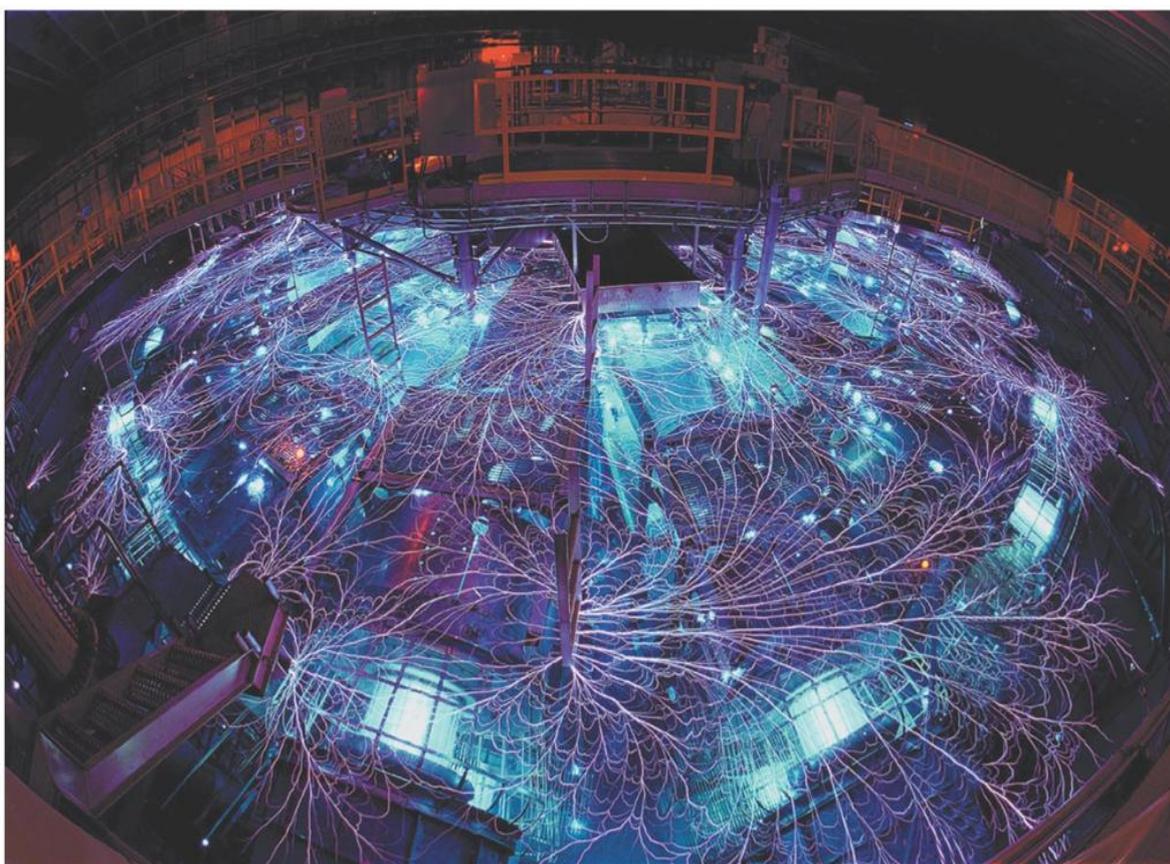


CAPITULO V

CAPACITANCIA Y DIELECTRICOS



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

5.1. Introducción

Cuando necesitamos electricidad, es necesario presionar un interruptor y obtenerla del suministro. Por otro lado si tenemos acceso a un generador, podemos asegurarnos que obtenemos electricidad siempre que presione un interruptor para poner en movimiento el generador por algún medio (movimiento de una turbina de vapor, movimiento de un molino de viento, etc). Sin embargo, si no disponemos de estos elementos es necesario buscar algún método para almacenar energía eléctrica de tal manera que podríamos utilizarlo posteriormente cuando se necesite. En la actualidad se conocen dos formas básicas para almacenar electricidad: químicamente y mecánicamente.

La forma más común de almacenaje de energía eléctrica es mediante el uso de las baterías. Estos elementos permiten almacenar la carga eléctrica mediante la creación de componentes químicos que pueden reaccionar en una solución ácida o básica liberando electrones. Las baterías han cumplido una labor extraordinaria en los últimos años, sin embargo su uso ha producido en la sociedad moderna algún problema. Uno de éstos es el uso de componentes químicos tóxicos como el plomo, mercurio y cadmio que son peligrosos cuando las pilas son desechadas. Por otra parte, ellas constituyen un problema cuando de repente aparecen grietas o fisuras en el recipiente las mismas que producen fugas de los componentes tóxicos antes mencionados. Cualquier persona que haya abierto la parte posterior de una de estos elementos observará los componentes internos de las baterías las mismas que muestran un índice de acidez o alcalinidad y que si por algún descuido son consumidos producirán desordenes catastróficos en el ser humano.

La electricidad también puede ser almacenada químicamente en celdas de combustible. Este dispositivo no requiere de soluciones ácidas o alcalinas, estas especies químicas que usan son el hidrógeno y el oxígeno las mismas que reaccionan a través de una membrana semipermeable dando lugar a una liberación de electrones durante el proceso. El producto final de estas reacciones son el agua, por ello el uso de estos dispositivos no generan problemas para el medio ambiente. El problema que aparece durante el uso de celdas de combustible son su tamaño, pues en la actualidad su uso está limitado a cuerpos grandes como por ejemplo camiones. Sin embargo, se encuentra en ejecución un conjunto de trabajos de investigación los mismos que en un futuro no muy lejano estas celdas serán utilizadas a escala industrial.

El almacenamiento de energía eléctrica en forma mecánica se logra mediante el uso de capacitores (condensadores), dispositivos que almacenan energía eléctrica sin la necesidad de la presencia de reacciones químicas ácidas o básicas. Un condensador se compone de dos conductores colocados uno cerca del otro pero sin tocarse. Cuando estos conductores son cargados con cargas de signo opuesto, aparecen fuerzas electrostáticas que les permite mantener una diferencia de potencial entre ellos. Por ello cuando estos conductores son conectados a través de un circuito, los electrones fluye del conductor cargado negativamente hacia el conductor cargado positivamente manteniéndose siempre dicha diferencia de potencial.

