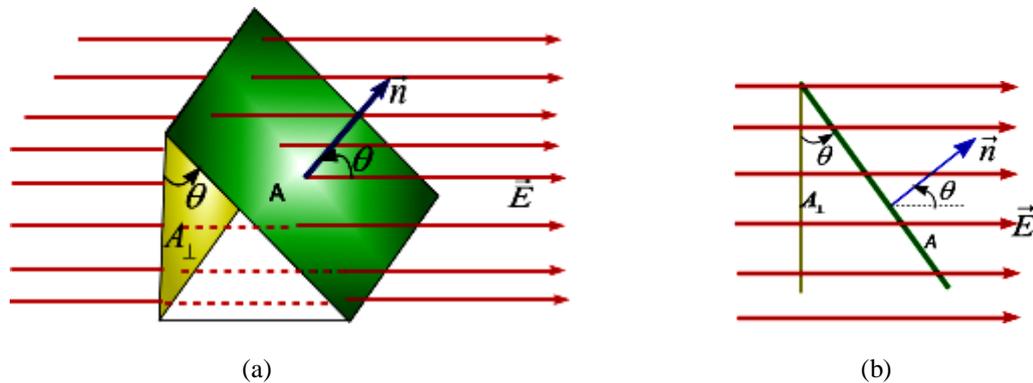


Figura 3.2.3 (a) Líneas de fuerza atravesando una superficie inclinada. El vector unitario \vec{n} , forma un ángulo θ con el campo eléctrico \vec{E} . (b) vista de perfil

Debido a que el flujo a través del área es el mismo que el flujo a través de A_{\perp} se concluye que el flujo a través de una superficie inclinada no perpendicular al campo eléctrico \vec{E} , es

$$\Phi_E = EA_{\perp} = EA \cos\theta \quad (3.4)$$

Teniendo en cuenta la definición del producto escalar, la ecuación (3.4) se escribe

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot \vec{n}A \quad (3.5)$$

Donde \vec{n} , es un vector unitario perpendicular al área A .

3.2.2 Flujo en general.

La expresión para el flujo eléctrico puede ahora ser generalizado para el caso de campos en general que varían espacialmente y que pasan a través de superficies que no son planas. Para esto, dividimos a la superficie en un gran número de elementos muy pequeños (incremento de área) que en buena aproximación pueden considerarse planos con un vector área dado por $\vec{\Delta A}_i = \vec{n}_i \Delta A_i$, donde ΔA_i es el incremento de área del elemento y \vec{n}_i es un vector unitario perpendicular a dicho elemento en dicha posición como se muestra en la figura 3.2.4. Para elementos suficientemente pequeños puede considerarse a éstos como si fueran planos y por tanto podemos despreciar la variación del campo eléctrico en todo el elemento. Para cada uno de los elementos, el flujo eléctrico $\Delta\Phi_i$, a través de él está dado por la ecuación.

$$\Delta\Phi_{E,i} = E_i \Delta A_i \cos\theta_i = \vec{E}_i \cdot \vec{n}_i \Delta A_i = \vec{E}_i \cdot \vec{n} \Delta A_i \quad (3.6)$$

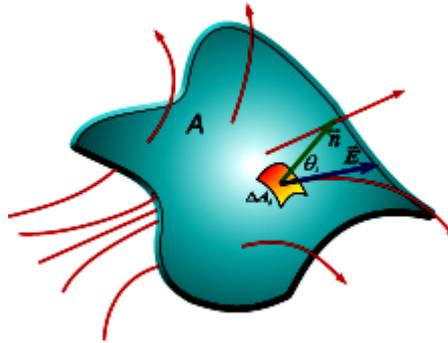


Figura 3.2.4 Flujo eléctrico a través de una superficie de forma arbitraria

El flujo neto a través de toda la superficie es la suma de los flujos de cada uno de los elementos extendida a todos los elementos. Por otro lado, si el área A de cada uno de éstos elementos se hace tender a cero, entonces el número de elementos tiende al infinito, esta suma tiende a ser una integral. Por consiguiente, el flujo eléctrico se define como

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} (\sum \vec{E}_i \cdot \vec{n}_i \Delta A_i) = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA \quad (3.7)$$

La integral de la ecuación (3.7) es un integral de superficie y por ello debe evaluarse sobre toda la superficie hipotética en estudio.

En el caso de una superficie cerrada como la mostrada en la figura 3.2.5, los vectores \vec{n}_i , apuntan en diferentes direcciones para los diversos elementos ΔA_i de la superficie. En cada punto, estos vectores son normales a la superficie y por conveniencia *siempre apuntan hacia afuera* de la superficie. Así en el elemento indicada con el número **1** el campo eléctrico está dirigido hacia el interior de la superficie y como tal el ángulo está comprendido entre $180^\circ > \theta > 90^\circ$ en este caso el flujo eléctrico es negativo, en el elemento **2** las líneas de fuerza rozan la superficie por tanto es perpendicular al vector unitario normal y aquí $\theta = 90^\circ$, el flujo en este elemento es nulo. En el punto **3**, las líneas de fuerza están dirigidas saliendo de la superficie y como tal el vector unitario normal a la superficie y el vector campo forman un ángulo agudo $\theta < 90^\circ$ en estas condiciones el flujo es positivo.

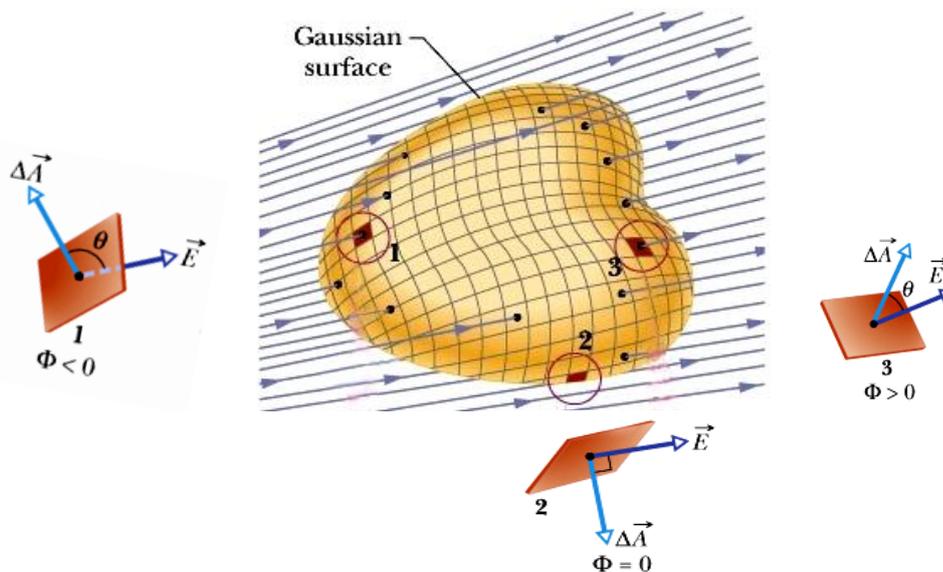


Figura 3.2.5 Flujo eléctrico a través de una superficie cerrada

Debe observarse además que debido a que el flujo neto es proporcional al número total de líneas que pasan a través de la superficie, entonces el flujo neto es igual número de líneas que salen de la superficie *menos* el

número de líneas que entran en la superficie. Por lo tanto, si el número de líneas que ingresan a la superficie es menor que las que salen, entonces el flujo es positivo (ver figura 3.2.6a), por el contrario si ingresan más líneas que las que salen el flujo es negativo (figura 3.2.6b) y finalmente, si el número de líneas que ingresan en la superficie es igual al número de líneas que salen, entonces el flujo es nulo (figura 3.2.6c). El flujo neto a través de una superficie cerrada puede escribirse como

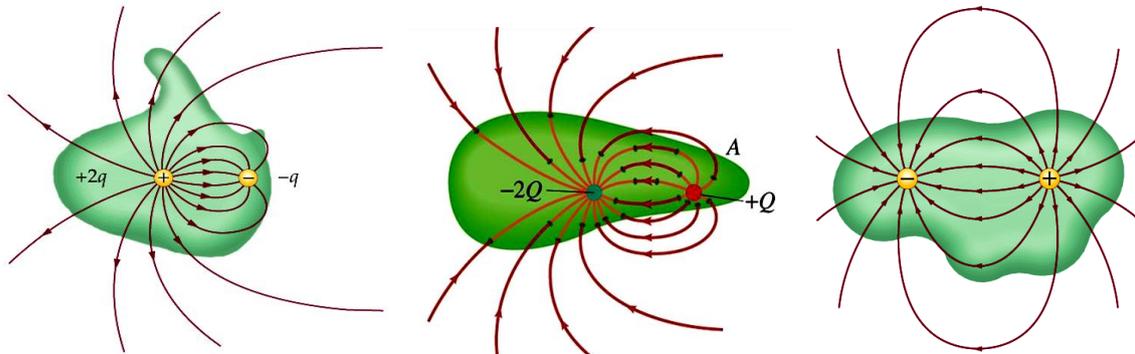


Figura 3.2.6 (a) Flujo eléctrico positivo, (b) flujo negativo y (c) flujo nulo

Por lo tanto, el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada se encuentra sumando todos los flujos asociados a los pequeños incrementos de área. Cuando los incrementos son muy pequeños, es decir, cuando los elementos son infinitesimales el flujo eléctrico se define como:

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} (\sum \vec{E}_i \cdot \vec{n}_i \Delta A_i) = \iiint_s \vec{E} \cdot \vec{n} dA \quad (3.8)$$

Ejemplo 3.1. Flujo eléctrico a través de un plano.

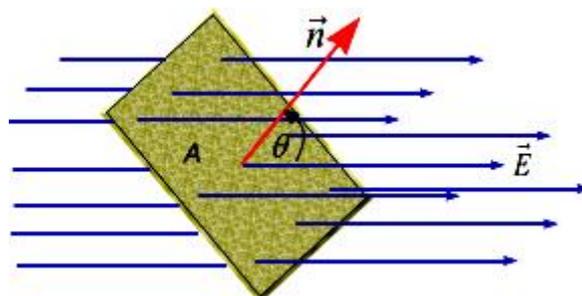
Una hoja plana de papel con un área de $0,250 \text{ m}^2$, está orientada de tal modo que la normal a la hoja forma un ángulo de 60° con un campo eléctrico uniforme cuya magnitud es de 14 N/C . (a) Determine la magnitud del flujo eléctrico a través de la hoja, (b) ¿Depende su respuesta al inciso (a) de la forma de la hoja? ¿Porqué?. (c) ¿Con qué ángulo θ entre la normal a la hoja y el campo eléctrico es la magnitud del flujo a través de la hoja i) máximo, ii) mínimo?

Solución.

Parte (a). Asumamos que la hoja tiene la forma rectangular y está ubicada como se muestra e la figura

El flujo eléctrico será

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \vec{E} \cdot \vec{n} A = E \cos \theta A \\ \Phi_E &= (14 \text{ N/C})(\cos 60^\circ)(0,25 \text{ m}^2) \\ \Phi_E &= 1,75 \text{ N.m}^2 / \text{C} \end{aligned}$$



Parte (b). El flujo **NO** depende de la forma de la hoja ya que depende únicamente del área, del campo eléctrico y del ángulo de la hoja de papel.

Parte (c). En este ejemplo al ser el área y el campo eléctrico constantes, entonces es el ángulo el que da el flujo máximo y mínimo:

- i) *Flujo máximo.* Este flujo es máximo cuando $\theta = 0^\circ$, es decir cuando el campo eléctrico es perpendicular al área

$$\Phi_{E,\max} = \vec{E} \cdot \vec{n} A = E \cos 0^\circ A = (14 \text{ N/C})(1/2)(0,25 \text{ m}^2)$$

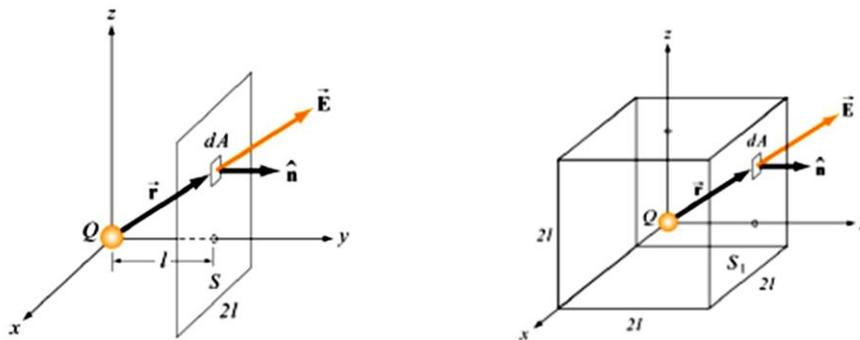
$$\Phi_{E,\max} = 3,5 \text{ N.m}^2 / \text{C}$$

- ii) *Flujo mínimo.* Este flujo es máximo cuando $\theta = 90^\circ$, es decir cuando el campo eléctrico es paralelo al área

$$\Phi_{E,\min} = \vec{E} \cdot \vec{n} A = E(\cos 90^\circ) A = (14 \text{ N/C})(0)(0,25 \text{ m}^2) = 0$$

Ejemplo 3.2. Flujo eléctrico de un campo variable a través de un plano.

- (a) Determinar el flujo eléctrico a través de una superficie cuadrada de lado $2l$, debido a una carga $+Q$ localizada a una distancia perpendicular l desde el centro del plano como se muestra en la figura.



- (b) Utilizando el resultado obtenido en la parte (a), si la carga es $+Q$ es ahora localizada en el centro del cubo como se muestra en la figura. ¿Cuál es flujo total emergente del cubo?

Solución

Parte (a). El campo eléctrico para una carga puntual positiva $+Q$. esta dado por

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

Sobre la superficie S , $y = l$ y el elemento de área es $d\vec{A} = dA\vec{j} = (dx dz)\vec{j}$. Entonces el flujo a través del área diferencial será

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + l^2 + z^2)^{3/2}} (x\vec{i} + l\vec{j} + z\vec{k}) \right] \cdot (dx dz)\vec{j}$$

$$d\Phi_E = \left[\frac{lQ dx dz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + l^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

El flujo a través de toda el área será

$$\Phi_E = \frac{lQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^{+l} dx \int_{-l}^{+l} \frac{dz}{(x^2 + l^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{lQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^{+l} dx \frac{z}{(x^2 + l^2)(x^2 + l^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_{-l}^{+l}$$

$$\Phi_E = \frac{lQ}{2\pi\epsilon_0} \int_{-l}^{+l} \frac{ldx}{(x^2 + l^2)(x^2 + 2l^2)^{1/2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2l^2}} \right) \Big|_{-l}^{+l}$$

$$\Phi_E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]$$

$$\Phi_E = \frac{Q}{6\epsilon_0}$$

Parte (b) De los argumentos de simetría, el flujo a través de cada cara será el mismo. Por lo tanto el flujo a través del cubo completo será seis veces el flujo a través una cara, es decir

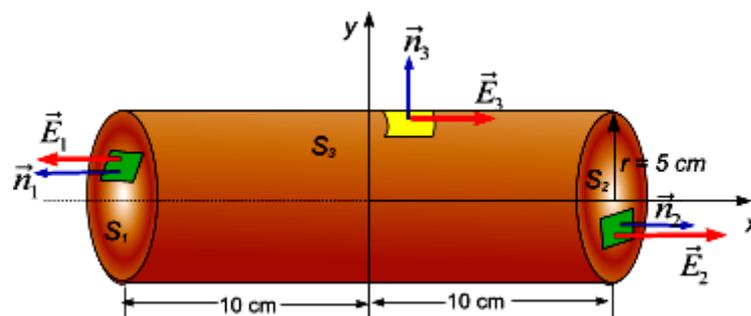
$$\Phi_{E,cubo} = 6 \left(\frac{Q}{6\epsilon_0} \right) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Ejemplo 3.3. Flujo eléctrico a través de una superficie cilíndrica

Un campo eléctrico vale $\vec{E} = (200N/C)\vec{i}$ para $x > 0$ y $\vec{E} = -(200N/C)\vec{i}$, para $x < 0$. Un cilindro circular recto de 20 cm de longitud y 5 cm de radio tiene su centro en el origen y su eje está a lo largo del eje x de modo que una de las caras está en $x = +10$ cm y la otra $x = -10$ cm. (a) ¿Cuál es el flujo saliente que atraviesa cada cara?. (b) ¿Cuál es el flujo a través de la superficie lateral del cilindro?. (c) ¿Cuál es el flujo neto que atraviesa toda la superficie cilíndrica?.

Solución

En la figura se muestra la superficie cilíndrica



Flujo a través de S_1 .

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dA = \iint_{S_1} (-200\vec{i}) \cdot (-\vec{i}) dA = 200(\pi r^2) = 200\pi(0,05)^2$$

$$\Phi_1 = 1,57 N \cdot m^2 / C$$

Flujo a través de S_2 .

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA = \iint_{S_2} (200\vec{i}) \cdot (\vec{i}) dA = 200(\pi r^2) = 200\pi(0,05)^2$$

$$\Phi_2 = 1,57 N \cdot m^2 / C$$

Flujo a través de S_3 .

$$\Phi_3 = \iint_{S_1} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA = \iint_{S_1} (200\vec{i}) \cdot (\vec{j}) dA = 200(\pi r^2)(\vec{i} \cdot \vec{j})$$

$$\Phi_3 = 0 N \cdot m^2 / C$$

El flujo neto a través de la superficie cilíndrica completa será

$$\Phi_{Neto} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 1,57 N \cdot m^2 / C + 1,57 N \cdot m^2 / C + 0$$

$$\Phi_{Neto} = 3.14 N \cdot m^2 / C$$

3.3 LEY DE GAUSS.

La ley de Gauss formulada por uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos Karl Friedrich Gauss (1777-1855), relaciona el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada, llamada *superficie gaussiana*, con la carga total encerrada por la superficie existiendo entre ellos una proporcionalidad. Para una superficie cerrada, podemos eliminar el signo ambiguo en el flujo para mostrar la orientación asociada con la normal hacia el exterior.

3.3.1 Carga puntual en el centro de una esfera

Nosotros desarrollaremos la ley de Gauss gradualmente, primero consideraremos el caso de una carga puntual q en el centro de una superficie esférica Gaussiana de radio R , tal como se muestra en la figura 3.3.1. El flujo eléctrico a través del área dA , está dado por

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = \vec{E} \cdot \vec{n} dA \tag{a}$$

Para determinar el flujo neto a través de toda la superficie esférica debe sumarse (integrarse), la ecuación (a) sobre toda el área de la superficie esférica, esto es

$$\Phi_E = \iiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA \tag{b}$$

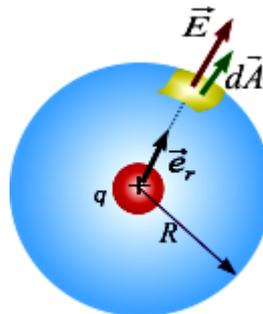


Figura 3.3.1 Flujo eléctrico a través de una superficie esférica imaginaria de radio r debido a una carga puntual.

En este caso el campo eléctrico es radial y según la ley de Coulomb está dado por $\vec{E} = \frac{kq}{R^2} \vec{e}_r$. Aquí la integral se evalúa sobre la superficie de radio R . \vec{n} es un vector unitario normal a la superficie esférica, pero también es radial como lo es el vector unitario \vec{e}_r . Debido a que el radio de la superficie esférica Gaussiana permanece constante y de acuerdo a la definición de producto escalar se cumple que $(\vec{e}_r \cdot \vec{n}) = 1$, entonces se tiene

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \iint_S \frac{kq}{R^2} \vec{e}_r \cdot \vec{n} dA = kq \iint_S \frac{1}{R^2} \vec{e}_r \cdot \vec{n} dA$$

$$\Phi_E = \frac{kq}{R^2} \iint_S dA$$

La evaluación de la integral sobre el área de la superficie gaussiana y teniendo en cuenta que ($A_{S,G} = 4\pi R^2$), obtenemos

$$\Phi_E = \frac{kq}{R^2} \iint_S dA = \left(\frac{kq}{R^2} \right) (4\pi R^2) = 4\pi kq$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) indica que el flujo neto a través de una superficie gaussiana esférica con una carga puntual en su centro, es independiente del radio R de la superficie esférica. Depende únicamente de la carga q encerrada en la superficie.

Este resultado puede interpretarse también en términos de las líneas de fuerza. La figura 3.3.2 muestra dos superficies esféricas concéntricas de radios R y $2R$, respectivamente centradas en la carga puntual q . Cada línea de flujo que atraviesa la superficie pequeña también atraviesa la superficie grande, por lo que el flujo neto a través de cada superficie es el mismo.

Lo que es verdad acerca de la superficie esférica gaussiana en su totalidad lo es también para cualquier porción de la superficie. En la figura 3.3.2 un área dA aparece dibujada sobre la superficie de radio R y luego proyectada sobre la superficie de radio $2R$ trazando líneas que parten del centro y que pasan sobre la frontera de dA . El área proyectada sobre la superficie más grande es ahora $4dA$. No obstante, dado que el campo para una carga puntual decrece con $\frac{1}{r^2}$, la magnitud del campo es cuatro veces menor en la superficie de radio $2R$ que en la de radio R . Por lo tanto el flujo eléctrico en ambas áreas es el mismo e independiente de R .

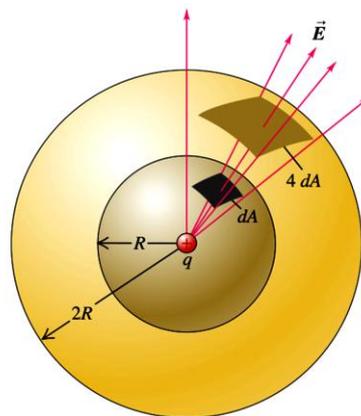


Figura 3.3.2 *Proyección de un elemento de área dA de una esfera de radio R sobre una superficie esférica de radio $2R$.*

3.3.2 Carga puntual encerrada por una superficie irregular

Los resultados anteriores pueden extenderse considerando alguna superficie de forma arbitraria cerrada conteniendo la carga. Recalamos aquí que el flujo eléctrico es una medida del número de líneas de campo eléctrico pasando a través de una superficie. Una línea de campo que pasa a través de una esfera también pasará a través de alguna superficie cerrada de forma arbitraria pero que contiene a la carga. Notamos también que cuando una línea de campo entra a una superficie hay una contribución negativa al flujo y existe una contribución negativa cuando abandonan la superficie. Una línea que a la vez que ingresa a la superficie, sale de ésta, no contribuye al flujo. De ello se deduce que cualquier superficie cerrada que contiene la carga tiene un flujo q/ϵ_0 . Sin embargo, en cualquier superficie cerrada que no contiene la carga el flujo es cero.

La discusión anterior es menos precisa que uno podría pensar. Hemos apelado a la noción intuitiva de que el flujo es una medida del número de líneas pasando a través de una superficie, pero la discusión carece de precisión. Podemos hacer estos comentarios más precisos considerando el *ángulo sólido*. Un ángulo sólido (en estereorradianes) puede ser definido como un área de una región en una esfera unitaria. El área total de una esfera unitaria es 4π , de modo que es el máximo ángulo sólido.

Para determinar el flujo a través de una superficie cerrada no esférica consideremos una carga puntual q en el interior de una superficie cerrada S , de forma arbitraria tal como se muestra en la figura 3.3.4.

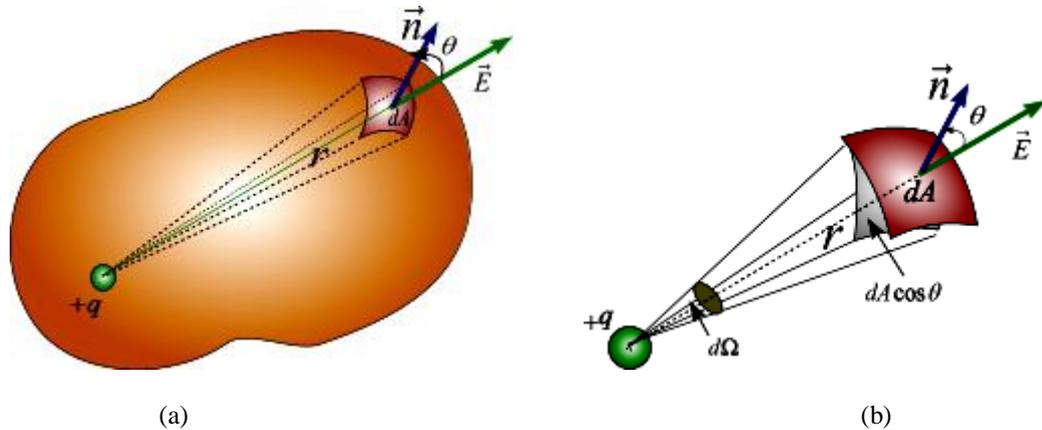


Figura 3.3.3 (a) carga puntual encerrada por una superficie de forma arbitraria mostrando que el flujo a través del área dA es proporcional al ángulo sólido subtendido por el elemento de área, (b) ángulo sólido subtendido por elemento

Para evaluar el flujo eléctrico dividamos a la superficie en elementos de área dA ubicados a una distancia r de la carga puntual $+q$, el campo eléctrico será colineal con el vector unitario a lo largo de r y el vector unitario normal a la superficie \vec{n} , está formando un ángulo θ con el campo eléctrico. Por lo tanto el flujo eléctrico a través de dA será

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot n \, dA$$

$$d\Phi_E = \frac{kq}{r^2} \hat{e}_r \cdot \hat{n} \, dA = kq \frac{\cos \theta \, dA}{r^2} \tag{3.10}$$

El flujo neto a través de la superficie de forma arbitraria se obtiene sumando (integrando) la ecuación (3.10), es decir

$$\Phi_E = \int d\Phi_E = kq \oint_S \frac{\cos \theta \, dA}{r^2} \tag{3.11}$$

De la definición de ángulo sólido $d\Omega$, subtendido por elemento de superficie visto desde la carga (véase la figura 3.3.3b), se tiene

$$d\Omega = \frac{\hat{e}_r \cdot \hat{n} \, dA}{r^2} = \frac{\cos \theta \, dA}{r^2} \tag{3.12}$$

Remplazando la ecuación (3.12) en (3.11) se tiene

$$\Phi_E = kq \oint_S d\Omega = kq\Omega \tag{3.13}$$

Sabemos que el ángulo sólido alrededor de toda la superficie es 4π estereorradianes, con lo cual el flujo será

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(4\pi) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.14)$$

Este resultado es el mismo que el encontrado en la sección anterior para el caso de una carga puntual encerrada en una superficie esférica. Por lo tanto, el flujo eléctrico a través de una superficie de forma arbitraria con una carga en su interior es independiente de la posición de la carga dentro de la superficie y solo depende de la carga.

Si ahora consideramos que la carga puntual q' está fuera de la superficie como se muestra en la figura 3.3.4a, el flujo eléctrico neto a través de la superficie es nulo, ello se justifica observando que el número de líneas de campo que ingresan a la superficie es igual al número de líneas que salen de la superficie.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (3.14)$$

Los resultados anteriores se pueden ampliar a un sistema de cargas puntuales N en el interior de la superficie gaussiana y otro sistema N' de cargas puntuales en el exterior como se muestra en la figura 3.3.4b.

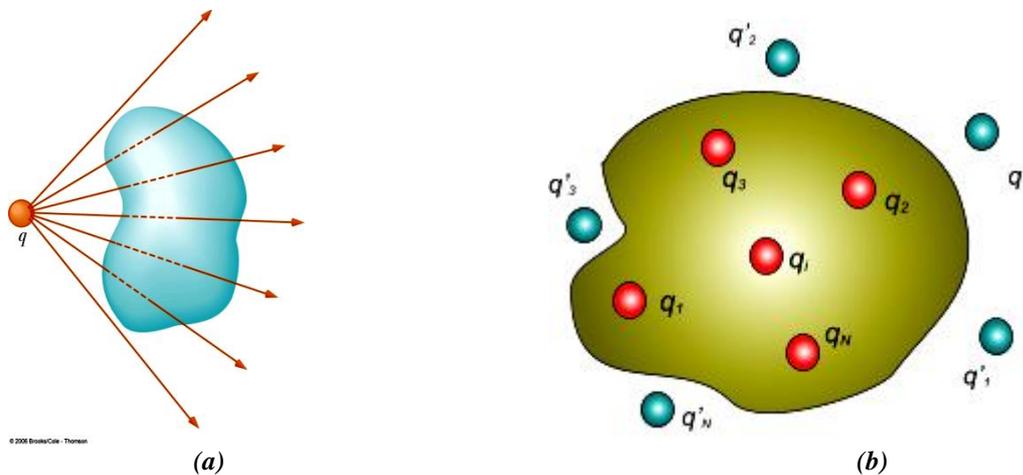


Figura 3.3.4 (a) carga puntual situada en un punto exterior a superficie gaussiana, (b) superficie que contiene cargas exteriores así como cargas interiores

El flujo eléctrico neto a través de la superficie gaussiana será igual a la suma de los flujos producidos por cada una de las cargas. En este caso la ley de Gauss se escribe

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_N}{\epsilon_0} = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (3.15)$$

Donde, \vec{E} es el campo resultante en cualquier punto de la superficie y $Q_{enc} = \sum q_i$ es la carga total encerrada por la superficie gaussiana

Para el caso en el cual la distribución de carga es continua (lineal, superficial o volumétrica), la carga encerrada se obtiene integrando cada dq asumida. Por tanto el flujo eléctrico es

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq \quad (3.16)$$

Después de haber calculado el flujo eléctrico para diferentes configuraciones estamos en condiciones de enunciar la ley de Gauss, la misma que establece:

“Dada una distribución de carga, discreta o continua, el flujo eléctrico total producido por la carga y que va a través de cualquier superficie gaussiana cerrada S , está relacionada con la carga total dentro de la superficie por la ecuación

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (3.17)$$

Donde \vec{E} , es el campo eléctrico producido por todas las cargas, las interiores y las exteriores, y Q_{enc} es la carga total contenida en la superficie gaussiana”.

3.4 APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS.

La ley de Gauss es una de las leyes fundamentales del electromagnetismo. También puede considerarse como una herramienta poderosa para calcular campos eléctricos en aquellos casos en los cuales existe un alto grado de simetría, de tal forma que la intensidad de campo tenga una magnitud constante sobre la superficie gaussiana. En esta sección se utilizará la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico producido por diferentes distribuciones.

3.4.1 Campo eléctrico E de una distribución de carga lineal.

Un alambre delgado infinito transporta una carga distribuida uniformemente a lo largo de su longitud con una carga por unidad de longitud λ . Determine el campo eléctrico en un punto situado a una distancia r perpendicular al alambre.

Solución

Debido a que el alambre es infinito o muy largo su campo eléctrico apunta alejándose de las cargas positivas. Para evaluar la dirección con mayor precisión se usa una superficie gaussiana cilíndrica de radio r y longitud l que envuelve al alambre, tal como se muestra en la figura 3.4.1a.

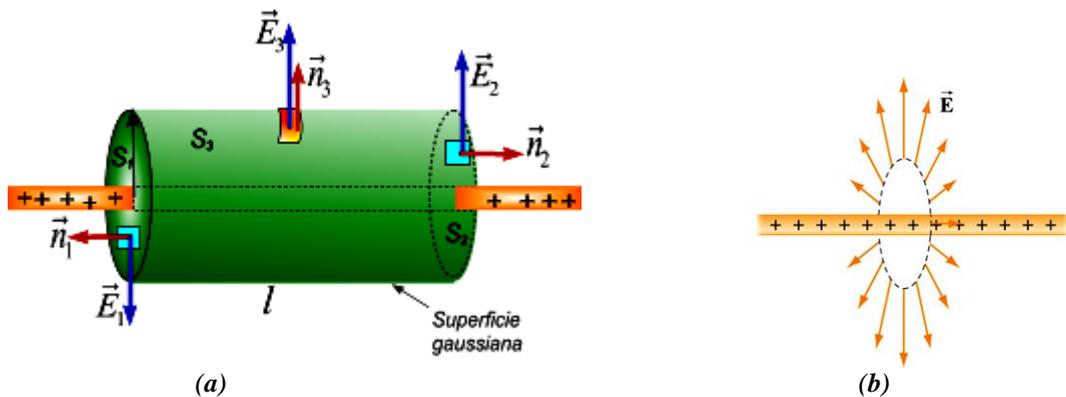


Figura 3.4.1 (a) Superficie gaussiana para una barra cargada uniformemente, (b) Líneas de campo alrededor de un carga de la varilla.

La superficie gaussiana cilíndrica puede dividirse en tres superficies. Dos tapas (S_1 y S_2), es decir secciones perpendiculares al campo eléctrico creado por la distribución y una superficie lateral S_3 . Por tanto, el flujo eléctrico a través de la superficie es

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA$$

Debido a que el campo eléctrico es paralelo a las superficies (S_1 y S_2) y como tal perpendicular a los vectores \vec{n} , entonces su producto escalar es cero, es decir no existe flujo a través de las tapas. Sin embargo, en la superficie lateral del cilindro el campo eléctrico es perpendicular a la superficie en cada punto y como tal paralelo a \vec{n} .

Además el módulo del campo permanece constante en toda la superficie cilíndrica y como tal puede sacarse fuera de la integral. Entonces el flujo será

$$\Phi_E = \iint_{S_1} E_1 \cos 90^\circ dA + \iint_{S_2} E_2 \cos 90^\circ dA + E \iint_{S_3} dA$$

$$\Phi_E = E(A_{\text{sup,lat}}) = E(2\pi rl)$$

Donde $2\pi rl$ es el área lateral del cilindro. Aplicando ahora la ley de Gauss se tiene

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \rightarrow E(2\pi rl) = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

Del gráfico puede observarse que la carga neta en el interior de la superficie gaussiana es $Q_{\text{enc}} = \lambda l$, entonces la ecuación anterior se escribe

$$E(2\pi rl) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

3.4.2 Campo eléctrico E de una distribución de carga laminar.

Una lámina plana delgada e infinita transporta una carga distribuida uniformemente a lo largo su superficie con una carga por unidad de área σ . Determine el campo eléctrico creado por la lámina en un punto situado a una distancia z perpendicular a la superficie.

Solución

Debido a que la lámina es infinita o muy grande su campo eléctrico apunta alejándose del área alejándose de las cargas positivas véase la figura 3.4.2a. Para determinar el campo eléctrico se usa una superficie gaussiana cilíndrica de radio r y longitud $2H$ tal como se muestra en la figura 3.4.2b

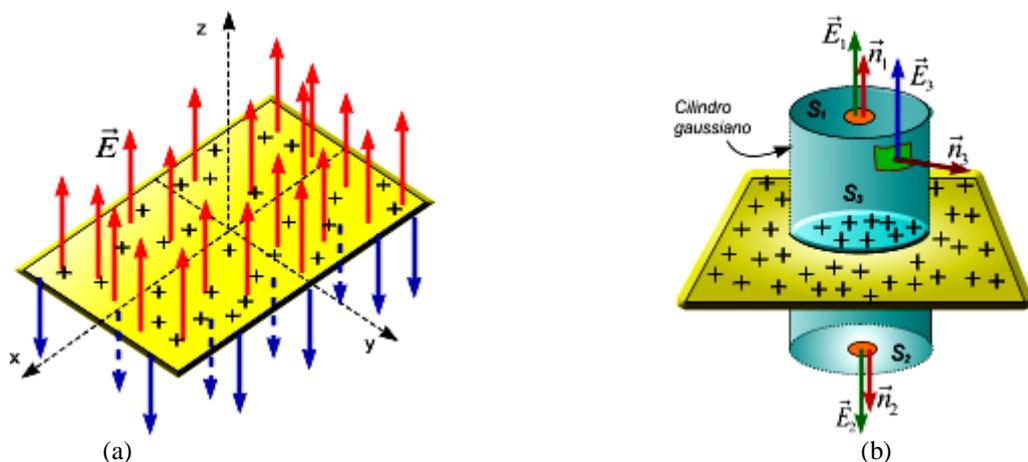


Figura 3.4.2 (a) Líneas de campo eléctrico para un plano infinito cargado positivamente, (b) Superficie gaussiana utilizada para determinar el campo eléctrico.