Los condensadores en la actualidad se constituyen en uno de los elementos más importantes de los circuitos modernos. Es así que el equipo que está utilizando para leer o imprimir este archivo contiene millones de ellos los mismos que realizan diferentes tareas requeridas. En éste capítulo desarrollaremos un conjunto de ideas sobre capacitancia, condensadores con y sin dieléctrico así como se hará un estudio detallado del almacenamiento de la energía por estos dispositivos tratando de darle la importancia correspondiente en el uso en la electrónica para diseñar nuevos circuitos y en especial su aplicación en la vida cotidiana.

5.2. CAPACITANCIA Y CAPACITORES.

5.2.1 CAPACITANCIA

Consideremos un conductor inicialmente descargado como se muestra en la figura 5.1a, entonces en ausencia de carga su potencial es nulo ($V = 0$). Si ahora colocamos una carga q en el conductor ella se distribuirá en su superficie como se muestra en la figura 5.1b y como tal el potencial fuera y dentro del conductor ya no es nulo, más aún este potencial será proporcional a la carga ($V \propto q$). Es decir

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma(r)dA}{r^2} \quad (5.1)$$

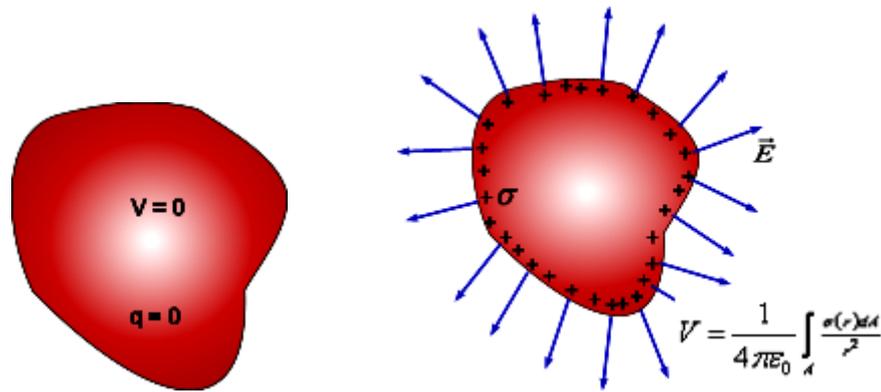


Figura 5.1 (a) Conductor descargado, (b) Conductor cargado, aquí la carga se distribuye en la superficie por tanto el campo en el interior es nulo, mientras que el potencial en el interior es constante mientras que en el exterior depende de la distancia al conductor

La *capacitancia eléctrica* (C) es una propiedad física de un conductor que expresa la habilidad de un conductor para adquirir carga sin un cambio sustancial en su potencial. Matemáticamente se expresa como el cociente entre la carga y el potencial. Esto es

$$C = \frac{q}{V} \quad (5.2)$$

Es evidente entonces que si añadimos una constante arbitraria al potencial es necesario conocer un punto de referencia global en el cual el potencial siempre es cero. Con el objetivo de encontrar un cuerpo físico que podría desempeñar como punto de referencia consideremos como ejemplo una esfera conductora de radio R. Si la esfera es cargada con una carga q, su potencial es $V = kq/R$ y su capacitancia es

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{q/4\pi\epsilon_0 R} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (5.3)$$

Así pues, una esfera con radio muy grande tendrá una gran capacidad y su potencial podría ser siempre el mismo. Esta es la razón por la cual consideramos a la *tierra* como un punto de referencia de potencial cero. En lo que sigue consideraremos que cuando un cuerpo es conectado a tierra su potencial es nulo.

Con esto hemos calculado la capacitancia de un conductor esférico la misma que es $C = R/k$. Sin embargo el cálculo de la capacitancia para formas más complejas es muy complicado, ello requiere la determinación de la distribución del campo eléctrico alrededor del cuerpo conductor, un problema el cual puede ser resuelto analíticamente solo en un número limitado de casos. Por lo tanto, normalmente se hace numéricamente o analíticamente.

En cualquier caso, si conocemos la capacitancia C de un conductor dado, la carga q puede encontrarse a partir de su potencial, es decir $q = CV$. Alternativamente podemos calcular el potencial a partir de la carga mediante la ecuación $V = Pq$, donde $P = 1/C$ es el llamado *coeficiente de potencial*. Supongamos ahora que traemos otro conductor a una región cercana al primero. El segundo conductor distorsiona el campo eléctrico de tal manera que el potencial en el primero en general cambia. Por otro lado, el segundo conductor adquiere un potencial inducido. Así los conductores se afectan entre sí cambiando sus potenciales aun cuando la carga permanece constante de tal manera que no podemos escribir la ecuación $V_i = P_i q_i$ para cada conductor por separado pero si debe tenerse en cuenta la influencia de uno sobre otro, escribiendo la ecuación para el potencial

$$V_i = \sum_j P_{ij} q_j \quad (5.4)$$

$$q_i = \sum_j C_{ij} V_j \quad (5.5)$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

5.2.2 CAPACITOR

El capacitor o condensador es un dispositivo eléctrico formado esencialmente por dos conductores llamadas placas del condensador aisladas y separadas por el medio vacío o por un dieléctrico. Sobre las placas se distribuyen cargas iguales y opuestas +q y -q tal como se muestra en la figura 5.2.

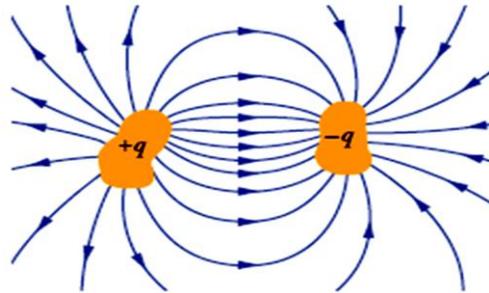


Figura 5.2 Capacitor formado dos conductores (placas del capacitor)

Asumiendo que el potencial en el conductor cargado positivamente es V_+ y que el potencial en el conductor cargado negativamente es V_- . Entonces de la ecuación (5.4) se tiene

$$V_+ = (P_{11} - P_{12})q \quad (5.7)$$

$$V_- = (P_{21} - P_{22})q \quad (5.8)$$

La diferencia de potencial entre las placas es

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_+ - V_- = (P_{11} - P_{12})q - (P_{21} - P_{22})q \\ \Delta V &= (P_{11} + P_{22} - P_{12} - P_{21})q = \frac{q}{C} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Donde ΔV , es la diferencia de potencial y C es la capacitancia del condensador. La capacitancia del condensador también puede escribirse.

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 \oint_A \vec{E} \cdot \vec{n} dA}{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}} \quad (5.10)$$

Debe observarse que aunque la ecuación (5.10) contiene a la carga q y a la diferencia de potencial ΔV , la capacitancia de un condensador es independiente de la carga así como de la diferencia de potencial y como tal del campo eléctrico y sólo depende de:

- La disposición geométrica de los conductores, que incluye el tamaño, la forma y el espaciamiento de las placas o armaduras del condensador, al igual que sus relaciones geométricas.
- Las propiedades del medio en el cual se encuentran ubicados los conductores (aire, vacío, material dieléctrico, etc.)

A la unidad de capacitancia (*culombio/voltio*), se le llama *faradio*, unidad de capacidad demasiado grande por lo que para propósitos prácticos se utiliza el *microfaradio* ($1 \mu F = 10^{-6} F$); el *nanofaradio* ($1 nF = 10^{-9} F$) y el *picofaradio* ($1 pF = 10^{-12} F$).

5.3 APLICACIONES DE LOS CONDENSADORES

Una de las principales funciones de un condensador es el almacenamiento de carga, en la que la capacidad indica cuanta carga puede almacenar entre sus armadura para una diferencia de potencial dada. Otra de las funciones es el almacenamiento de energía potencial eléctrica dentro de sus campos eléctricos correspondientes. Los condensadores también son utilizados para producir ciertas configuraciones de campos eléctricos (campo eléctrico uniforme entre placas conductoras paralelas). Finalmente su uso más frecuente es en la electrónica, donde por ejemplo al acoplarse con resistores retardan los cambios en el voltaje, como rectificadores de corriente alterna, amplificadores de voltaje, formando circuitos resonantes. Algunas de estas aplicaciones serán discutidas en capítulos posteriores. En la figura 5-3, se muestra algunas de las aplicaciones prácticas de los capacitores



Figura 5.3. (a) Capacitores usados en los Flash de cámaras; (b) capacitores usados en la construcción de desfibriladores

5.4 TIPOS DE CONDENSADORES

Los capacitores se fabrican en varias combinaciones de conductores y dieléctricos. La familias de condensadores se basan en general en el tipo de dieléctrico empleado tales como mica, cerámica, papel o aceite. En la figura 5.4, se muestra un conjunto de estos condensadores, los mismos que se describen posteriormente

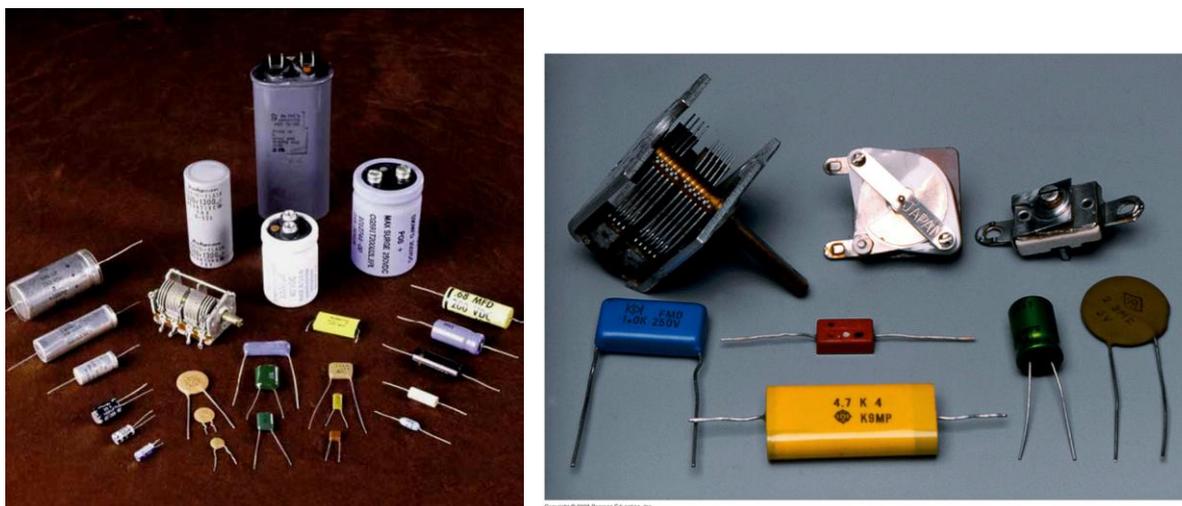


Figura 5.4 Diversos tipos de condensadores utilizados en la industria

5.4.1 Capacitores de mica

La mica es un mineral transparente con alta fuerza dieléctrica que fácilmente se separa en hojas uniformes cuyo espesor puede ser tan bajo como 0,0001 pulgadas, tiene un alto voltaje de ruptura y químicamente es casi inerte. Por ello es que se usa este material para fabricar condensadores, los mismos que pueden adoptar formas redondas, rectangulares o irregulares, intercalando capas de hoja metálica y de mica. La pila resultante se hojas de metal y mica se sujeta firmemente y se encapsula en un paquete de plástico. Las capacidades disponibles van desde 1 pF hasta 0,1 μF. En la figura 5.5 se muestra algunos condensadores y la forma como se ensamblan