Para determinar el flujo eléctrico a través de la superficie cilíndrica dividimos a esta en tres superficies las dos tapas (S_1 y S_2), es decir secciones perpendiculares al campo eléctrico creado por la distribución y una superficie lateral S_3 . Por tanto, el flujo eléctrico a través de la superficie es

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA$$

Debido a que el campo eléctrico es perpendicular a las superficies (S_1 y S_2) y como tal paralelo a los vectores \vec{n}_1 y \vec{n}_2 entonces su producto escalar es igual a 1, es decir si existe flujo a través de las tapas, además el módulo del campo permanece constante y como tal puede sacarse fuera de la integral. Sin embargo, en la superficie lateral del cilindro el campo eléctrico es paralelo a la superficie en cada punto y como tal perpendicular a \vec{n}_3 . Entonces el flujo será

$$\Phi_E = \iint_{S_1} E_1 \cos 0^\circ dA + \iint_{S_2} E_2 \cos 0^\circ dA + \iint_{S_3} E_3 \cos 90^\circ dA$$

$$\Phi_E = E_1 A + E_2 A + 0 = (E_1 + E_2) A$$

Debido a que la distancia entre las tapas y la lámina cargada es la misma entonces el módulo del campo eléctrico es el mismo en ambas superficies, por tanto se tiene

$$\Phi_E = 2E_n A$$

Aplicando la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico, nos da

$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \rightarrow 2E_z A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

La expresión vectorial del campo es

$$\vec{E}_z = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} & \text{para } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

3.4.3 Campo eléctrico E de una corteza cilíndrica.

Una corteza cilíndrica de longitud muy grande y de radio R que posee una densidad de carga superficial σ se encuentra ubicada tal como se muestra en la figura 4.4.3. Determine el campo eléctrico en puntos exteriores e interiores a la corteza.

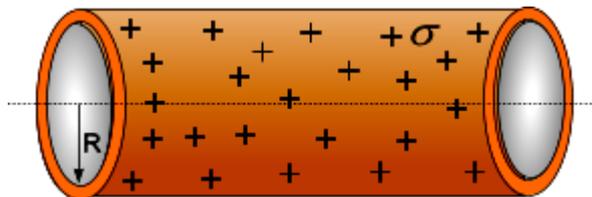


Figura 3.4.3 Distribución de carga cilíndrica

Solución

Parte (a). Campo eléctrico para puntos exteriores. Para resolver el problema tracemos una superficie gaussiana cilíndrica de radio ($r > R$), de longitud L y coaxial con la corteza cilíndrica tal como se muestra en la figura 3.4.4, representada por línea ininterrumpida

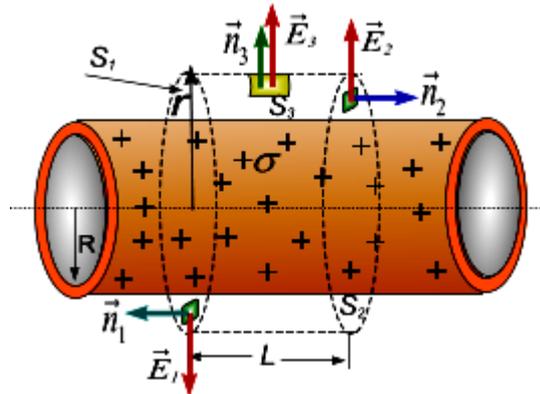


Figura 3.4.4 Superficie gaussiana cilíndrica utilizada para determinar el campo eléctrico en puntos exteriores a la distribución

Una vez más, debido a la simetría, el campo eléctrico E está dirigido en dirección radial y solo puede variar con la distancia al eje del cilindro. Además debe observarse que en las tapas los vectores normales son perpendiculares al campo por tanto el flujo en estas superficies es nulo

El flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana es

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA$$

Debido a que las normales y el campo en las tapas son perpendiculares sus flujos son cero y solo queda el flujo en la superficie lateral, entonces se tiene

$$\Phi_E = \iint_{S_1} E_1 \cos 90^\circ dA + \iint_{S_2} E_2 \cos 90^\circ dA + E \iint_{S_3} dA$$

$$\Phi_E = E(A_{sup,lat}) = E(2\pi rL)$$

Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi rL) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Del gráfico puede observarse que la carga neta en el interior de la superficie gaussiana es $Q_{enc} = \sigma(2\pi RL)$, entonces la ecuación anterior se escribe

$$E(2\pi rL) = \frac{\sigma(2\pi RL)}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

Podemos ahora expresar la densidad superficial en función de la densidad lineal, es decir la corteza transporta una carga $q = \sigma(2\pi RL)$, entonces la carga por unidad de longitud será $\lambda = \frac{q}{L} = \frac{\sigma(2\pi RL)}{L} = \sigma(2\pi R) \rightarrow \sigma = \lambda/2\pi R$, que al ser remplazada en la ecuación anterior resulta

$$\vec{E}_r = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r = \left(\frac{\lambda}{2\pi R} \right) \frac{R}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

$$\vec{E}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r \quad \text{para } r > R$$

Parte (b). Campo eléctrico para puntos interiores. Para resolver el problema tracemos una superficie gaussiana cilíndrica de radio ($r < R$), de longitud L y coaxial con la corteza cilíndrica tal como se muestra en la figura 3.4.5, representada por línea ininterrumpida

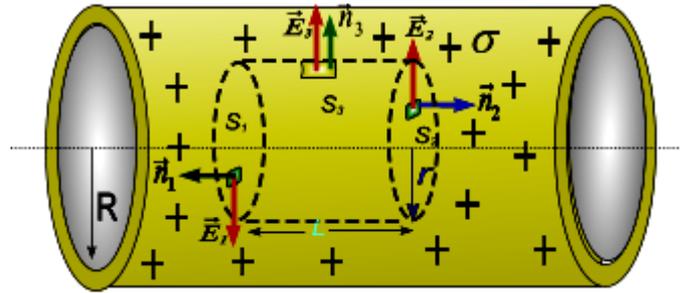


Figura 3.4.5 Superficie gaussiana cilíndrica utilizada para determinar el campo eléctrico en puntos interiores a la distribución

El flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana es

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA$$

Debido a que las normales y el campo en las tapas son perpendiculares sus flujos son cero y solo queda el flujo en la superficie lateral (S_3), entonces se tiene

$$\Phi_E = \iint_{S_1} E_1 \cos 90^\circ dA + \iint_{S_2} E_2 \cos 90^\circ dA + E \iint_{S_3} dA$$

$$\Phi_E = E(A_{sup,lat}) = E(2\pi rL)$$

Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \rightarrow E(2\pi rL) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Del gráfico puede observarse que la carga neta en el interior de la superficie gaussiana es $Q_{enc} = 0$, entonces la ecuación anterior se escribe

$$E(2\pi rL) = \frac{0}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_r = 0 \vec{e}_r$$

Es decir el campo eléctrico es nulo en todos los puntos dentro de una corteza

3.4.4 Campo eléctrico E de un cilindro sólido cargado.

Un cilindro no conductor de radio R y longitud muy grande que posee una densidad de carga volumétrica uniforme ρ se encuentra ubicada tal como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en puntos exteriores e interiores a la distribución

Solución

Parte (a). Campo eléctrico para puntos exteriores. Para resolver el problema tracemos una superficie gaussiana cilíndrica de radio ($r > R$), de longitud L y coaxial con el cilindro tal como se muestra en la figura 3.4.6.

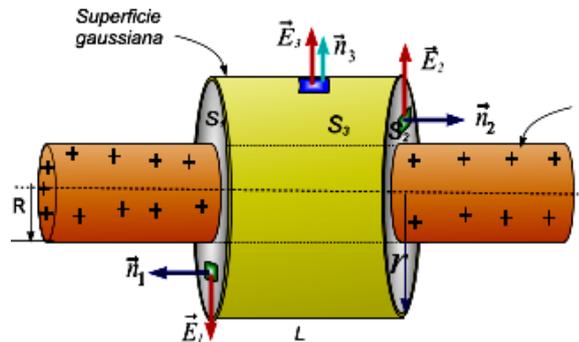


Figura 3.4.6 Superficie gaussiana cilíndrica utilizada para determinar el campo eléctrico en puntos exteriores a la distribución

Una vez más, debido a la simetría, el campo eléctrico E está dirigido en dirección radial y solo puede variar con la distancia al eje del cilindro. Además debe observarse que en las tapas los vectores normales son perpendiculares al campo por tanto el flujo en estas superficies es nulo

El flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana es

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA$$

Debido a que las normales y el campo en las tapas son perpendiculares sus flujos son cero y solo queda el flujo en la superficie lateral, entonces se tiene

$$\Phi_E = \iint_{S_1} E_1 \cos 90^\circ dA + \iint_{S_2} E_2 \cos 90^\circ dA + E \iint_{S_3} dA$$

$$\Phi_E = E(A_{sup,lat}) = E(2\pi rL)$$

Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi rL) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Del gráfico puede observarse que la carga neta en el interior de la superficie gaussiana es $Q_{enc} = \rho(\pi R^2 L)$, entonces la ecuación anterior se escribe

$$E(2\pi rL) = \frac{\rho(\pi R^2 L)}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

Podemos expresar nuevamente la densidad volumétrica en función de la densidad lineal, es decir en cilindro transporta una carga $q = \rho(\pi R^2 L)$, entonces la carga por unidad de longitud será $\lambda = \frac{q}{L} = \frac{\rho(\pi R^2 L)}{L} = \rho(\pi R^2) \rightarrow \rho = \lambda/\pi R^2$, que al ser remplazada en la ecuación anterior resulta

$$\vec{E}_r = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r = \left(\frac{\lambda}{\pi R^2} \right) \frac{R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

$$\vec{E}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r \quad \text{para } r > R$$

Esta ecuación indica que el campo eléctrico en puntos exteriores a un cilindro sólido no conductor es el mismo que si toda la carga estuviese distribuida a lo largo del eje del cilindro.

Parte (b). Campo eléctrico para puntos interiores. Para resolver el problema tracemos una superficie gaussiana cilíndrica de radio ($r < R$), de longitud L y coaxial con el cilindro tal como se muestra en la figura 3.4.7, representada por línea ininterrumpida

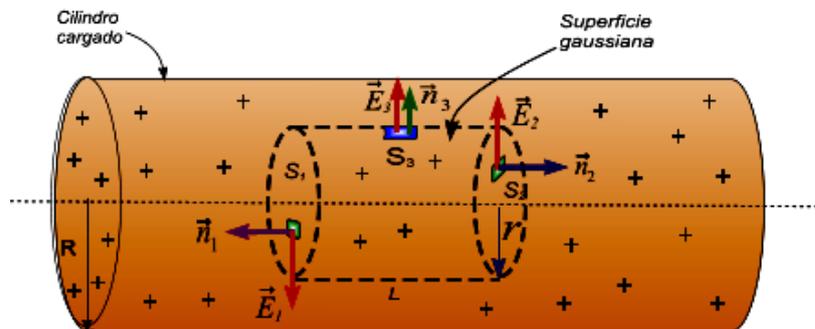


Figura 3.4.7 Superficie gaussiana cilíndrica utilizada para determinar el campo eléctrico en puntos interiores a la distribución

El flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana es

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA$$

Debido a que las normales y el campo en las tapas son perpendiculares sus flujos son cero y solo queda el flujo en la superficie lateral (S_3), entonces se tiene

$$\Phi_E = \iint_{S_1} E_1 \cos 90^\circ dA + \iint_{S_2} E_2 \cos 90^\circ dA + E \iint_{S_3} dA$$

$$\Phi_E = E(A_{sup,lat}) = E(2\pi rL)$$

Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi rL) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Del gráfico puede observarse que la carga neta en el interior de la superficie gaussiana es $Q_{enc} = \rho V' = \rho(\pi r^2 L)$, entonces la ecuación anterior se escribe

$$E(2\pi rL) = \frac{\rho(\pi r^2 L)}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$

$$\vec{E}_r = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \vec{e}_r \quad \text{para } r < R$$

Una vez más puede expresarse la densidad volumétrica en función de la densidad lineal, es decir $\rho = \lambda/\pi R^2$, con lo cual se tiene

$$\vec{E}_r = \frac{\left(\frac{\lambda}{\pi R^2}\right)}{2\epsilon_0} r \vec{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} r \vec{e}_r \quad \text{para } r < R$$

Es decir el campo eléctrico en todos los puntos interiores al cilindro no conductor sólido es proporcional a la distancia r medida perpendicularmente desde el eje del cilindro.

3.4.5 Campo eléctrico E de una corteza esférica cargada.

Una cáscara esférica delgada de radio R tiene una carga $+Q$ distribuida uniformemente sobre su superficie. Determine la intensidad de campo eléctrico dentro y fuera de la cáscara.

Solución

La distribución de carga es simétricamente esférica, con una densidad de carga $\sigma = Q/A = Q/4\pi R^2$, donde $A = 4\pi R^2$ es el área de la superficie de la esfera. La intensidad de campo eléctrico \vec{E} puede ser radialmente simétrico y dirigido hacia afuera como se muestra en la figura 3.4.8. Aquí trataremos dos regiones $r \leq R$ y $r \geq R$, separadamente

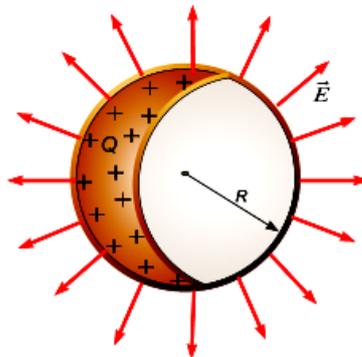


Figura 3.4.8 Distribución de carga en forma de corteza esférica. El campo eléctrico es radial y saliente si la carga es positiva.

Parte (a). Intensidad de campo para $r \leq R$.

Elegimos una superficie gaussiana de forma esférica de radio $r \leq R$, como muestra la figura 3.4.9a, con un radio $r \leq R$, en el interior de la cáscara.



Figura 3.4.9 (a) Superficie gaussiana esférica utilizada para determinar el campo eléctrico en puntos interiores a la distribución. (b) Superficie gaussiana esférica utilizada para determinar el campo eléctrico en puntos exteriores a la distribución

Debido a que la distribución de carga encierra a la superficie gaussiana, la carga que encerrada será $Q_{enc} = 0$, ello se debe a que la carga está localizada sobre la superficie de la cáscara. Por lo tanto, la aplicación de la ley de Gauss nos da

$$\Phi_E = \oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S,G} E \cos 0^\circ dA = \frac{0}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = 0$$

$$\vec{E}_r = 0 \vec{e}_r \quad \text{para } r \leq R$$

Parte (b). Intensidad de campo para $r \geq R$.

Elegimos una superficie gaussiana de forma esférica de radio $r \geq R$, como muestra la figura 3.4.9b. Debido a que la superficie gaussiana encierra completamente a la distribución de carga, la carga que encerrada será $Q_{enc} = Q$. Por lo tanto, la aplicación de la ley de Gauss da

$$\Phi_E = \oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S,G} E \cos 0^\circ dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{para } r \geq R$$

3.4.6 Campo eléctrico E de una esfera sólida aislante cargada.

Una carga eléctrica +Q es uniformemente distribuida en una esfera sólida no conductora de radio R. Determine la intensidad de campo eléctrico dentro y fuera de la cáscara.

Solución

La distribución de carga es simétricamente esférica con una densidad de carga dada por

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{(4/3)\pi R^3}$$

Donde V es el volumen de la esfera. En este caso, el campo eléctrico \vec{E} es radialmente simétrico y está dirigido hacia afuera como se ve en la figura 3.4.10. Por tanto la magnitud de la intensidad de campo eléctrico es constante sobre la superficie esférica de radio r. Aquí trataremos dos regiones $r \leq R$ y $r \geq R$, separadamente

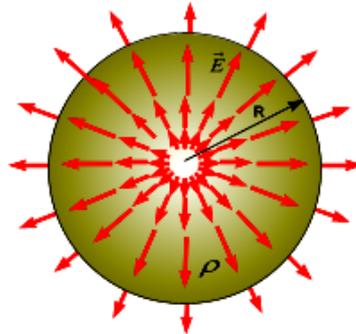


Figura 3.4.10 Esfera dieléctrica cargada uniformemente. El campo eléctrico es radial y saliente en puntos interiores y exteriores si la carga es positiva.

Parte (a). Intensidad de campo para $r \leq R$.

Elegimos una superficie gaussiana de forma esférica de radio $r \leq R$, como muestra la figura 3.4.11a. El flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana será

$$\Phi_E = \oint_{S.G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \oint_{S.G} E \cos 0^\circ dA = E \oint_{S.G} dA = E(4\pi r^2)$$



Figura 3.4.11 (a) Superficie gaussiana esférica utilizada para determinar el campo eléctrico en puntos interiores a la distribución. (b) Superficie gaussiana esférica utilizada para determinar el campo eléctrico en puntos exteriores a la distribución de carga

Por otro lado la carga neta encerrada por la superficie gaussiana de radio r es

$$Q_{enc} = \int \rho dV = \rho V = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

$$Q_{enc} = \frac{Q r^3}{R^3}$$

El cual es proporcional al volumen de la carga encerrada. Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 R^3}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \vec{e}_r \quad \text{para } r \leq R$$

Parte (b). Intensidad de campo para $r \geq R$.

En este caso, nuestra superficie gaussiana es una esfera de radio $r \geq R$, como muestra la figura 3.4.11b. Debido a que el radio de la superficie gaussiana es mayor que el radio de la esfera toda la carga es encerrada en nuestra superficie gaussiana. Por lo tanto $Q_{enc} = Q$, y la aplicación de la ley de Gauss nos da

$$\Phi_E = \oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S,G} E \cos 0^\circ dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{para } r \geq R$$

El campo fuera de la esfera es el mismo como si carga estuviese concentrada en el centro de la esfera.

3.5 CAMPO ELÉCTRICO Y CARGA EN CONDUCTORES

Es sabido que un aislador tal como el plástico, vidrio o papel es un material en el cual los electrones son atraídos por algunos átomos en particular y no pueden moverse libremente. Por otro lado, dentro de un conductor, los electrones son libres de moverse en su alrededor. Las propiedades básicas de un conductor son

1. El campo eléctrico dentro de un conductor es nulo

Si colocamos un conductor sólido en un campo eléctrico contante y externo \vec{E}_0 , las cargas positivas y negativas pueden moverse hacia las regiones polarizadas del conductor tal como se muestra en la figura 3.5.1, en consecuencia inducen un campo eléctrico \vec{E}' . Dentro del conductor el campo \vec{E}' apunta en el sentido opuesto a la dirección del campo externo \vec{E}_0 . Debido a que las cargas son móviles, ellas podrán continuar su movimiento hasta que \vec{E}' cancele completamente \vec{E}_0 dentro del conductor. En el equilibrio electrostático, el campo eléctrico en el interior del conductor puede desaparecer. Fuera del conductor, el campo eléctrico \vec{E}' debido a la distribución de carga inducida corresponde a un campo de un dipolo, y el campo total es simplemente $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$. Las líneas campo eléctrico son mostradas en la figura.