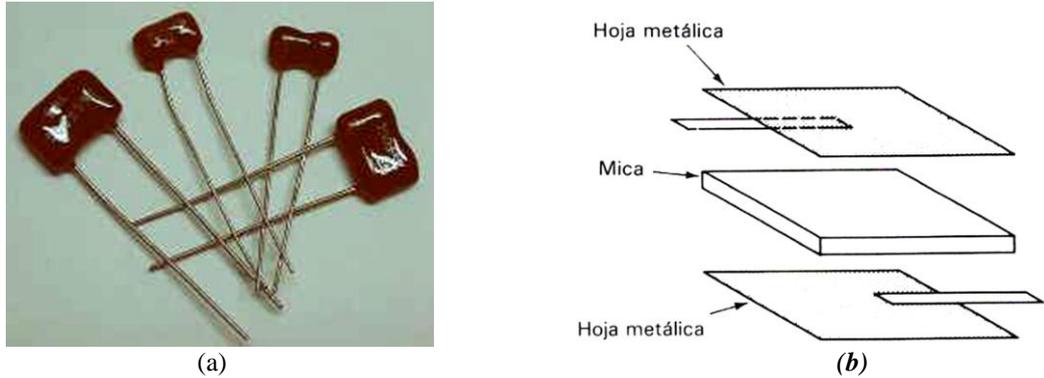


Figura 5.5 (a) capacitores de mica; (b) ensamblaje de capacitores de mica

5.4.1 Capacitores de cerámica

Comercialmente existen dos tipos de condensadores de cerámica: (a) de baja pérdida y baja constante dieléctrica y (b) de alta constante dieléctrica. Los capacitores de baja pérdida se usan principalmente en aplicaciones de alta frecuencia, mientras que los de alta constante dieléctrica permiten un valor grande de la capacidad en un volumen pequeño son aplicados en circuitos de baja frecuencia. Sin embargo, el valor de su capacidad puede variar mucho con la variación de la temperatura, voltaje de CD y frecuencia. Las capacitancias de los capacitores de alto κ van de 100 pF a 0,1 pF. Para fabricar los capacitores de cerámica se emplea una construcción en la cual un disco o placa de cerámica se cubre con metal en ambas carga. Se fijan las terminales al metal y el capacitor resultante se empaca en un cubierta de plástico para protegerlo de la humedad y demás condiciones de trabajo. Los capacitores de cerámica no requieren polaridad especial en el voltaje. En la figura 5.6 se muestra algunos condensadores y la forma como se ensambla

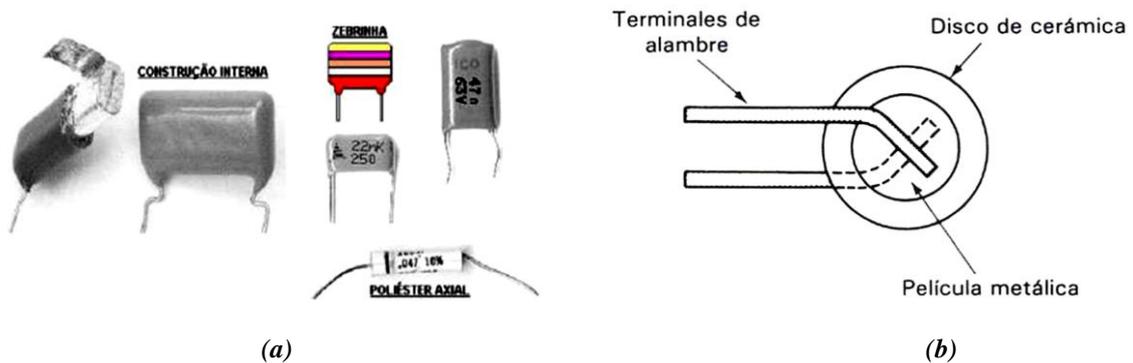


Figura 5.6 (a) capacitores de cerámica; (b) ensamblaje de capacitores de cerámica

5.4.2 Capacitores de papel

Son los más usados debido a su bajo costo y al hecho de que se pueden construir en un amplio margen de valores de capacidad (500 pF hasta 50 pF). Además se pueden diseñar para resistir voltajes muy altos. Es usual imprimir el valor de la capacidad y el voltaje en el cuerpo del capacitor. Para unidades pequeñas se usa una clave de colores. Cuando no se emplea esa clave se imprime una banda negra en el tubo, en el extremo más cercano a la terminal que está conectada a la hoja metálica exterior. Esta terminal debe conectarse siempre con la terminal del circuito que tiene menor potencial. Muchos de los capacitores de papel

tienen la forma cilíndrica porque se fabrican enrollando una serie de capas de metal y hojas de papel impregnado para formar un tubo. La disposición se envuelve en plástico para conservarlo. En la figura 5.7 se muestra algunos condensadores de este tipo



Figura 5.7 (a) capacitores de papel; (b) ensamblaje de capacitores de papel

5.4.3 Capacitores de película plástica

Se construyen básicamente del mismo modo que los capacitores de papel, con la excepción de que aquí se emplea como dieléctrico hojas delgadas de plástico (mylar, teflón, o polietileno). Este dieléctrico mejora las propiedades del capacitor. Sus demás características son semejantes a las de los condensadores de papel. Sin embargo el costo es mayor. Los capacitores comerciales de película plástica se fabrican en rangos que van de 500 pF a 1 μF. En la figura 5.8, se muestra algunos condensadores de este tipo y la forma como se les ensambla.

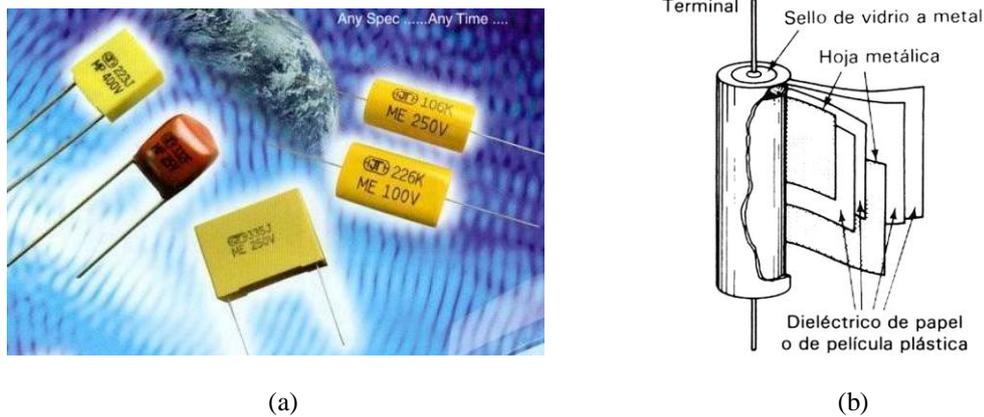


Figura 5.8 (a) capacitores de película plástica; (b) ensamblaje de capacitores de película plástica

5.4.4 Capacitores electrolíticos

Se fabrican generalmente de aluminio o de tantalio. La estructura básica del de aluminio consiste de dos hojas de este material, una de las cuales está cubierta con una membrana extremadamente delgada de óxido. Se hace crecer la capa de óxido sobre el metal mediante un proceso de aplicación de voltajes al capacitor denominado proceso de formación. Entre las hojas se coloca una sustancia electrolítica que empapa al papel. El electrolito es conductor y sirve como extensión de la hoja no oxidada de metal. Debido a que el fluido es conductor se puede conectar directamente contra el dieléctrico de oxido. Las dos placas cargadas con signos opuestos quedan separadas por sólo una película de óxido el cual tiene una constante dieléctrica muy alta. Una vez formado el óxido se enrollan las hojas en forma de tubo y la hoja sin óxido se conecta con el empaque externo. Esta terminal sirve como conexión negativa del capacitor, la otra se marca con el signo + en el cuerpo del capacitor.

Debe enfatizarse que el capacitor electrolítico solo se puede conectar en un circuito con polaridad correcta. Si se conecta la terminal positiva del capacitor con la terminal negativa del circuito la acción química del electrolito romperá el dieléctrico de óxido y destruirá al capacitor. Además como sucede en otros capacitores no debe sobre pasarse el voltaje nominal. Las capacidades d estos condensadores van desde 1 μF hasta 500000 μF

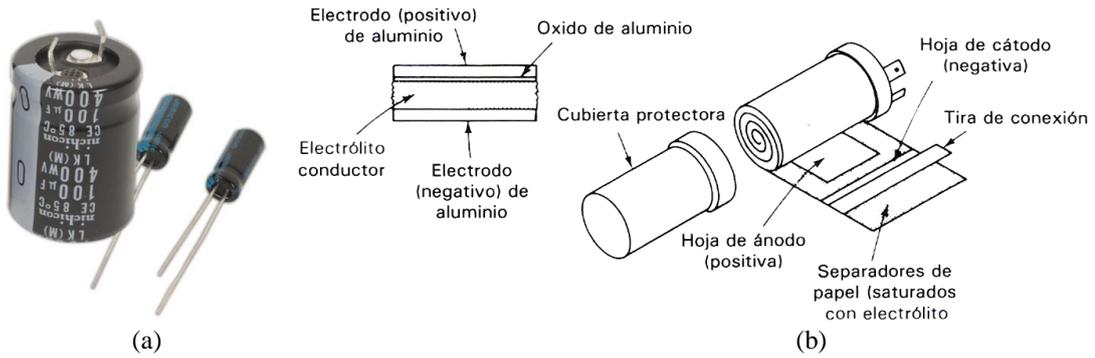


Figura 5.9 (a) capacitores electrolíticos; (b) ensamblaje de capacitores electrolíticos

5.4.5 Capacitores variables

Al igual que con las resistencias a veces es necesario poder variar la capacidad de un capacitor mientras permanece conectado a u circuito. El capacitor variable de aire es un tipo común de capacitor variable. Se fabrica montando un conjunto de placas metálicas (generalmente aluminio) sobre un eje e intercalando entre un conjunto de placas fijas de forma similar. Debido a que el dieléctrico es el aire, la separación entre placas se debe mantener lo suficientemente grande para asegurarse que no se toquen y se descarguen. En la figura se muestra uno de estos tipos de condensadores

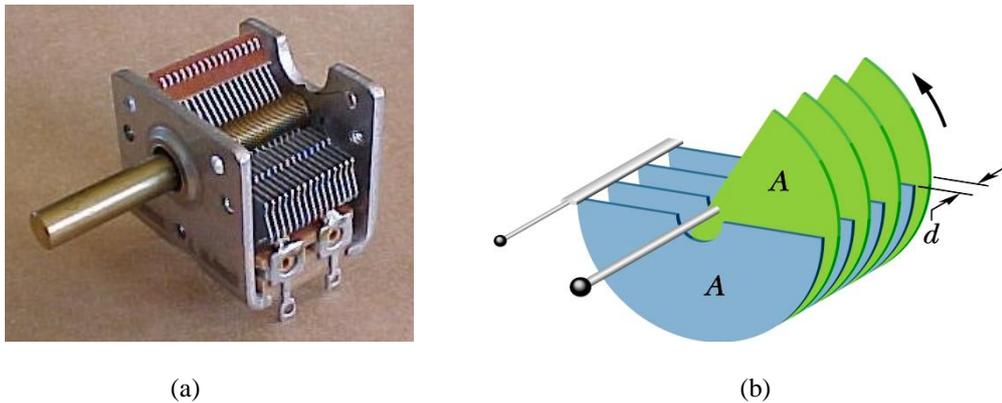


Figura 5.10 (a) capacitor variable; (b) esquema de capacitores variables

5.5 SEGURIDAD CON LOS CAPACITORES

Un capacitor cargado almacena energía. Si el capacitor tiene un valor grande de capacitancia y está cargado con alto voltaje la cantidad de energía almacenada puede ser bastante grande. Durante la descarga la energía se libera por la corriente que pasa por la conexión entre las placas. Si esa descarga ocurre en forma accidental a través de un ser humano el choque eléctrico que se provoca puede ser molesto y doloroso o incluso mortal. Debido a que un condensador descargado no se distingue de uno cargado representa u peligro oculto para la seguridad. Esto significa que si un capacitor se carga durante su uso, se debe descargar antes de manipularlo o volverlo a guardar en su lugar. Por ello se recomienda que siempre se debe descargar este elemento conectándolo con una resistencia

5.6 CALCULO DE CAPACITANCIAS.

En esta sección se determinará la capacitancia de un conjunto de capacitores

5.6.1 Capacitor de placas paralelas

Un capacitor de placa paralelas es aquel dispositivo que está formado por dos placas paralelas conductoras de área A separadas por una distancia muy pequeña d comparada con las demás dimensiones y que llevan cargas

+q y -q en la superficie como se muestra en la figura 5.11a. Debemos observar además que la distribución del campo eléctrico es de la forma mostrada en la figura 5.11b