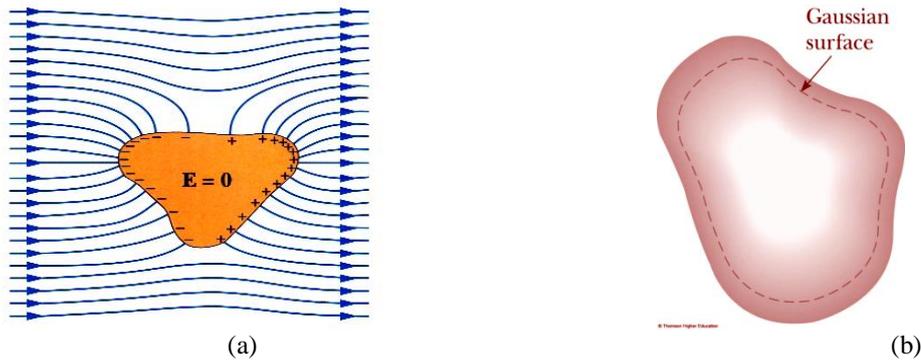


Figura 3.5.1 (a) Conductor en un campo eléctrico externo, (b) Superficie gaussiana para evaluar el campo eléctrico en el interior de un conductor sólido.

2. Cualquier carga neta puede residir en la superficie del conductor.

Si hubiese una carga neta dentro del conductor sólido, entonces por la ley de Gauss, \vec{E} no será cero allí. Por lo tanto, todo el exceso de carga puede fluir hacia la superficie del conductor como se muestra en la figura 3.5.1b.

3. La componente tangencial del campo eléctrico \vec{E} es cero en la superficie del conductor.

Siempre hemos observado que para un conductor aislado, el campo eléctrico es cero en su interior. Algún exceso de carga localizada en el conductor puede ser distribuido sobre la superficie del conductor, como lo muestra la aplicación de la ley de Gauss.

Consideremos la integral de línea $\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$ alrededor de una trayectoria cerrada mostrada en la figura 3.5.2a.

Debido a que el campo eléctrico \vec{E} , es conservativo, la integral de línea alrededor de la trayectoria cerrada $abcd$ desaparece, es decir

$$\int_{abcd} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_t(\Delta l) - E_n(\Delta x') + 0(\Delta l) + E_n(\Delta x) = 0$$



Figura 3.5.2 (a) componentes tangencial y normal del campo eléctrico inmediatamente fuera del conductor, (b) Superficie gaussiana para evaluar el campo eléctrico en el exterior de un conductor sólido.

Donde E_t y E_n son las componentes tangencial y normal del campo eléctrico, respectivamente, y hemos orientado el segmento ab tal que es paralelo a E_t . En el límite ambos Δx y $\Delta x' \rightarrow 0$, además tenemos $E_t \Delta l = 0$. Sin embargo, debido a que la longitud del elemento Δl es finito, concluimos que la componente tangencial del campo eléctrico sobre la superficie de un conductor desaparece:

$$E_t = 0 \quad \text{sobre la superficie del conductor}$$

Esto implica que la superficie de un conductor en equilibrio electrostático es una superficie equipotencial. Este tipo de superficies serán estudiadas con más detalle en el siguiente capítulo.

4. El campo eléctrico justo fuera del conductor es perpendicular a la superficie.

Si la componente tangencial del campo eléctrico es inicialmente diferente de cero, las cargas podrían entonces moverse alrededor hasta desaparecer. Situación que en el caso de equilibrio electrostático no sucede. Por lo tanto, solamente existe la componente normal.

Para determinar el campo eléctrico justo fuera del conductor, consideremos la superficie gaussiana cilíndrica con la mitad del cilindro dentro del conductor y la otra mitad fuera del conductor como se muestra en la figura tal como se muestra en la figura 3.5.2b. Usando la ley de Gauss y teniendo en cuenta que el flujo a través de la base es cero por estar dentro del conductor, el flujo en la superficie lateral también es nulo porque E es perpendicular al vector normal y solamente queda el flujo a través de la tapa

$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\iint_{tapa,1} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{base,2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S.lat} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\iint_{tapa,1} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + 0 + 0 = \iint_{tapa,1} E \cos 0^\circ dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_n$$

El resultado anterior vale para un conductor de forma arbitraria. El patrón de las líneas de campo eléctrico y su dirección son mostradas en la figura 3.5.3a.

Como en los casos de un plano no conductor infinitamente grande y de una cáscara esférica, la componente del campo eléctrico exhibe una discontinuidad en su frontera:

$$\Delta E_n = E_n^{(+)} - E_n^{(-)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - 0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

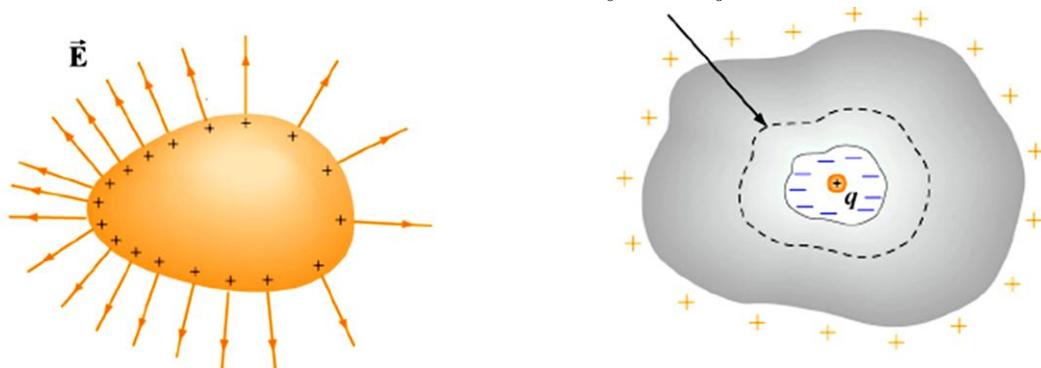


Figura 3.5.3. (a) El campo eléctrico \vec{E} justo fuera del conductor es siempre perpendicular a la superficie, (b) conductor con una cavidad.

Ejemplo. Conductor con una carga puntual en el interior de una cavidad.

Considere al conductor hueco mostrado en la figura 3.5.3b, el cual lleva una carga neta $+Q$. adicionalmente, existe una carga puntual $+q$ dentro de la cavidad. ¿Cuál es la carga en la superficie del conductor?.

Solución

Consideremos una superficie gaussiana dentro del conductor (línea ininterrumpida). Debido a que el campo eléctrico dentro de un conductor es nulo, entonces la carga neta encerrada por la superficie gaussiana mostrada en la figura, puede ser cero. Esto implica que una carga $-q$ debe ser inducida en la superficie interna de la cavidad. Además debido a que el conductor mismo tiene una carga $+Q$, la cantidad de carga sobre la superficie externa del conductor es $Q + q$.

Problema 01

Una superficie plana de área $0,14 \text{ m}^2$ se encuentra fija en el plano xy . Si existe en la región un campo eléctrico dado por $\vec{E} = (5,1\vec{i} + 2,1\vec{j} + 3,5\vec{k}) \text{ kN/C}$, determine el flujo eléctrico a través de esta superficie.

Solución

Debido a que la superficie esta en el plano xy , ella puede representarse por un vector

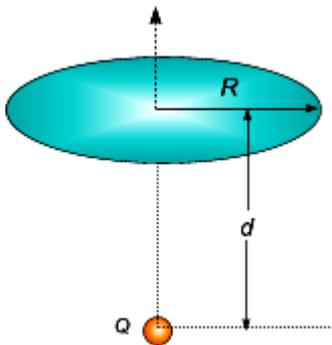
$$\vec{A} = \pm \vec{n}A = \pm A\vec{k} = (\pm 0,14\vec{k}) \text{ m}^2$$

El flujo eléctrico a través del área será

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \vec{E} \cdot \vec{A} = (5,1\vec{i} + 2,1\vec{j} + 3,5\vec{k}) \cdot (\pm 0,14\vec{k}) \text{ m}^2 \\ \Phi_E &= \pm 0,14 \text{ m}^2 (3,5 \cdot 10^3 \text{ N/C}) (\vec{k} \cdot \vec{k}) \\ \Phi_E &= \pm 490 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C} \end{aligned}$$

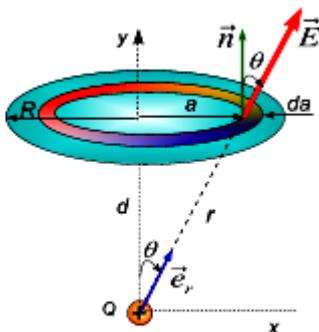
Problema 02.

Una carga puntual $Q = 3 \text{ nC}$, está a una distancia $d = 5 \text{ cm}$ de una superficie circular S de radio $R = 3 \text{ cm}$ como se muestra en la figura. Determine el flujo del vector \vec{E} a través de S



Solución.

Para determinar el flujo a través del círculo se divide a la superficie en anillos de radio a y espesor da , entonces $dA = 2\pi a da$ y se determina el flujo a través de dicho elemento, producido por el campo eléctrico de la carga puntual $\vec{E} = \frac{kQ}{r^2} \vec{e}_r$.



El flujo diferencial debido al campo de la carga puntual en el elemento será

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \right) \cdot (\vec{n} dA)$$

$$d\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\cos \theta) dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{d}{r} \right) (2\pi a da)$$

$$d\Phi_E = \frac{Qd}{2\epsilon_0 r^3} (ada) = \frac{Qd(ada)}{2\epsilon_0 (a^2 + d^2)^{3/2}}$$

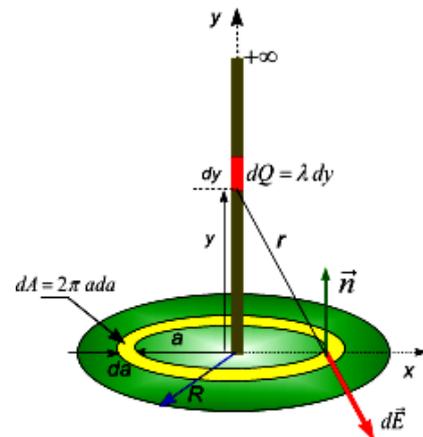
El flujo neto a través de la superficie se obtiene integrando la expresión anterior, esto es

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \frac{Qd}{2\epsilon_0} \int_{a=0}^R \frac{ada}{(a^2 + d^2)^{3/2}} = -\frac{Qd}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2}} \Big|_0^R \\ \Phi_E &= \frac{Q}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right] \end{aligned}$$

Problema 03

Un hilo muy largo cargado uniformemente y situado en el eje de un círculo de radio R se apoya con uno de sus extremos en el centro del círculo. La carga del hilo por unidad de longitud es igual a λ . Determine el flujo del vector \vec{E} a través del área del círculo.

Solución



El campo eléctrico en un punto sobre el anillo diferencial es

$$d\vec{E} = \frac{k dq}{r^2} \vec{e}_r = \frac{k \lambda dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} (a\vec{i} - y\vec{j})$$

El campo total debido a la varilla semi-infinita es

$$\vec{E} = k \lambda a \int_0^\infty \frac{dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \vec{i} - k \lambda \int_0^\infty \frac{y dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j}$$

$$\vec{E} = \frac{k\lambda}{a} \hat{i} - \frac{k\lambda}{a} \hat{j}$$

El flujo que atraviesa el elemento diferencial dA , será

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \left(\frac{k\lambda}{a} \hat{i} - \frac{k\lambda}{a} \hat{j} \right) \cdot (\hat{j}) dA$$

$$d\Phi_E = -\frac{k\lambda}{a} (2\pi a da)$$

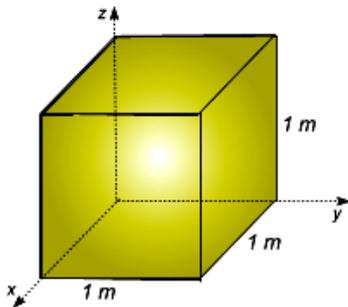
El flujo eléctrico total a través del círculo se obtiene integrando la ecuación anterior

$$\Phi_E = -2\pi k\lambda \int_0^R da = -2\pi \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \lambda R$$

$$\Phi_E = \pm \frac{\lambda R}{2\epsilon_0}$$

Problema 04

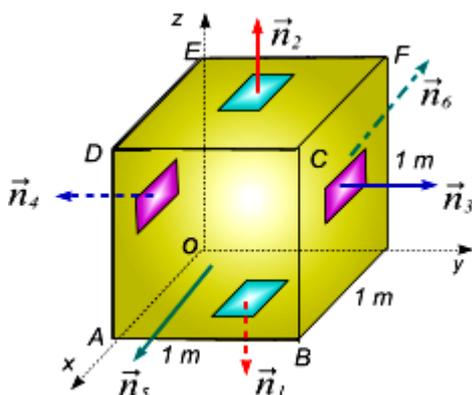
La intensidad de campo eléctrico en una región del espacio está dado por $\vec{E} = (4x\hat{i} + 2y\hat{j}) N/C$. Determine: (a) el flujo eléctrico que emana del cubo, (b) la carga neta contenida en el cubo de 1 m de lado.



Solución

Parte (a). El flujo eléctrico se evalúa en cada una de las caras del cubo y después se suma. Esto es

$$\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6$$



Flujo a través de S_1

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dA = \int_{S_1} (4xi + 2yj) \cdot (-\hat{k}) dA$$

$$\Phi_1 = 0$$

Flujo a través de S_2

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dA = \int_{S_2} (4xi + 2yj) \cdot (+\hat{k}) dA$$

$$\Phi_2 = 0$$

Flujo a través de S_3

$$\Phi_3 = \int_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 dA = \int_{S_3} (4xi + 2yj) \cdot (+\hat{j}) dA$$

$$\Phi_3 = \int_{S_3} 2y dA = \int_{S_3} 2(1) dA = 2A = 2(1)^2$$

$$\Phi_3 = 2N \cdot m^2 / C$$

Flujo a través de S_4

$$\Phi_4 = \int_{S_4} \vec{E} \cdot \vec{n}_4 dA = \int_{S_4} (4xi + 2yj) \cdot (-\hat{j}) dA$$

$$\Phi_4 = -\int_{S_4} 2y dA = -\int_{S_4} 2(0) dA$$

$$\Phi_4 = 0N \cdot m^2 / C$$

Flujo a través de S_5

$$\Phi_5 = \int_{S_5} \vec{E} \cdot \vec{n}_5 dA = \int_{S_5} (4xi + 2yj) \cdot (\hat{i}) dA$$

$$\Phi_5 = \int_{S_5} 4x dA = \int_{S_5} 4(1) dA$$

$$\Phi_5 = 4N \cdot m^2 / C$$

Flujo a través de S_6

$$\Phi_6 = \int_{S_6} \vec{E} \cdot \vec{n}_6 dA = \int_{S_6} (4xi + 2yj) \cdot (-\hat{i}) dA$$

$$\Phi_6 = -\int_{S_6} 4x dA = -\int_{S_6} 4(0) dA$$

$$\Phi_6 = 0N \cdot m^2 / C$$

Remplazando estos valores en la ecuación de flujo neto obtenemos.

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 \\ &= 0 + 0 + 2 + 0 + 4 + 0 \\ \Phi_E &= 6,0 N \cdot m^2 / C\end{aligned}$$

Parte (b). Para determinar la carga neta se usa la ley de Gauss, esto es

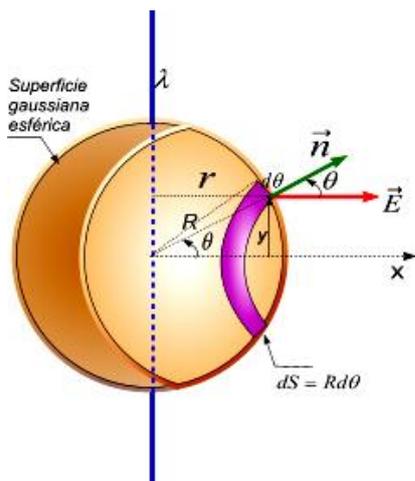
$$\begin{aligned}\Phi_E &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{enc} = \epsilon_0 \Phi_E = 8,85 \cdot 10^{-12} (6 N \cdot m^2 / C) \\ Q_{enc} &= 53 pC\end{aligned}$$

Problema 05

Utilizando la definición de flujo, determine el flujo de campo eléctrico \vec{E} de una distribución lineal λ a través de una superficie esférica de radio R con el centro en un punto de la línea.

Solución

En la figura se muestra la distribución lineal así como la superficie gaussiana.



En el ejemplo N° se demostró que el campo eléctrico para una línea infinita cargada está dado por

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

El flujo a través del elemento de área $dA = 2\pi r dS = 2\pi(R \cos\theta)(R d\theta) = 2\pi R^2 \cos\theta d\theta$, es

$$\begin{aligned}d\Phi_E &= \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r \right) \cdot (\vec{n} dA) \\ d\Phi_E &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (R \cos\theta)} (\cos\theta) (2\pi R^2 \cos\theta d\theta) \\ d\Phi_E &= \frac{\lambda R}{\epsilon_0} \cos\theta d\theta\end{aligned}$$

El flujo eléctrico a través de toda la superficie esférica se obtiene integrando la ecuación anterior, es decir

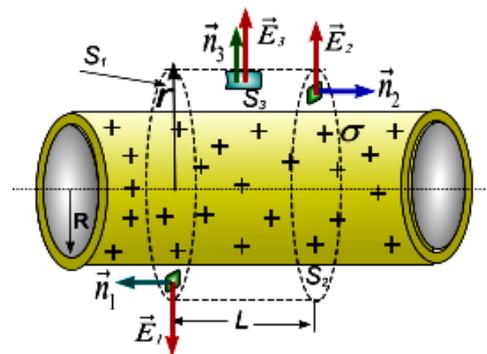
$$\begin{aligned}\Phi_E &= \frac{\lambda R}{\epsilon_0} \int_0^\pi \cos\theta d\theta = \frac{\lambda R}{\epsilon_0} [-\cos\theta]_0^\pi \\ \Phi_E &= \frac{2\lambda R}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Problema 06

Una cáscara cilíndrica de radio 7,00 cm tiene su carga distribuida uniformemente sobre su superficie. La magnitud del campo eléctrico en un punto 19,00 cm radialmente hacia afuera de su eje (medido desde el punto medio del cascarón) es 36 kN/C. Use relaciones de aproximación para encontrar: (a) La carga neta sobre el cascarón y (b) El campo eléctrico en un punto a 4 cm del eje, medido radialmente hacia afuera desde el punto medio del cascarón.