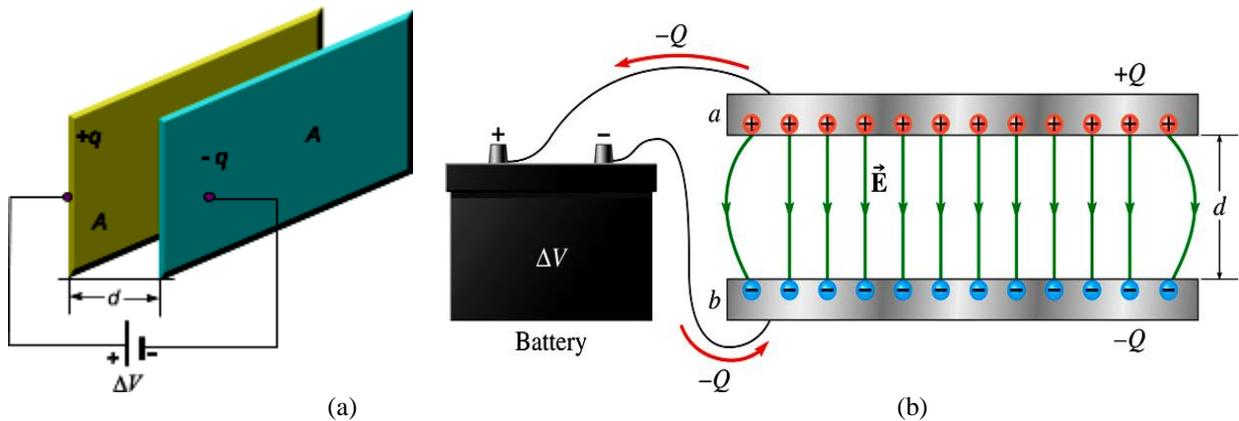


Figura 5.11 (a) capacitor de placas planas; (b) campo eléctrico en el interior de un capacitor plano

Para determina la capacidad C, primero se necesita conocer el campo eléctrico entre las placas. Para ello consideremos un capacitor real de tamaño finito de tal manera que podemos considerar al campo el interior uniforme y sólo se distorsiona en los bordes como se muestra en la figura 5.11b, en donde las líneas de fuerza no son rectas. Esto es conocido como efecto de borde. Sin embargo, en lo que sigue se ignora esos efectos y para calcular C asumimos una situación ideal, considerando que las líneas de fuerza entre las placas son líneas rectas. En el límite cuando las placas son infinitamente grandes, el sistema tiene simetría plana y podemos calcular el campo eléctrico entre las placas utilizando la ley de Gauss.

Aplicando la ley de gauss a la superficie gaussiana línea ininterrumpida se tiene

$$\oint_A \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\int_{A_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dA + \int_{A_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dA + \int_{A_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 dA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$0 + 0 + EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i}$$

La diferencia de potencial entre las placas es

$$V_- - V_+ = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E(s_B - s_A) = -Ed$$

$$\Delta V = V_+ - V_- = Ed = \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) d$$

Donde σ , es la densidad de carga superficial de la placa positiva y d es la distancia entre placas

La capacidad del capacitor de placas planas será

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) d} = \frac{\sigma A}{\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) d}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \tag{5.11}$$

La ecuación (5.11) indica que la capacidad de un condensador plano depende solamente de los factores geométrico A y d y depende del medio en el cual se encuentran las placas ϵ_0 . Así mismo, se observa que la capacidad depende linealmente de A e inversamente de la distancia de separación.

5.6.2 Capacitor cilíndrico

Otra configuración de importancia es la mostrada en la figura 5.12a, la que constituye un *capacitor cilíndrico* el cual consta de un cilindro sólido de radio a sobre la que se distribuido uniformemente una carga $+q$ con una densidad de carga $+\lambda$, rodeado por una cáscara cilíndrica de radio interno b la cual lleva una carga uniformemente distribuido $-q$ con una densidad de carga por unidad de longitud $-\lambda$. Ambos cilindros tienen una longitud L

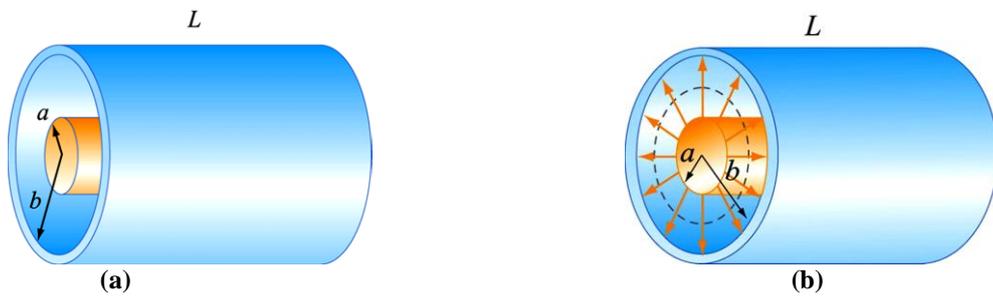


Figura 5.12 (a) capacitor cilíndrico; (b) campo eléctrico en el interior de un capacitor cilíndrico

Para determina la capacidad C del capacitor, primero se necesita conocer el campo eléctrico entre los cilindros coaxiales. Para ello consideremos un capacitor en el cual la distancia entre los cilindros es mucho menor que los radios de tal manera que podemos considerar al campo el interior dirigido radialmente como se muestra en la figura 5.12b. Despreciando el efecto en los extremos, en el límite cuando los conductores son infinitamente grandes, el sistema tiene simetría cilíndrica y podemos calcular el campo eléctrico entre las placas utilizando la ley de Gauss. En la figura 5.13 se muestra la aplicación de un capacitor cilíndrico

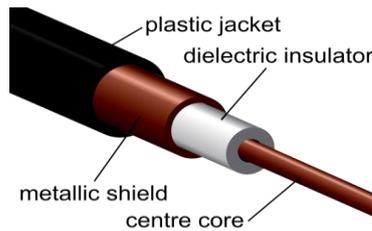


Figura 5.13 Aplicación de capacitores cilíndricos en las líneas de transmisión de señales

Aplicando la ley de gauss a la superficie gaussiana línea ininterrumpida se tiene

$$\oiint_A \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\int_{A_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dA + \int_{A_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dA + \int_{A_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 dA = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$0 + 0 + E(2\pi rL) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

La diferencia de potencial entre las placas es

$$V_- - V_+ = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_a^b \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Delta V = V_+ - V_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

La capacidad del capacitor de placas planas será

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a)} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a)} \tag{5.12}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

La ecuación (5.12) indica que la capacidad de un condensador cilíndrico depende solamente de los factores geométrico L y a y b y depende del medio en el cual se encuentran las placas ϵ_0 .

5.6.3 Capacitor esférico

Otra configuración de importancia es la mostrada en la figura 5.14a, la que constituye un *capacitor esférico* el cual consta de dos cascarones esféricos concéntricos de radios r_a y r_b sobre los que se ha distribuido cargas $+Q$ y $-Q$ en sus superficies con una densidad de carga $\pm\sigma$

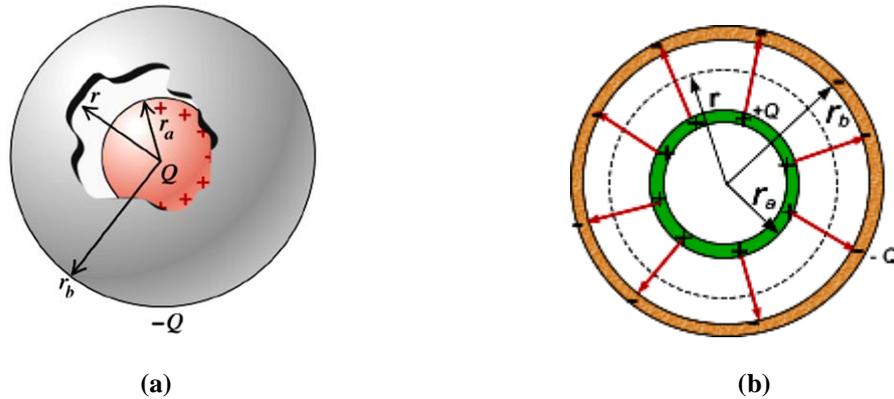


Figura 5.14 (a) capacitor esférico; (b) campo eléctrico en el interior de un capacitor esférico

Para determina la capacidad C del capacitor, primero se necesita conocer el campo eléctrico entre los cáscaras esféricas coaxiales. Para ello consideremos un capacitor en el cual la distancia entre las cáscaras esféricas es mucho menor que los radios de tal manera que podemos considerar al campo el interior dirigido radialmente como se muestra en la figura 2.6.3b. El sistema tiene simetría cilíndrica y podemos calcular el campo eléctrico entre los cascarones utilizando la ley de Gauss

Aplicando la ley de gauss a la superficie gaussiana línea ininterrumpida se tiene

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$EA_{SG} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\sigma(4\pi r_a^2)}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma r_a^2}{\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

La diferencia de potencial entre las placas es

$$V_- - V_+ = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_a^b \frac{\sigma r_a^2}{\epsilon_0 r^2} dr$$

$$\Delta V = V_+ - V_- = \frac{\sigma r_a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

La capacidad del capacitor de placas planas será

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{\frac{\sigma r_a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_b} \right)} = \frac{\sigma(4\pi r_a^2)}{\frac{\sigma r_a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_b} \right)} \quad (5.13)$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0(r_b r_a)}{r_b - r_a}$$

La ecuación (5.13), indica que la capacidad de un condensador cilíndrico depende solamente de los factores geométricos vía los radios de los conductores y depende del medio en el cual se encuentran las placas, ϵ_0 .

Un conductor aislado (con el segundo conductor en el infinito) también tiene una capacitancia- Es decir en el límite donde $r_b \rightarrow \infty$, la ecuación (5.13) se escribe.

$$\lim_{r_b \rightarrow \infty} C = \lim_{r_b \rightarrow \infty} \left[4\pi\epsilon_0 \left(\frac{r_a r_b}{r_b - r_a} \right) \right] = \lim_{r_b \rightarrow \infty} \left[4\pi\epsilon_0 \left(\frac{r_a}{1 - \frac{r_a}{r_b}} \right) \right] = 4\pi\epsilon_0 r_a$$

Así, para un conductor esférico aislado de radio R, la capacitancia es

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

5.7 CAPACITORES EN CIRCUITOS ELÉCTRICOS.

Es sabido que un capacitor es un dispositivo que se utiliza para almacenar carga en sus placas y como tal almacenar energía en el campo eléctrico producido entre ellas. Esta energía almacenada puede ser utilizada posteriormente para hacer funcionar otros dispositivos eléctricos y electrónicos. Para lograr este objetivo es necesario proceder a cargar el condensador, para ello se conecta las placas del capacitor a las terminales de una batería tal como se muestra en la figura 5.15. Es la batería la encargada de mantener la diferencia de potencial ΔV . Al hacer la conexión habrá un reparto de carga entre las terminales y las placas. Por ejemplo, la placa que es conectada a la terminal positiva de la batería adquiere alguna carga positiva mientras que la placa conectada a la terminal negativa adquiere alguna carga negativa, la cantidad de carga acumulada en las placas depende de la capacidad del capacitor. El reparto de carga ocasiona una disminución momentánea de cargas en las terminales de la batería y como tal una disminución en el voltaje en las terminales. Para mantenerse dicha diferencia de potencial ocurren reacciones químicas en el interior de la batería con la finalidad de compensar la "pérdida" de carga

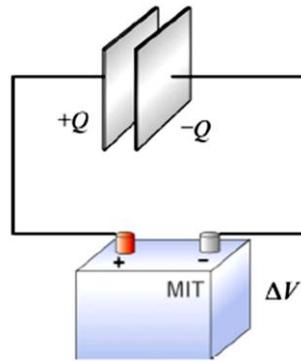


Figura 5.15 Condensador plano conectado a una batería

En la práctica no utilizamos un sólo capacitor sino más bien un conjunto de capacitores, los mismos que son conectados en diversas formas por varias razones algunas de ellas son: *requerimiento del esquema, flexibilidad y control, o ajuste debido a las limitaciones técnicas*. En muchos casos estamos interesados en conocer cuáles son los voltajes y las cargas sobre cada uno de los capacitores si algún voltaje externo conocido ha sido aplicado al sistema completo. Alternativamente, puede requerirse la sustitución de del sistema completo por un sólo capacitor efectivo cuya capacidad puede ser encontrada. Esta tarea es extremadamente fácil y requiere solamente algún trabajo técnico de rutina (el cual algunas veces puede ser algo difícil si un sistema de condensadores es complicado) y no requiere de cualquier arte o idea nueva. Para esto debemos tomar en cuenta las ideas siguientes:

- Todas las placas conectadas mediante un alambre conductor están al mismo potencial. Este es un caso especial de conclusiones anteriores de que todos los puntos de un conductor tienen el mismo potencial.
- Las placas no conectadas a alguna fuente externa no pueden ganar o perder carga, esto es, la suma de las cargas sobre las placas las cuales son conectadas solamente una con otra permanece constante. Esta idea no es más sino la ley de conservación de carga.
- Solamente puede existir intercambio de carga entre aquellas placas que son conectadas a una fuente de voltaje externa. Sin embargo, la carga total sobre todas las placas, positiva y negativamente cargadas, es siempre cero.
- La diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito no depende de la trayectoria seguida.