Solución

Debido a que el punto a 19 cm es mayor que el radio de la cáscara cilíndrica entonces escogemos una superficie gaussiana de radio r y longitud L, fuera de la distribución como se muestra en la figura.



Aplicando la ley de Gauss, se tiene

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \\ \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \\ \iint_{S_1} E_1 \cos 90^\circ dA + \iint_{S_2} E_2 \cos 90^\circ dA + E \iint_{S_3} dA &= \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \\ E(A_{sup,lat}) &= \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi r L) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \\ E_{r>R} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r\end{aligned}$$

Remplazando valores se tiene

$$3,6 \cdot 10^3 \text{ N/C} = \frac{\lambda}{2\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0,19\text{m})}$$

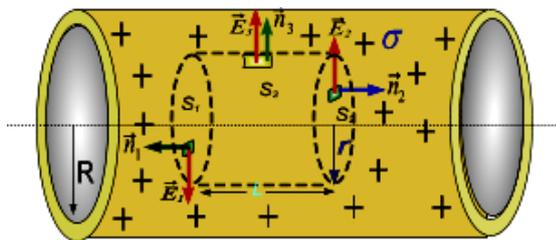
$$\lambda = 38 \text{ nC/m}$$

La carga total que se ha distribuido será

$$Q = \lambda L' = 38 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}(2,4\text{m})$$

$$Q = 912 \text{ nC}$$

Parte (b). Debido a que el punto $r = 4 \text{ cm}$, es menor que el radio del cilindro, la carga neta dentro de la superficie gaussiana interior a la cáscara es $Q_{enc} = 0$, entonces se tiene



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E(2\pi rL) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{0}{\epsilon_0}$$

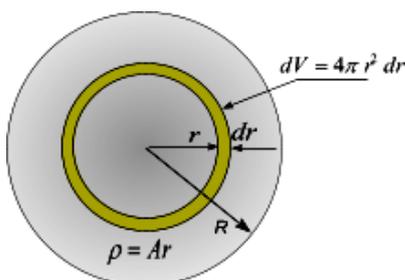
$$\vec{E}_{r < R} = 0 \vec{e}_r$$

Problema 07

Una esfera sólida no conductora de radio R posee una densidad de carga proporcional a la distancia desde el centro dada por $\rho = Ar$ para $r \leq R$, donde A es una constante. (a) Encuentre la carga total sobre la esfera, (b) Encuentre la expresión para el campo eléctrico dentro de la esfera ($r \leq R$) y fuera de la esfera ($r \geq R$) y (c) represente la magnitud del campo eléctrico como una función de la distancia r .

Solución.

Parte (a). Para determinar la carga total, se divide a la distribución de carga en elementos en forma de cáscaras cilíndricas de radio $r < R$ y de espesor dr tal como se muestra en la figura



La carga que posee el elemento diferencial de volumen dV , es

$$dQ = \rho dV = (Ar)(4\pi r^2 dr) = 4\pi Ar^3 dr$$

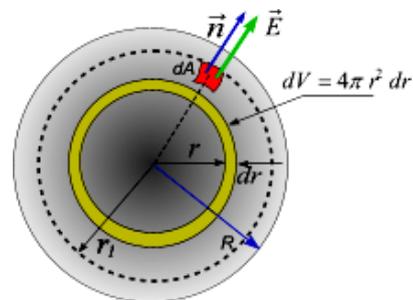
La carga total distribuida en la esfera es

$$Q = \int dQ = 4\pi A \int_0^R r^3 dr = 4\pi A \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R$$

$$Q = \pi AR^4$$

Parte (b). Campo eléctrico para puntos interiores

En la figura se muestra la superficie gaussiana de radio $r > R$



Aplicando la ley de Gauss se tiene

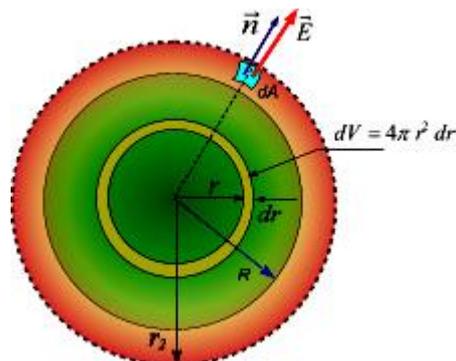
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E_1(4\pi r_1^2) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho_r dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r_1} Ar(4\pi r^2 dr)$$

$$E_1(r_1^2) = \frac{A}{\epsilon_0} \int_0^{r_1} r^3 dr$$

$$\vec{E}_1 = \frac{A}{4\epsilon_0} r_1^2 \vec{e}_r$$

Campo para puntos exteriores. En este caso se usa una superficie Gaussiana esférica de radio $r > R$ como se muestra en la figura.



Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E_2(4\pi r_2^2) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho_r dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R Ar(4\pi r^2 dr)$$

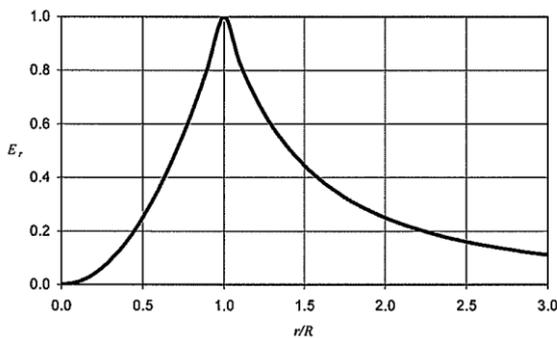
$$E_2(r_2^2) = \frac{A}{\epsilon_0} \int_0^R r^3 dr$$

$$\vec{E}_2 = \frac{AR^4}{4\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{para } r > R$$

En general se tiene

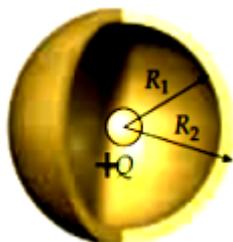
$$\vec{E}_r = \begin{cases} \frac{A}{4\epsilon_0} r^2 \vec{e}_r & \text{para } r < R \\ \frac{AR^4}{4\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & \text{para } r > R \end{cases}$$

Parte (c). La grafica E_r en función de r es



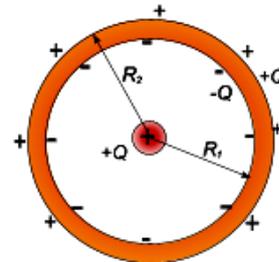
Problema 08

Una corteza esférica conductora cuyo radio interno es R_1 y externo R_2 , tiene una carga neta cero. Una carga puntual $+Q$ es localizada en el centro de la corteza tal como se muestra en la figura. (a) Use la ley de Gauss y las propiedades de los conductores en equilibrio electrostático para encontrar el campo eléctrico en las tres regiones $0 \leq r < R_1$; $R_1 \leq r < R_2$ y $r > R_2$, donde r es la distancia desde el centro. (b) Grafique las líneas de campo en todas las regiones. (c) Encontrar las densidades de carga en la superficie interna y externa de la corteza.



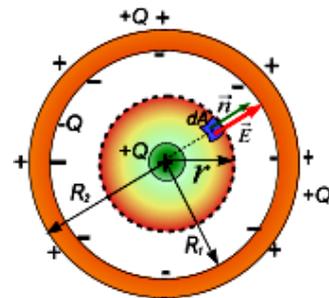
Solución

En la figura se muestra la sección transversal de la cascara, así mismo se observa que debido a que la corteza es conductora, en esta se inducen cargas, es decir, en la superficie interna se inducen cargas negativas $-Q$ distribuidas en toda su superficie y en la superficie exterior se induce cargas positivas $+Q$



Parte (a).

i) Campo para $0 \leq r < R_1$. Para esto se usa una superficie gaussiana tal como se muestra en la figura



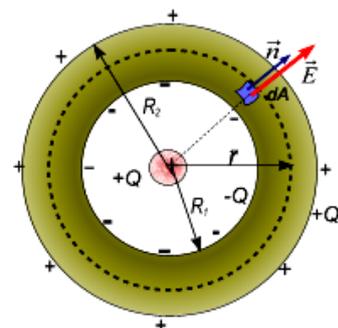
Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ii) Campo para $R_1 \leq r < R_2$ esto se usa una superficie gaussiana dentro del conductor como se ve en la figura

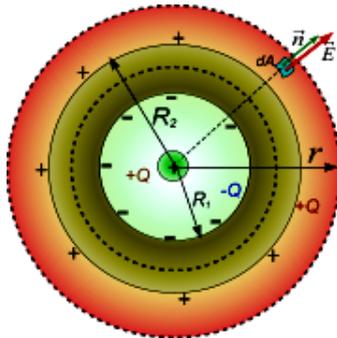


$$\oiint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

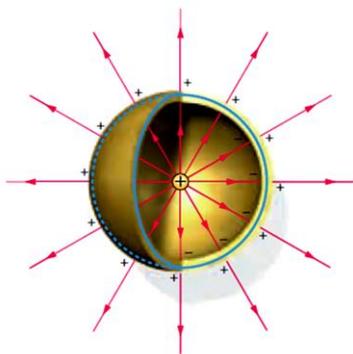
$$E(4\pi r) = \frac{Q + (-Q)}{\epsilon_0} = \frac{0}{\epsilon_0}$$

$$E = 0$$

iii) Campo para $r > R_2$, esto se usa una superficie gaussiana fuera del conductor como se ve en la figura



Parte (b). En la figura se muestra la distribución de cargas en el conductor, así mismo se traza las líneas de fuerza correspondientes, note que dentro del conductor no existen líneas de fuerza porque $E = 0$.



Parte (c). Las densidades de cargas en las superficies interna y externa son:

$$\sigma_{int} = \frac{-Q}{4\pi R_1^2}$$

$$\sigma_{ext} = \frac{+Q}{4\pi R_2^2}$$

Problema 09

Sobre la corteza cilíndrica dieléctrica de radio interno R_1 y radio exterior R_2 muy larga se ha distribuido una densidad de carga por unidad de volumen ρ en forma uniforme. Determine el campo eléctrico en las tres regiones $0 \leq r < R_1$; $R_1 \leq r < R_2$ y $r > R_2$.

Solución

Campo para $r > R_2$. Trazando una superficie gaussiana en el exterior del cilindro y aplicando la ley de Gauss, tenemos

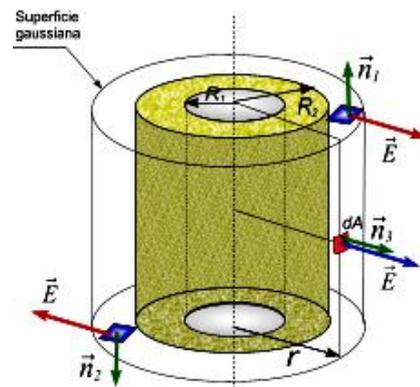
$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\iint_0 \vec{E}_1 \cos 90^\circ dA + \iint_0 \vec{E}_2 \cos 90^\circ dA + E \iint_{S_3} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E_{r>R} (A_{sup,lat}) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi rL) = \frac{\rho [\pi L(R_2^2 - R_1^2)]}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_{r>R} = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$



Campo para $r \leq R_1$ Trazando una superficie gaussiana en el interior del cilindro y aplicando la ley de Gauss, tenemos

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E(A_{sup,lat}) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi rL) = \frac{0}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_{r < R_1} = 0 \vec{e}_r$$

Campo para $R_1 \leq r \leq R_2$ Trazando una superficie gaussiana en el exterior del cilindro y aplicando la ley de Gauss, tenemos.

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E(A_{sup,lat}) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi rL) = \frac{\rho [\pi L(r^2 - R_1^2)]}{\epsilon_0}$$

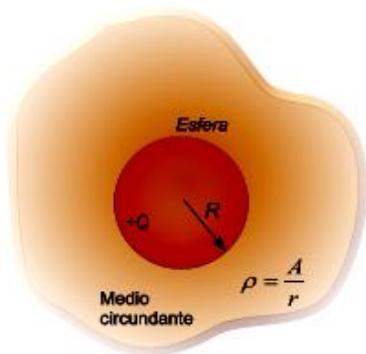
$$\vec{E}_{R_1 < r < R_2} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{(r^2 - R_1^2)}{r} \vec{e}_r$$

Problema 10.

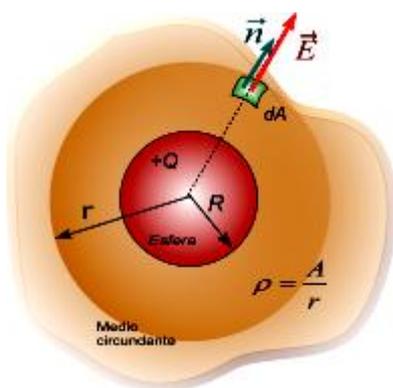
Un sistema se compone de una bola de radio R de carga Q, cuya carga tiene simetría esférica, y el medio circundante con densidad volumétrica de carga $\rho = A/r$, donde A es una constante y r, la distancia desde el centro de la bola. Determine la carga de esta última que asegure que el módulo del vector de intensidad de campo eléctrico fuera de ella no dependa de r. ¿Cuál es esta intensidad de campo?. Las constantes dieléctricas de la bola y del medio circundante se suponen iguales a la unidad.

Solución

En la figura se muestra la grafica de la esfera y el medio circundante.



Debido a que la esfera está en el interior del medio, escogemos una superficie gaussiana de forma esférica de radio $r > R$, que rodea a la esfera, como se muestra en la figura y aplicamos la ley de Gauss.



La ley de Gauss nos da

$$\epsilon_0 \oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = Q_{enc}$$

$$\epsilon_0 (4\pi r^2 E) = \left[Q + \int \rho dV \right] = \left[Q + \int_R^r \frac{A}{r} (4\pi r^2 dr) \right]$$

$$\epsilon_0 (4\pi r^2 E) = \left[Q + 4\pi A \left(\frac{r^2}{2} \right) \right] = [Q + 2\pi A(r^2 - R^2)]$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} [Q + 2\pi A(r^2 - R^2)]$$

La condición del problema exige que el campo fuera de él deba ser independiente de r, por lo tanto

$$E(R) = E(r)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} [Q + 2\pi A(R^2 - R^2)] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} [Q + 2\pi A(r^2 - R^2)]$$

$$\frac{Q}{R^2} = \frac{Q}{r^2} + \frac{2\pi A(r^2 - R^2)}{r^2}$$

$$Q = 2\pi AR^2$$

La intensidad de campo eléctrico será

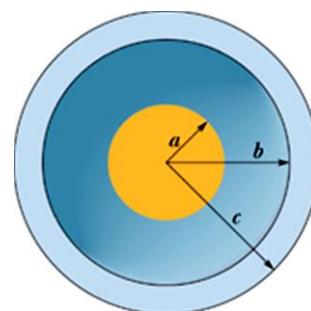
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} [Q + 2\pi A(r^2 - R^2)]$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} [2\pi AR^2 + 2\pi A(r^2 - R^2)]$$

$$\vec{E} = \frac{A}{2\epsilon_0} \vec{e}_r$$

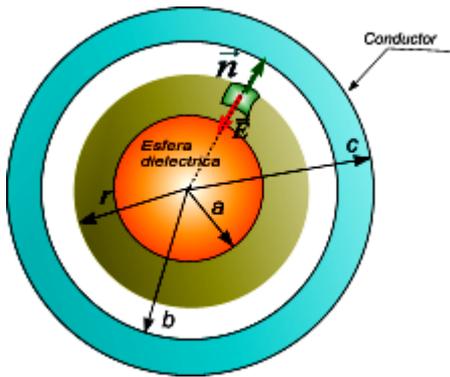
Problema 11.

Para la configuración que se muestra en la figura, suponga que $a = 5 \text{ cm}$, $b = 20 \text{ cm}$ y $c = 25 \text{ cm}$. Además suponga que el campo eléctrico en un punto a 10 cm del centro al ser medido es $3,6 \text{ kN/C}$ radialmente *hacia adentro*, mientras que el campo en un punto a 50 cm del centro es $0,2 \text{ kN/C}$ radialmente *hacia afuera*. Con esta información, determine: (a) la carga sobre la esfera aislante; (b) las cargas totales en las superficies interna y externa, respectivamente del cascarón.



Solución

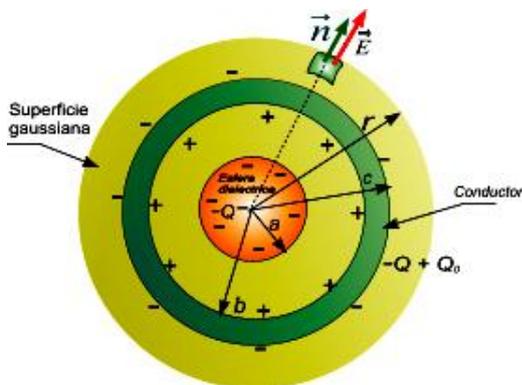
Parte (a). Carga de la esfera aislante. Consideremos una superficie Gaussiana esférica cuyo radio es $r > a$ como se muestra en la figura.



Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA &= Q_{enc} \\ \epsilon_0 \oint_{S,G} E \cos 180^\circ dA &= Q \\ -\epsilon_0 E (4\pi r^2) &= Q \\ Q &= -4\pi (8,85 \cdot 10^{-12}) (0,1)^2 (3,6 \cdot 10^3) \\ Q &= -4nC \end{aligned}$$

Esta carga induce cargas $+Q$ en la superficie interna de la corteza y cargas $-Q$ en la superficie exterior a la corteza por ser conductora, pero para determinar la carga neta en esta última se aplica la ley de Gauss en un punto exterior como se en la figura.



La ley de Gauss da

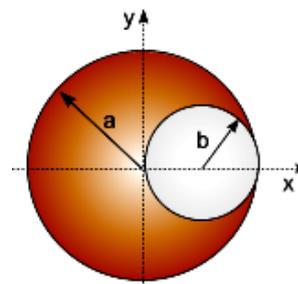
$$\begin{aligned} \epsilon_0 \oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA &= Q_{enc} \\ \epsilon_0 \oint_{S,G} E \cos 0^\circ dA &= -Q + Q - Q + Q_0 \\ \epsilon_0 E (4\pi r^2) &= -Q + Q_0 \\ 4\pi (8,85 \cdot 10^{-12}) (0,5)^2 (200) &= Q_0 - Q \\ Q_0 &= |Q| + 5,56nC \\ Q_0 &= 4nC + 5,56nC \\ Q_0 &= 9,56nC \end{aligned}$$

Las cargas en la superficie interna y externa son, respectivamente

$$\begin{aligned} Q_{r=b} &= +4nC \\ Q_{r=c} &= -4nC + 9,56nC = 5,56nC \end{aligned}$$

Problema 12

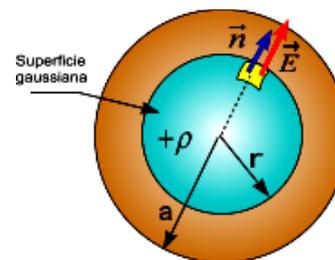
Una esfera sólida no conductora de radio a con su centro en el origen tiene una cavidad de radio b con su centro en el punto $x = b, y = 0, z = 0$ como se muestra en la figura. La esfera tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ . Determine la intensidad de campo eléctrico en cualquier punto interior a la cavidad.



Solución

El campo resultante dentro de la cavidad es la superposición de dos campos, uno \vec{E}_+ , debido a la esfera de radio a considerada compacta con densidad de carga positiva uniforme y el otro campo \vec{E}_- , debido a la esfera de radio b considerada con densidad de carga negativa uniforme. Por tanto

Campo \vec{E}_+ . Se usa la superficie gaussiana mostrada y se aplica la ley de Gauss



$$\begin{aligned} \epsilon_0 \oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA &= Q_{enc} \\ \epsilon_0 \oint_{S,G} E \cos 0^\circ dA &= \int \rho dV = \rho \int_0^r 4\pi r^2 dr \\ \epsilon_0 E (4\pi r^2) &= \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \\ \vec{E} &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r \end{aligned}$$

La expresión vectorial del campo es

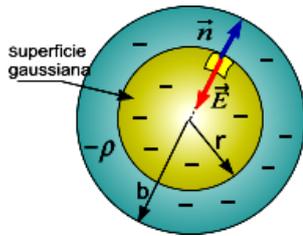
$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}_1)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} b \vec{i}$$

Campo \vec{E}_- . Se usa la superficie gaussiana mostrada y se aplica la ley de Gauss



$$\epsilon_0 \oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = Q_{enc}$$

$$\epsilon_0 \oint_{S,G} E \cos 180^\circ dA = \int \rho dV = \rho \int_0^r 4\pi r^2 dr$$

$$-\epsilon_0 E (4\pi r^2) = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

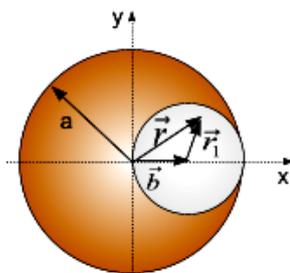
$$\vec{E} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r$$

La expresión vectorial del campo es

$$\vec{E} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r \left(\frac{\vec{r}_1}{r} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_1$$

Para aplicar el principio de superposición se traza los vectores campo en un punto interior a la cavidad como se ve en la figura donde se ve que ($\vec{b} = \vec{r} - \vec{r}_1$)



El campo resultante será

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_1$$

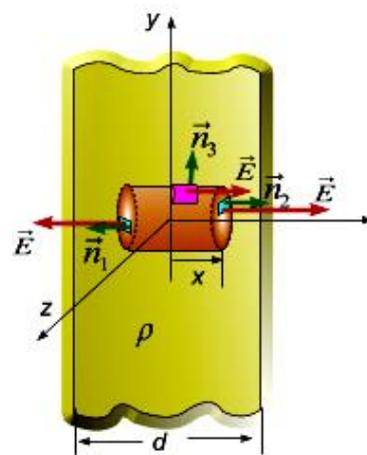
Esta ecuación muestra que el campo dentro de la cavidad es de magnitud constante y su dirección es el eje x.

Problema 13.

Una placa plana muy grande de espesor d es uniformemente cargada con una densidad de carga volumétrica ρ . Encuentre la intensidad de campo eléctrico para todos los puntos.

Solución.

Campo para puntos interiores a la placa de dieléctrico. Para esto usamos una superficie gaussiana en forma de cilindro de longitud 2x y radio R, como se muestra en la figura. Además asumimos que la placa en direcciones, y y z se extiende hacia el infinito y en la dirección x existe un espesor d. Por ello consideramos que el campo eléctrico está dirigido a lo largo del eje x.



Aplicando la ley de Gauss, se tiene

$$\oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0}$$

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 dA = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0}$$

$$EA + EA + 0 = \frac{\rho V_{cil}}{\epsilon_0}$$

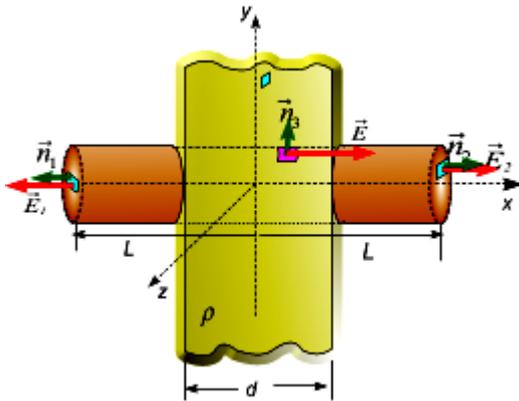
$$2E(\pi R^2) = \frac{\rho(\pi R^2(2x))}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} x \vec{i}$$

El campo en forma vectorial será

$$\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} xi \text{ para } x > 0$$

$$\vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} xi \text{ para } x < 0$$

Campo para puntos exteriores a la placa. Para esto usamos una superficie gaussiana en forma de cilindro de longitud $2x$ y radio R como se ve en la figura



Aplicando la ley de Gauss, se tiene

$$\oiint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0}$$

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 dA = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0}$$

$$EA + EA + 0 = \frac{\rho V_{cil}}{\epsilon_0}$$

$$2E(\pi R^2) = \frac{\rho(\pi R^2 d)}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \vec{i}$$

El campo en forma vectorial será

$$\vec{E} = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \vec{i} \text{ para } x > 0$$

$$\vec{E} = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} \vec{i} \text{ para } x < 0$$

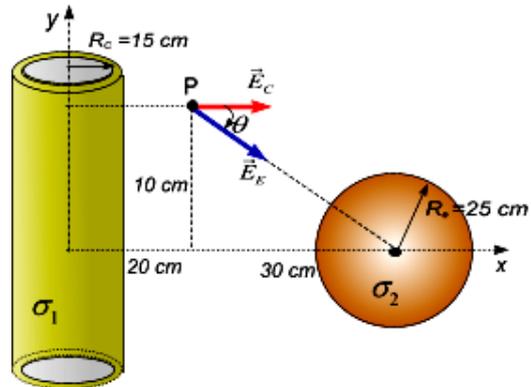
Problema 14

Una corteza cilíndrica infinitamente larga, coaxial con el eje y tiene un radio de 15 cm y posee una densidad de carga superficial $\sigma_1 = 6 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Una corteza esférica de 25 cm de radio está centrada en el eje x en $x = 50 \text{ cm}$ y posee una densidad superficial $\sigma_2 =$

$-12 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Determine la intensidad de campo eléctrico en el punto $P (20, 10) \text{ cm}$.

Solución

En la figura se muestra la ubicación de las distribuciones de carga



Campo debido a la distribución cilíndrica. Debido a que el cilindro es muy largo, se usa una superficie gaussiana que pase por P y se aplica la ley de Gauss, es decir

$$\oiint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0}$$

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 dA = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0}$$

$$0 + 0 + EA_{s,g} = \frac{\sigma_1 A_{lat,cil}}{\epsilon_0}$$

$$E_C(2\pi rH) = \frac{\sigma_1(2\pi R_C H)}{\epsilon_0}$$

$$E_C = \frac{\sigma_1 R_C}{\epsilon_0 r}$$

$$\vec{E}_C = \frac{\sigma_1 R_C}{\epsilon_0 r} = \frac{\sigma_1 R_C}{\epsilon_0 r} \vec{i}$$

Reemplazando valores se tiene

$$\vec{E}_C = \frac{6 \cdot 10^{-6} (0,15)}{8,85 \cdot 10^{-12} (0,2)} \vec{i}$$

$$\vec{E}_C = (508 \text{ kN/C}) \vec{i}$$

Campo debido a la distribución esférica

$$\oiint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0} \Rightarrow \oiint_{S,G} E \cos 0^\circ dA = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0}$$

$$EA_{s,g} = \frac{\sigma_1 A_{esf}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_E (4\pi r^2) = \frac{\sigma_2 (4\pi R_E^2)}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_E = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 \vec{e}_r$$

La expresión vectorial será

$$\vec{E}_E = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 \vec{e}_r$$

$$\vec{E}_C = \frac{12 \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12}} \left(\frac{0,25}{0,3^2 + 0,1^2} \right)^2 \vec{e}_r$$

$$\vec{E}_E = (847 \text{ kN/C}) \vec{e}_r$$

En componentes x, y y se tiene

$$\vec{E}_E = (847 \text{ kN/C}) [\cos\theta \vec{i} - \text{sen}\theta \vec{j}]$$

$$\vec{E}_E = (847 \text{ kN/C}) \left[\frac{30}{31,62} \vec{i} - \frac{10}{31,62} \vec{j} \right]$$

$$\vec{E}_E = (790 \vec{i} - 298 \vec{j}) \text{ kN/C}$$

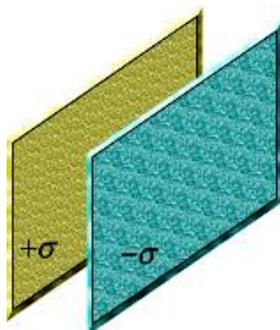
Campo neto en P. Se obtiene sumando vectorialmente los campos de las distribuciones.

$$\vec{E} = \vec{E}_C + \vec{E}_E = 508 \text{ kN/C} \vec{i} + (790 \vec{i} - 298 \vec{j}) \text{ kN/C}$$

$$\vec{E} = (1298 \vec{i} - 298 \vec{j}) \text{ kN/C}$$

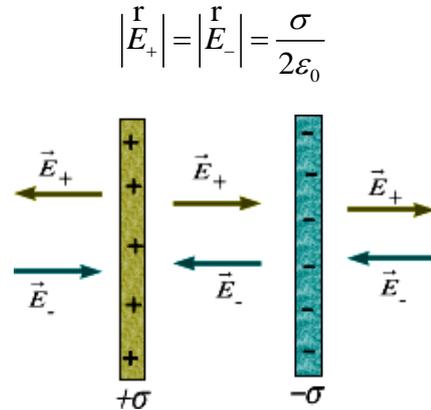
Problema 15

Dos láminas infinitas de carga, no conductoras, se encuentran paralelas entre sí. Como se observa en la figura. La lámina de la izquierda tiene una densidad de carga superficial uniforme $+\sigma$ y la derecha tiene una densidad de carga superficial $-\sigma$. Determine el campo eléctrico: (a) a la izquierda de, (b) en el centro y (b) a la derecha de las láminas.



Solución

Consideremos que los campos debido a las láminas son E_+ y E_- y representémoslo en un grafico en el cual se muestra la vista de perfil de las láminas. Hemos demostrado anteriormente que el campo de una lámina es constante y de dirección perpendicular a las láminas su módulo es



(a) Campo a la izquierda de la lámina positiva.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} = 0$$

(b) Campo en el centro de las láminas

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i}$$

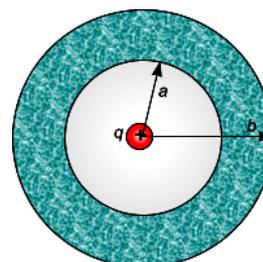
$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i}$$

(c) Campo a la derecha de la lámina negativa

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} = 0$$

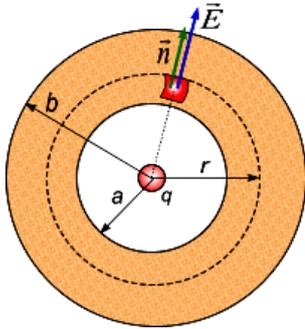
Problema 15

En la figura, una corteza esférica *no conductora* de radio interno $a = 2,00 \text{ cm}$ y radio externo $b = 2,40 \text{ cm}$, tiene una densidad de carga volumétrica positiva $\rho = A/r$ (dentro de su grosor), donde A es una constante y r es la distancia desde el centro de la cáscara. Adicionalmente, una carga puntual positiva $q = 45 \text{ fC}$ es localizada en el centro, como se muestra en la figura. ¿Qué valor debería tener A si el campo eléctrico dentro de la corteza ($a \leq r \leq b$) debe permanecer uniforme (constante)?



Solución

En la figura se muestra a la distribución de carga y la superficie Gaussiana utilizada para determinar el campo eléctrico dentro del dieléctrico.



Aplicando la ley de Gauss a la superficie gaussiana de radio $a < r < b$ se tiene

$$\oiint_{SG} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(q + \int_a^r \rho_r dV \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(q + \int_a^r \frac{A}{r} (4\pi r^2 dr) \right)$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(q + 4\pi A \int_a^r r dr \right)$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(q + \frac{4\pi A}{2} (r^2) \Big|_a^r \right)$$

$$E = \frac{[q + 2\pi A(r^2 - a^2)]}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Debido a que el campo debe permanecer uniforme en la corteza, es decir en la región comprendida $a < r < b$, entonces se tiene

$$E_{(r=a)} = E_{(r=b)}$$

$$\frac{[q + 2\pi A(a^2 - a^2)]}{4\pi \epsilon_0 a^2} = \frac{[q + 2\pi A(b^2 - a^2)]}{4\pi \epsilon_0 b^2}$$

$$\frac{q}{a^2} = \frac{[q + 2\pi A(b^2 - a^2)]}{b^2}$$

$$A = \frac{q}{2\pi a^2}$$

Problemas propuestos

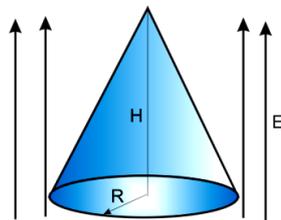
- Encuentre el flujo eléctrico a través de un área rectangular de $3\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ entre dos placas paralelas donde hay un campo eléctrico constante de 30 N/C para las siguientes orientaciones del área: (a) paralela a las placas; (b) perpendicular a las placas y (c) la normal al área hace un ángulo de 30° con la dirección del campo eléctrico.

Rta: (c) $0,016\text{ N.m}^2/\text{C}$

- Una carga puntual $+q$ se encuentra a una distancia $d/2$ sobre el centro de un cuadrado de lado d . ¿Cuál es la magnitud del flujo eléctrico a través del cuadrado?
- Una pirámide de base horizontal cuadrada, de $6,00\text{ m}$ de lado y con una altura de 4 m está colocada en un campo eléctrico vertical de 52 N/C . Determine el flujo eléctrico: (a) a través de la base de la pirámide y (b) el flujo eléctrico total que pasa a través de las cuatro superficies inclinadas de la pirámide.

Rta. $1,87\text{ kN.m}^2/\text{C}$

- Un cono con una base de radio R y altura H se coloca en una mesa. Si existe un campo eléctrico vertical como se muestra en la figura. Determine el flujo eléctrico: (a) a través de la base y (b) a través de la superficie lateral.

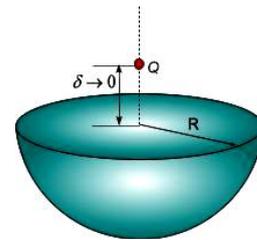


- El flujo eléctrico a través de un área en forma de cuadrado de 5 cm de lado el cual está cerca de una lámina grande es de $3 \cdot 10^{-5}\text{ N.m}^2/\text{C}$ cuando el área es paralela a la placa. Determine la densidad de carga en la lámina.

Rta: $4,43 \cdot 10^{-14}\text{ C/m}^2$.

- Un cubo de lado L está ubicado en un campo eléctrico uniforme E_0 con sus bordes paralelos a las líneas de campo eléctrico. (a) ¿Cuál es el flujo neto a través del cubo?. (b) ¿Cuál es el flujo a través de cada una de las seis caras?.

- Una carga puntual Q se localiza justo por encima del centro de la cara plana de un hemisferio de radio R , como se muestra en la figura. Determine el flujo eléctrico que pasa: (a) a través de la superficie curva y (b) a través de la cara plana.

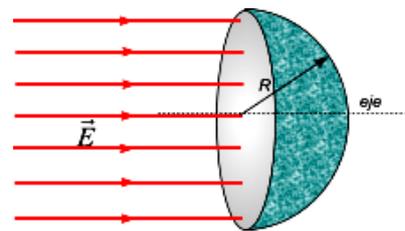


Rta: (a) $+Q/\epsilon_0$; (b) $-Q/\epsilon_0$

- Dos grandes placas de aluminio tienen un área 150 cm^2 cada una y están separadas una distancia de 3 mm . Las placas son cargadas con cargas iguales pero de signo opuesto $\pm 20\text{ }\mu\text{C}$. Encontrar el flujo a través de un círculo de 3 cm de radio el cual está entre las placas y se encuentra formando un ángulo de 5° con la normal a las placas.

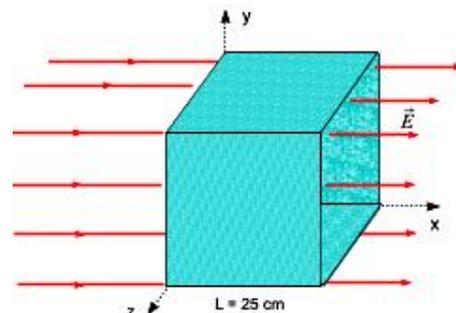
Rta. $4,24 \cdot 10^5\text{ N.m}^2/\text{C}$

- Un campo eléctrico uniforme \vec{E} es paralelo al eje de un hemisferio hueco de radio R , como se muestra en la figura. ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie hemisférica?. (b) ¿Cuál sería el resultado si \vec{E} se aplica en dirección perpendicular al eje?.

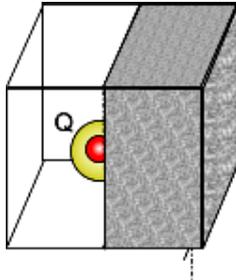


- El flujo eléctrico total a través de un caja cúbica de 28 cm de lado es $1,84\text{ kN.m}^2/\text{C}$. ¿Cuál es la carga encerrada por la caja?.

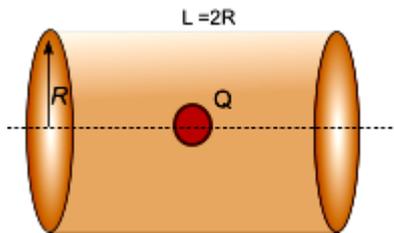
- En cierta región del espacio, el campo eléctrico es constante en dirección (dirección x), pero su magnitud disminuye desde $E = 560\text{ N/C}$ en $x = 0$ hasta $E = 410\text{ N/C}$ en $x = 25\text{ cm}$. Determine la carga dentro de la caja cúbica de lado $L = 25\text{ m}$, en donde la caja es orientada tal que cuatro de sus lados son paralelos a las líneas de campo como se muestra en la figura.



12. Un cubo sólido de metal tiene una cavidad esférica en su centro como se muestra en la figura. En el centro de la cavidad se encuentra una carga puntual $Q = +8 \mu\text{C}$. El cubo metálico lleva una carga neta $q = -6,10 \mu\text{C}$. Determine: (a) la carga total sobre la superficie de la cavidad esférica y (b) La carga total sobre la superficie exterior del cubo.



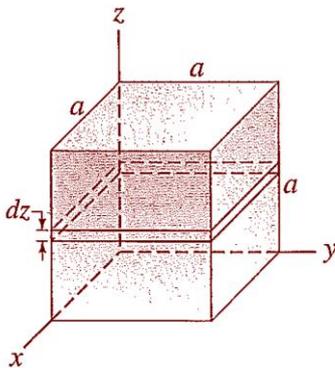
13. Una carga puntual Q está localizada en el centro de un cilindro corto. El diámetro del cilindro es igual a su longitud L . ¿Cuál es el flujo total a través de la superficie lateral del cilindro?



14. Un cubo de lado L tiene su vértice en el origen de coordenadas y se extiende a lo largo de los ejes x , y y z positivos. Suponiendo que el campo eléctrico en esta región está dado por $\vec{E} = (ay + b)\vec{j}$. Determine la carga dentro del cubo.
15. Un cubo de lado $a = 0,70 \text{ m}$ se encuentra en un campo eléctrico dado por:

$$\vec{E} = E_0 \left(1 + \frac{z}{a}\right)\vec{i} + E_0 \left(\frac{z}{a}\right)\vec{j}$$

Donde $E_0 = 0,125 \text{ N/C}$. Si el cubo tiene sus lados paralelos a los ejes coordenados, determine la carga neta dentro del cubo



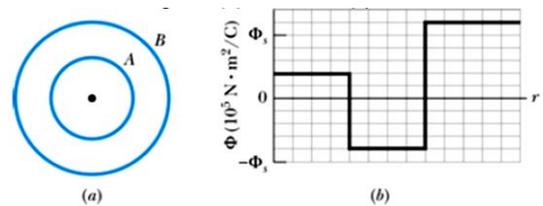
16. Un cubo de 4 cm de lado se encuentra fijo en el primer octante con una esquina en el origen de coordenadas. En la región existe un campo eléctrico dado por $\vec{E} = (1 - 3x^2)\vec{i}$, donde x está dado en m y E en N/C . Encuentre el flujo neto a través del cubo.

17. En el espacio existe un campo eléctrico dado por $\vec{E} = (-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 3z\vec{k})\text{N/C}$. Determine el flujo eléctrico a través de un cubo unitario, cuyas esquinas están en $(0, 0, 0)$; $(1, 0, 0)$; $(1, 1, 0)$; $(0, 1, 0)$; $(0, 0, 1)$; $(1, 0, 1)$; $(1, 1, 1)$ y $(0, 1, 1)$ en metros.

18. El campo eléctrico en determinada región del espacio tiene la dirección del eje z y su magnitud es $E = 4xz$, en el que x y z se miden a partir de cierto origen determine el flujo eléctrico a través de un cuadrado perpendicular al eje z , las esquinas del cuadrado son $(1, 1, 3)$; $(1, 2, 3)$; $(2, 2, 3)$ y $(2, 1, 3)$. El campo se mide en N/C y la distancia en metros.

Rta: $18 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$

19. Una partícula cargada está ocupando el centro de dos cascarones esféricos conductores y concéntricos cuya sección transversal se muestra en la figura (a). La figura (b) da el flujo neto a través de una esfera gaussiana centrada en la partícula, como función del radio de la esfera. La escala del eje vertical es ajustado por $\Phi_S = 5 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2/\text{C}$. Determine: (a) la carga de la partícula central y (b) la carga neta de los cascarones A y B.



20. Considere un campo eléctrico $\vec{E} = (-2, 4, -5)\text{N/C}$ y un elemento de superficie de 4 mm^2 con su normal a lo largo de $(2, 4; -4, 5; 6)$. Encuentre; (a) el vector unitario normal, (b) el flujo eléctrico por unidad de área y (c) el flujo a través de la superficie.

21. Una cáscara hemisférica de radio R ubicada sobre el plano $z = 0$, tiene su centro en el origen. Un campo eléctrico uniforme está dirigido a lo largo del eje z . Encuentre el flujo que atraviesa la cáscara.

22. Una carga puntual está ubicada en el centro de un tetraedro regular. El flujo a través de una de las caras es $-275 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$. Encuentre el valor de la carga colocada dentro del tetraedro.

23. Un dipolo eléctrico consiste de dos carga $+q$ y $-q$ separadas por una distancia $2b$. Un círculo de radio

R , orientado normalmente al eje del dipolo, fijo con su centro en el centro del eje del dipolo. Muestre que la magnitud del flujo eléctrico penetrante en el círculo es

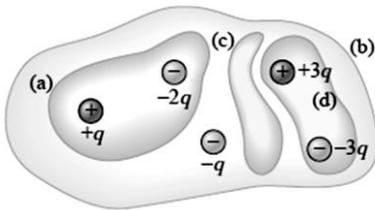
$$|\Phi_E| = \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{b^2}}} \right)$$

24. Una esfera aislante de radio R posee una carga uniforme por unidad de volumen ρ . Si Ud. se desliza a través de la esfera, definiría un círculo cuyo centro es fijo a una distancia $a \leq R$ del centro de la esfera. Muestre que la magnitud del flujo que atraviesa el círculo es.

$$|\Phi_E| = \frac{\pi \rho a}{3\epsilon_0} (R^2 - a^2)$$

25. Una carga puntual Q es localizada sobre el eje x a una distancia d del plano de un disco de radio R . Muestre que si una cuarta parte del flujo eléctrico de la carga pasa a través del disco, entonces $R = b\sqrt{3}$

26. ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de cada superficie cerrada mostrada.



27. Una carga puntual de $41pC$, está embebida en el centro de una carga de un cubo no conductor previamente descargado. Si el cubo tiene 30 cm de lado. ¿Cuál es el flujo a través del cubo completo?.

28. Una carga de densidad uniforme $5,0\text{ nC/m}^3$, llena la región entre $z = -5,0\text{ cm}$ y $z = 5\text{ cm}$. Determine la magnitud del campo eléctrico en cualquier punto con $z = 3\text{ cm}$.

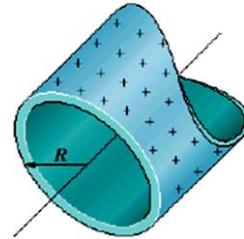
Rta. 17 N/C .

29. Una placa conductora plana e infinita tiene una carga por unidad de área igual a $2 \cdot 10^{-10}\text{ C/m}^2$. Determine el campo eléctrico a una distancia $r = 1,00\text{ cm}$ sobre la superficie de la placa.

Rta. $22,6\text{ N/C}$.

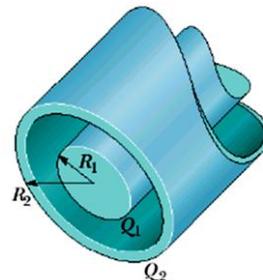
30. Dos grandes placas metálicas paralelas de 3 m^2 están separadas una distancia de $4,0\text{ cm}$. Ellas tienen cargas iguales y opuestas de $+34\text{ pC}$ y -34 pC . ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el punto medio entre las placas lejos de los bordes.

31. La figura muestra la sección de un tubo metálico delgado y largo de radio $R = 3,0\text{ cm}$, con una carga por unidad de longitud $\lambda = 2,00 \cdot 10^{-8}\text{ C/m}$. ¿Cuál es la magnitud E del campo eléctrico a una distancia radial (a) $r = R/2$ y (b) $R = 2R$?. (c) Grafique E versus r para el rango $r = 0$ a $r = 2R$

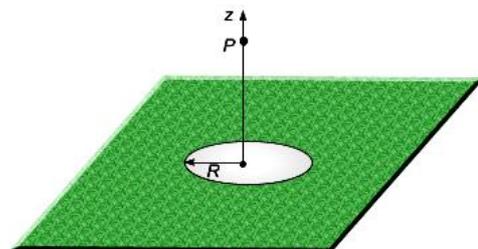


Rta. (a) $E = 0$; (b) $5,99\text{ kN/C}$

32. La figura muestra la sección de una barra conductora de radio $R_1 = 1,3\text{ mm}$ y longitud $L = 11\text{ m}$ dentro de una cascara conductora cilíndrica coaxial de radio $R_2 = 10R_1$ y de la misma longitud L . La carga neta en la barra es $Q_1 = 3,4\text{ pC}$ y en la cascara es $Q_2 = -2,0Q_1$. Determine: (a) la magnitud y dirección del campo eléctrico a una distancia $r = 2,0R_2$, (b) la magnitud y dirección del campo eléctrico a una distancia $r = 5,00R_1$, (c) La carga en la superficie interior y exterior de la corteza cilíndrica.

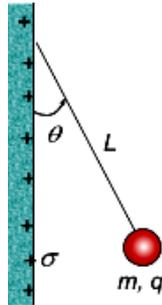


33. En la figura, un hueco circular pequeño de radio $R = 1,80\text{ cm}$ ha sido cortado en el centro de una superficie plana no conductora e infinita que tiene una densidad de carga uniforme $\sigma = 4,50\text{ pC/m}^2$. Un eje z , con su origen en el centro del hueco, es perpendicular a la superficie. ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto P en $z = 2,56\text{ cm}$?. Sugerencia: use el principio de superposición



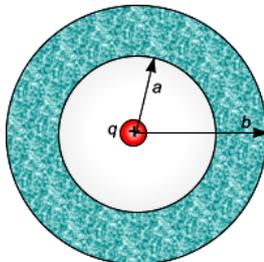
Rta. $(0,208 \frac{N}{C})\vec{k}$

34. En la figura, una esfera pequeña no conductora de masa $m = 1,0 \text{ mg}$ y carga $q = 20 \text{ nC}$ (distribuida uniformemente en su volumen) cuelga de un hilo aislante de 50 cm de longitud el cual forma un ángulo $\theta = 30^\circ$ con una lámina no conductora vertical cargada uniformemente (mostrada en sección transversal). Considerando la fuerza gravitacional sobre la esfera y asumiendo que la lámina se extiende verticalmente y dentro y fuera de la página. Determine la densidad de carga superficial σ de la lámina.



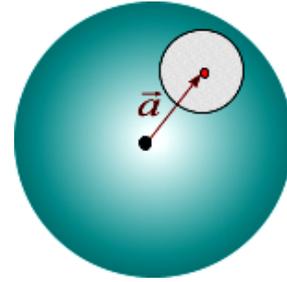
Rta: $5,0 \text{ nC/m}^2$

35. En la figura, una corteza esférica no conductora de radio interno $a = 2,00 \text{ cm}$ y radio externo $b = 2,40 \text{ cm}$ tiene una densidad de carga volumétrica positiva $\rho = A/r$, donde A es una constante y r es la distancia desde el centro de la cáscara. Adicionalmente, una pequeña esfera de carga $q = 45 \text{ fC}$ es localizada en el centro. ¿Qué valor podría tener A si el campo eléctrico dentro de la corteza ($a \leq r \leq b$) debe permanecer uniforme?.

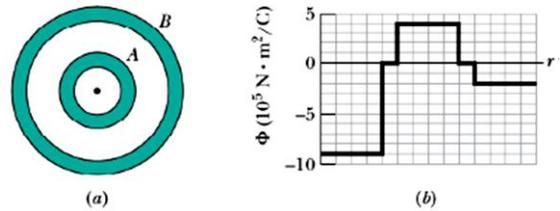


Rta. $A = \frac{q}{2\pi a^2} = 17,9 \text{ pC/m}^2$

36. Una esfera no conductora sólida tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ . Si \vec{r} es un vector dirigido desde el centro de la esfera a cualquier punto p en general dentro de la esfera. (a) muestre que el campo eléctrico en el punto P está dado por $\vec{E} = \rho\vec{r}/3\epsilon_0$. (note que el resultado es independiente del radio de la esfera). (b) Una cavidad esférica es practicada dentro de la esfera, como se muestra en la figura. Usando conceptos de superposición, muestre que el campo eléctrico para todos los puntos dentro de la cavidad es igual $\vec{E} = \rho\vec{a}/3\epsilon_0$, donde \vec{a} es el vector de posición dirigido desde el centro de la esfera al centro de la cavidad. (note que su resultado es independiente del radio de la esfera y el radio de la cavidad

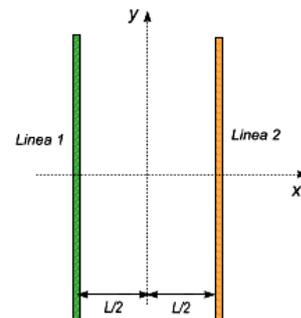


37. Una partícula cargada es colocada en el centro de dos cascarones esféricos conductores y concéntricos. La figura (a) muestra la sección transversal. La figura (b) da el flujo a través de una esfera gaussiana centrada en la partícula, como una función del radio r de la esfera. Determine (a) la carga de la partícula localizada en el centro y (b) las cargas netas de los cascarones A y B



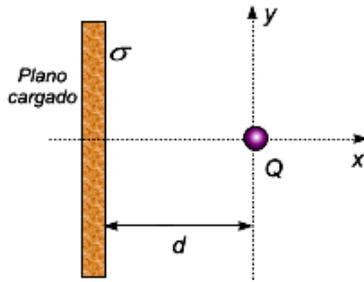
Rta. (a) $-7,97 \text{ } \mu\text{C}$, (b) $q_A = 11,5 \text{ } \mu\text{C}$ y $q_B = -5,3 \text{ } \mu\text{C}$

38. En la figura se muestran secciones cortas de dos líneas de cargas paralelas y muy largas, fijas en ese lugar, separadas por una distancia $L = 8,00 \text{ cm}$. Las densidades de carga uniforme son $+6 \text{ } \mu\text{C/m}$ para la línea 1 y $-2 \text{ } \mu\text{C/m}$ para la línea 2. ¿Dónde a lo largo del eje x mostrado el campo eléctrico neto de las dos líneas es cero?.



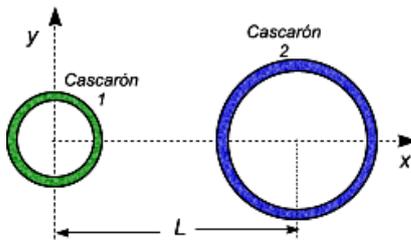
Rta: $x = 8 \text{ cm}$

39. La figura muestra una lámina no conductora muy grande que tiene una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = -2,00 \text{ } \mu\text{C/m}^2$; también muestra a una partícula de carga $Q = 6,00 \text{ } \mu\text{C}$, a una distancia d de la lámina. Ambos están fijos en ese lugar. Si $d = 20 \text{ cm}$, ¿en que coordenada sobre el eje x (a) positiva y (b) negativa, el campo eléctrico neto de la partícula y el plano es cero?. (c) Si $d = 80 \text{ cm}$, ¿En qué coordenada x el campo eléctrico neto es cero?.



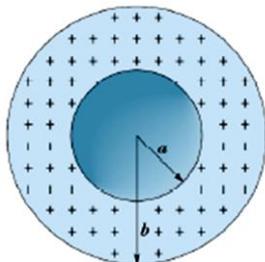
- Rta. (a) $x = 0,691 \text{ m}$ sobre el eje x positivo
 (b) $x = -0,691 \text{ m}$ sobre el eje x negativo
 (c) $x = +0,691 \text{ m}$

40. La figura muestra dos cascarones esféricos no conductores fijos en su lugar sobre el eje x . El cascarón 1 tiene una densidad de carga superficial uniforme $+4 \mu\text{C}/\text{m}^2$ sobre su superficie exterior y radio $0,50 \text{ cm}$, mientras que el cascarón 2 tiene una densidad de carga superficial de $-2 \mu\text{C}/\text{m}^2$ sobre su superficie de radio $2,00 \text{ cm}$; los centros están separados por $L = 6 \text{ cm}$. ¿En qué punto sobre el eje x diferente del infinito el campo eléctrico es nulo?.



Rta: $-3,3 \text{ cm}$

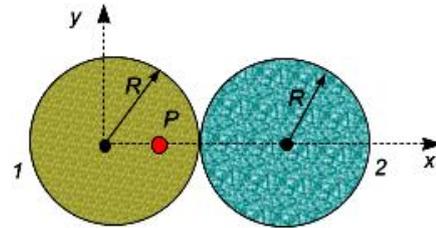
41. La figura muestra un cascarón esférico con densidad de carga volumétrica uniforme $\rho = 1,84 \text{ nC}/\text{m}^3$, radio interno $a = 10 \text{ cm}$ y radio externo $b = 2a$. Determine la magnitud del campo eléctrico a las distancias radiales (a) $r = 0$; (b) $r = 0,5a$; (c) $r = a$; (d) $r = 1,5a$; (e) $r = b$ y (f) $r = 3b$



Rta. (a) cero; (b) cero; (c) cero; (d) $7,32 \text{ N/C}$; (e) $12,1 \text{ N/C}$; (f) $1,35 \text{ N/C}$

42. La figura muestra, la sección transversal de dos esferas sólidas con carga uniformemente distribuida en sus volúmenes. Cada una tiene un radio R . Mientras que el punto P está ubicado sobre la línea que une los centros de las esferas, a una distancia radial de, $\frac{R}{2}$ desde el centro de la esfera 1.

Si el campo eléctrico en el punto P es nulo ¿Cuál es la razón q_2/q_1 de la carga total q_2 en la esfera 2 a la carga total q_1 en la esfera 1?.



Rta: $q_2/q_1 = 1,125$

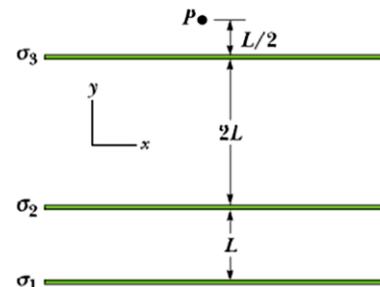
43. Una distribución de carga que es simétricamente esférica pero radialmente no uniforme produce un campo eléctrico de magnitud $E = kr^4$ dirigido radialmente hacia afuera desde el centro de la esfera. Aquí r es la distancia radial desde el centro y K es una constante. ¿Cuál es la densidad de carga volumétrica ρ de la distribución?.

Rta. $\rho(r) = 6K\epsilon_0 r^3$

44. El eje de un cilindro metálico hueco largo de radio interno $a = 1 \text{ cm}$, radio exterior $b = 2 \text{ cm}$ coincide con un alambre delgado. El alambre tiene una densidad de carga lineal $\lambda = +8 \text{ nC}/\text{m}$ mientras que el cilindro hueco tiene una carga neta por unidad de longitud $\lambda_2 = +4 \text{ nC}/\text{m}$. Determine (a) la densidad de carga superficial de la superficie exterior del cilindro, (b) El campo eléctrico para puntos exteriores al cilindro.

Rta. (a) $95,49 \text{ nC}/\text{m}^2$

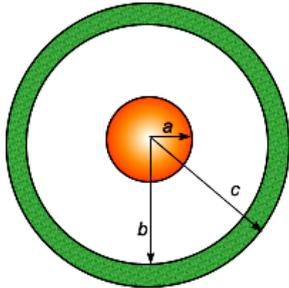
45. La figura muestra la sección transversal de tres láminas no conductoras infinitamente grandes sobre las cuales ha sido distribuido uniformemente carga. Las densidades de cargas son $\sigma_1 = +2 \mu\text{C}/\text{m}^2$; $\sigma_2 = +4 \mu\text{C}/\text{m}^2$ y $\sigma_3 = -5 \mu\text{C}/\text{m}^2$ y la distancia $L = 1,5 \text{ cm}$. Determine la expresión vectorial del campo eléctrico en el punto P.



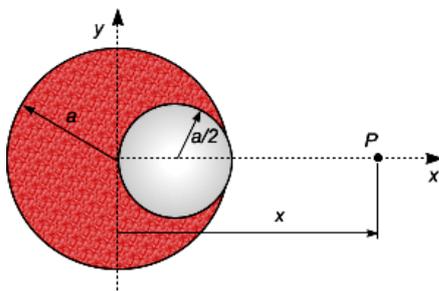
Rta: $\vec{E} = 5,65 \cdot 10^4 \text{ N/C } \hat{j}$

46. Considere una nube esférica de carga de radio a , con una densidad de carga no uniforme, esto es, carga por unidad de volumen, dada por $\rho = A/r^2$,

donde A es una constante y r la distancia radial desde el centro. Esta es rodeada por un cascarón conductor concéntrico de radio interno b y radio exterior c el cual lleva una carga neta $-q$, cuya magnitud es mayor que la carga total en la nube interior. (a) Use la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico en todos los puntos del espacio. (b) muestre en una figura la dependencia radial del campo eléctrico. (c) ¿Cuáles son las densidades de carga σ_b y σ_c sobre la superficie exterior e interior del conductor?.



47. Considere una nube esférica de carga de densidad de carga uniforme ρ y radio a , conteniendo una cavidad esférica de radio $a/2$, como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en el punto P a una distancia x desde el centro de la nube esférica.



Rta. $\frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{8(x-a/2)^2} \right) \vec{i}$

48. La carga por unidad de volumen en una esfera de radio 0,50 mm varía con la distancia radial r desde el centro de la esfera como sigue $\rho = (3,5 \cdot 10^{-3} r) C/m^3$. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico a una distancia de 0,20 mm desde el centro de la esfera?.

49. Un cascarón esférico simétrico tiene un radio interno de 50 cm y un radio externo de 70 cm. El cascarón tiene una densidad de carga uniforme de $\rho = 0,02 C/m^3$. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico a 0,65 m desde el centro del cascarón.

Rta: $2,7 \cdot 10^8 N/C$

50. La densidad de carga ($80 nC/m^3$) es distribuida dentro de una región cilíndrica hueca formada por dos superficies cilíndricas coaxiales de radios, 1,0

mm y 3 mm, respectivamente. Determine la magnitud del campo eléctrico en un punto el cual está a 2,0 mm desde el eje de simetría.

51. La densidad de carga uniforme ($10 nC/m^2$) es distribuida sobre una superficie cilíndrica de radio 1 cm, y una segunda superficie coaxial de radio 3 cm lleva una densidad de carga de $-12 nC/m^2$. Determine la magnitud del campo eléctrico en un punto a 4 cm desde el eje de simetría de las dos superficies.

Rta: $0,73 kN/C$

52. Un cilindro sólido aislante largo de radio 3,0 cm contiene una densidad de carga no uniforme $\rho = A/r$ donde A es igual a $6,0 nC/m^2$ y r es la distancia radial desde el eje del cilindro. Determine la magnitud del campo eléctrico a una distancia de 4,0 cm desde el eje del cilindro.

53. Un cascarón esférico no conductor delgado de radio R_1 tiene una carga total q_1 que está distribuida uniformemente sobre su superficie. Una segunda cáscara no conductora delgada de radio R_2 que es coaxial con la primera tiene una carga q_2 que es distribuida uniformemente sobre su superficie. (a) use la ley de Gauss para obtener expresiones del campo eléctrico en cada una de las tres regiones: $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ y $r > R_2$. (b) ¿Cuál podría ser la razón de las cargas q_1/q_2 y el signo relativo para q_1 y q_2 para que el campo eléctrico sea cero en la región $r > R_2$?

Rta. (a) cero; $\frac{kq_1}{r^2}, \frac{k(q_1+q_2)}{r^2}$ (b) -1

54. Una esfera sólida no conductora de radio R tiene una densidad de carga volumétrica que es proporcional a la distancia desde el centro. Esto es, $\rho = Ar$ para $r \leq R$, donde A es una constante. (a) Encuentre la carga total en la esfera, (b) Determine expresiones para el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera y (c) representar la magnitud del campo eléctrico como una función de la distancia r desde el centro de la esfera.

55. Una esfera de radio R tiene una densidad de carga volumétrica $\rho = B/r$ para $r < R$, donde B es una constante y $\rho = 0$ para $r > R$. (a) encuentre la carga total sobre la esfera. (b) encuentre expresiones para el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera y (c) represente la magnitud del campo eléctrico como una función de la distancia r desde el centro de la esfera.

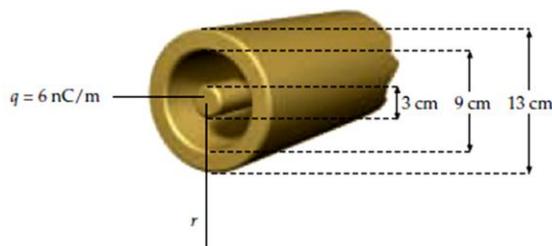
56. La carga por unidad de volumen en un aislador esférico de radio R varía de acuerdo con la relación $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right)$, donde ρ_0 es el valor de ρ en el centro de la esfera. (a) determine la magnitud del

campo eléctrico para $r < R$, (b) determine $E(r)$ para $r > R$, (c) para qué valor de r el campo eléctrico es máximo?. ¿Cuál es el valor de E_{max} ?

57. Considere una esfera aislante de radio R con una carga por unidad de volumen uniforme. Suponga que Ud. podría taladrar un pequeño hueco a través de la esfera a lo largo del diámetro. Muestre que el movimiento de una carga puntual $-q$ dentro del agujero es armónico simple y entonces determine el tiempo que podría tomarle a esta carga puntual en ir y volver al mismo lugar.
58. Un plano infinito de carga de densidad superficial $\sigma_1 = 3 \mu C/m^2$ es paralelo al plano xz en $y = -0,6$ m. Un segundo plano infinito de densidad de carga superficial $\sigma_2 = -2 \mu C/m^2$ es paralelo al plano yz en $x = 1$ m. Una esfera de 1 m de radio con su centro en el plano xy en la intersección de los planos cargados ($x = 1$ m, $y = -0,6$ m) posee una densidad de carga superficial $\sigma_3 = -3 \mu C/m^2$. Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico sobre el eje x en: (a) $x = 0,4$ m y (b) $x = 2,5$ m.

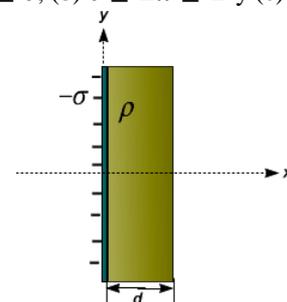
Rta: (a) $(1,13\vec{i} + 1,69\vec{j}) \cdot 10^5 N/C$

59. Una corteza esférica cargada uniformemente con una densidad de carga superficial σ , tiene un orificio circular en su superficie. El radio del orificio a es muy pequeño comparado con el radio de la esfera R . (a) Cuál es el campo eléctrico en el centro del orificio; (b) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto P el cual esta a una distancia $z > R$ desde el centro de la esfera y directamente sobre el centro del orificio pequeño?. (c) ¿Cómo sería el campo en un punto P a una distancia $z < R$ desde el centro de la esfera y directamente debajo del centro del orificio pequeño?.
60. La figura muestra una porción de un cable concéntrico largo en sección transversal. El conductor interno posee una carga $6 nC/m$; el conductor exterior está descargado. (a) Determine el campo eléctrico para todos los valores de r , donde r es la distancia desde el eje del sistema cilíndrico. (b) ¿Cuáles son las densidades superficiales de carga sobre las superficies interior y exterior del conductor externo?.

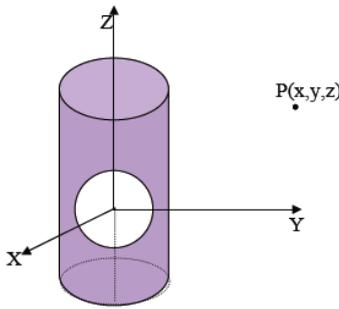


Rta. (a) cero para $0 \leq r \leq 1,5$ cm; $108/r$ para $1,5 \leq r \leq 4,5$ cm, (b) $2,1 \cdot 10^{-8} C/m^2$; $1,47 \cdot 10^{-8} C/m^2$

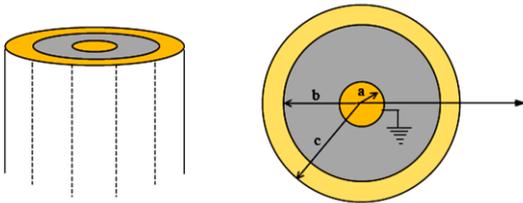
61. Un cilindro sólido aislante muy largo de radio R tiene un hueco cilíndrico de radio a taladrado a lo largo de su longitud. El eje del hueco está a una distancia b del eje del cilindro, donde $a < b < R$. El material sólido del cilindro tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ . Determine la magnitud del campo eléctrico \vec{E} dentro del hueco y mostrar que \vec{E} es uniforme sobre el hueco completo.
62. Una placa plana de espesor d tiene una densidad de carga volumétrica uniforme $\rho = Cx$, donde x se mide a partir del centro de la placa y C es una constante positiva. Determine el campo eléctrico en todos los puntos en el espacio (a) dentro y (b) fuera de la placa, en términos de la distancia x .
63. Una placa de material aislante tiene un espesor $2d$ y está orientada tal que sus caras son paralelas al plano yz y esta dado por el plano $x = d$ y $x = -d$. Las dimensiones y y z de la placa son muy grandes en comparación con d y pueden considerarse esencialmente infinitas. La placa tiene una densidad de carga volumétrica dada por $\rho(x) = \rho_0(x/d)^2$, donde ρ_0 es una constante positiva. Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico en todos los puntos del espacio como una función de x .
64. Una placa dieléctrica de extensión infinita tiene un espesor d y lleva una densidad volumétrica de carga $\rho = ax$, donde a es una constante positiva. Esta placa dieléctrica infinita está pegada a un plano infinito con densidad superficial de carga uniforme $-\sigma$. Determine el campo eléctrico para (a) $x \leq 0$; (b) $0 \leq x \leq d$ y (c) $x \geq d$.



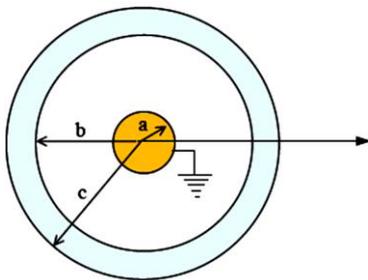
65. Un cilindro dieléctrico muy largo de radio R cargado con una densidad ρ uniforme radialmente simétrica, tiene una cavidad esférica de radio $b < a$ con su centro coincidiendo con el eje del cilindro. Determine el campo eléctrico en el punto $P(x, y, z)$ fuera del cilindro.



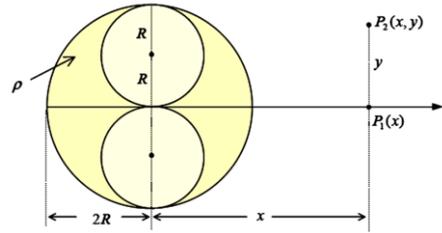
66. La figura muestra el perfil de un conjunto de cilindros muy largos. El cilindro interior de radio a es metálico y tiene una carga $+Q$. Entre a y b existe un cascarón cilíndrico dieléctrico cuya densidad de carga varía radialmente en la forma $\rho(r) = \alpha/r$, donde α es una constante positiva. Entre b y c existe un cascarón cilíndrico metálico con carga $-Q$. Determine el campo eléctrico en todo el espacio en función de la distancia radial al eje del sistema de cilindros.



67. Se tiene un sistema formado por una esfera metálica de radio a , inicialmente descargada, conectada a tierra y un cascarón metálico esférico de radios b y c . Sobre este cascarón se deposita una carga $+Q$. Calcular la carga Q , que se debe inducir sobre la esfera interior de radio a (lo cual es posible debido a su conexión a tierra) y el campo eléctrico $E(r)$ en todas las regiones es decir $r \leq a$; $a \leq r \leq b$; $b \leq r \leq c$ y $r \geq c$.

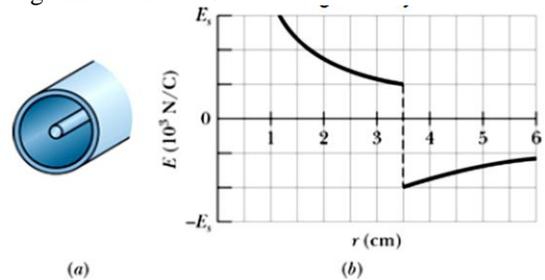


68. Un cilindro dieléctrico de radio $2R$ y largo infinito tiene una densidad volumétrica de carga radialmente uniforme, es decir $\rho(\vec{r}) = cte$. Si se le hacen dos agujeros cilíndricos infinitamente largos, cada uno de radio R , hallar el campo eléctrico $E(x)$ en el punto P en función de la distancia radial x mostrada en la figura.

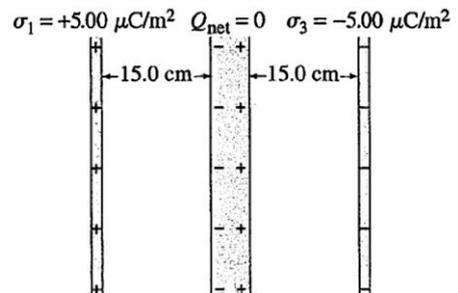


69. Para el problema N° 63, encuentra el campo eléctrico en el punto $P_2(x, y)$, cuando este punto está fuera del cilindro, determine además el campo en un punto dentro del cilindro grande pero fuera de los agujeros.

70. La figura muestra un cilindro sólido delgado y cargado que es coaxial con una cáscara cilíndrica cargada muy larga. Ambos son no conductores y delgados y tienen densidades de cargas superficiales sobre sus superficies exteriores. La figura muestra la componente radial E del campo eléctrico en función de la distancia r desde el eje común. La escala en el eje vertical es ajustado por $E = 3,0 \cdot 10^3 \text{ N/C}$. Cuál es la densidad de carga lineal en la cáscara.



71. Tres láminas muy grandes están separadas por distancias iguales de 15 cm como se muestra en la figura. La primera y la tercera lámina son muy delgadas y no conductoras y tienen una carga por unidad de área σ de $+5,00 \mu\text{C}/\text{m}^2$ y $-5,00 \mu\text{C}/\text{m}^2$, respectivamente. La lámina central es conductora pero no tiene carga neta. (a) ¿Cuál es el campo eléctrico en el interior de la lámina central? (b) ¿Cuál es el campo eléctrico entre la lámina izquierda y la lámina del centro? (c) ¿Cuál es el campo eléctrico entre la lámina central y la lámina derecha? (d) ¿Cuál es la densidad de carga superficial en ambos lados de la lámina central?



72. Una superficie gaussiana de dimensiones $a = b = 0,4 \text{ m}$ y $c = 0,6 \text{ m}$ está colocada como se muestra en la figura. La arista izquierda de la superficie cerrada está ubicada en la posición $x = a$. El Campo eléctrico en toda la región no es uniforme y está dado por $\vec{E} = (3 + 2x^2)\vec{i} \text{ N/C}$, donde x está expresado en metros. Determine (a) el flujo eléctrico neto que sale de la superficie cerrada, (b) la carga neta que se encuentra dentro de la superficie.