5.7.1 Capacitores en serie.

Supongamos que tenemos tres capacitores inicialmente descargados C_1 , C_2 y C_3 los mismos que se conectan en serie, como se muestra en la figura 5.16. Si ahora se aplica al sistema una diferencia de potencial ΔV a los extremos de los capacitores, conectando la placa izquierda del capacitor C_1 a la terminal positiva de la batería (fuente de tensión) dicha placa entonces es cargada positivamente con una carga $+Q$, mientras que la placa derecha del capacitor C_3 es conectada a la terminal negativa de la batería (fuente de tensión) llegando a cargarse con una carga negativa $-Q$ debido a que los electrones fluyen hacia ella. Por otro lado, las placas interiores inicialmente descargadas ahora se cargan por inducción electrostática atrayendo cargas iguales y opuestas tal que la placa derecha del condensador C_1 se carga negativamente, la placa izquierda de C_2 se carga positivamente, la placa derecha de C_2 se carga negativamente y la placa izquierda de C_3 se carga positivamente adquiriendo cargas como se muestra en la figura.

La diferencia de potencial en cada uno de los condensadores será

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1}; \quad \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}; \quad \text{y} \quad \Delta V_3 = \frac{Q}{C_3} \quad (5.14)$$

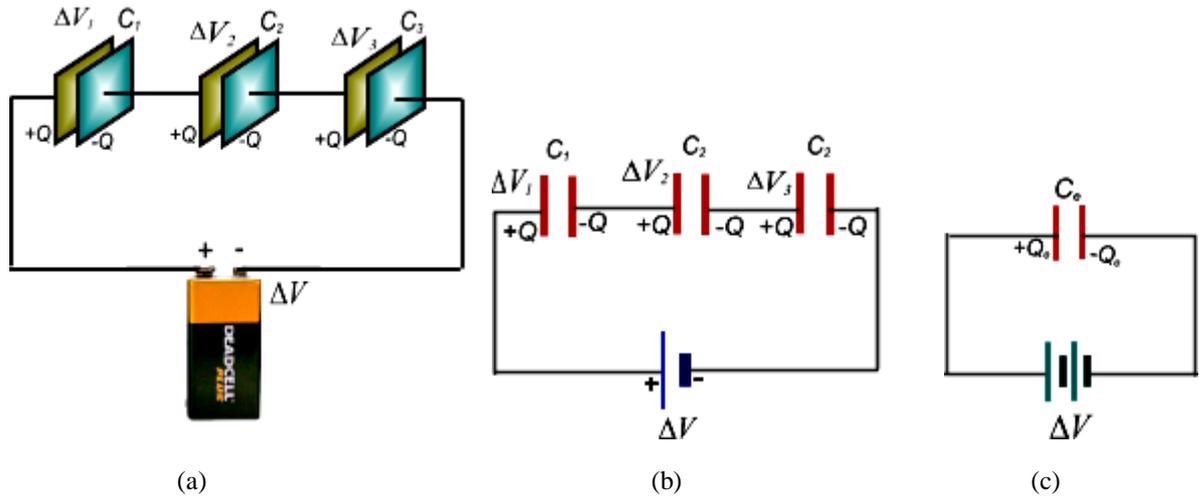


Figura 5.16 (a) capacitores en serie conectados a una batería; (b) representación de los capacitores en el lenguaje de circuitos y (c) condensador equivalente

Por otro lado de la figura observamos que la diferencia de potencial entre los extremos del sistema de tres capacitores en serie, es igual a la suma de las diferencias de potencial en cada uno de los tres capacitores, esto es.

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \quad (5.15)$$

Es decir, la suma diferencia de potencial entre los extremos de un sistema de condensadores en serie es igual a la suma de las diferencias de potencial de cada uno de los capacitores conectados. Por tanto estos tres condensadores pueden ser remplazados por un capacitor equivalente C_e que cumpla con $C_e = Q/\Delta V$. Esta capacidad se obtiene remplazando la ecuación (5.14) en la ecuación (5.15), es decir

$$\frac{Q}{C_e} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}$$

De donde se obtiene la capacidad equivalente de los tres capacitores, la misma que está dada por

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (5.16)$$

La ecuación (5.16) puede generalizarse para un sistema compuesto por N capacitores conectados en serie, obteniéndose la ecuación para la capacidad equivalente en esta caso como:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_i} + \dots + \frac{1}{C_N}$$

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad (5.17)$$

5.7.2 Capacitores en paralelo.

En la figura 5.17 se muestra la conexión de tres condensadores cuyas capacidades son C_1 , C_2 y C_3 conectados en paralelo, es decir las placas izquierdas de todos los condensadores son conectadas a la terminal positiva, entonces estarán al mismo potencial que la terminal positiva V_+ , mientras que sus placas derechas a la terminal negativa de la batería por lo tanto estarán al mismo potencial que la terminal negativa V . Por lo tanto los tres condensadores tendrán la misma diferencia de potencial e igual a la diferencia de potencial en el condensador equivalente. Es decir

$$V = \Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V_3 \quad (5.18)$$

La capacidad de cada uno de los condensadores será

$$C_1 = \frac{Q_1}{\Delta V}; \quad C_2 = \frac{Q_2}{\Delta V}; \quad \text{y} \quad C_3 = \frac{Q_3}{\Delta V} \quad (5.19)$$

Por otro lado, la carga total positiva Q sobre el sistema de tres condensadores es la suma de las cargas individuales. Esto es

$$Q_e = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (5.20)$$

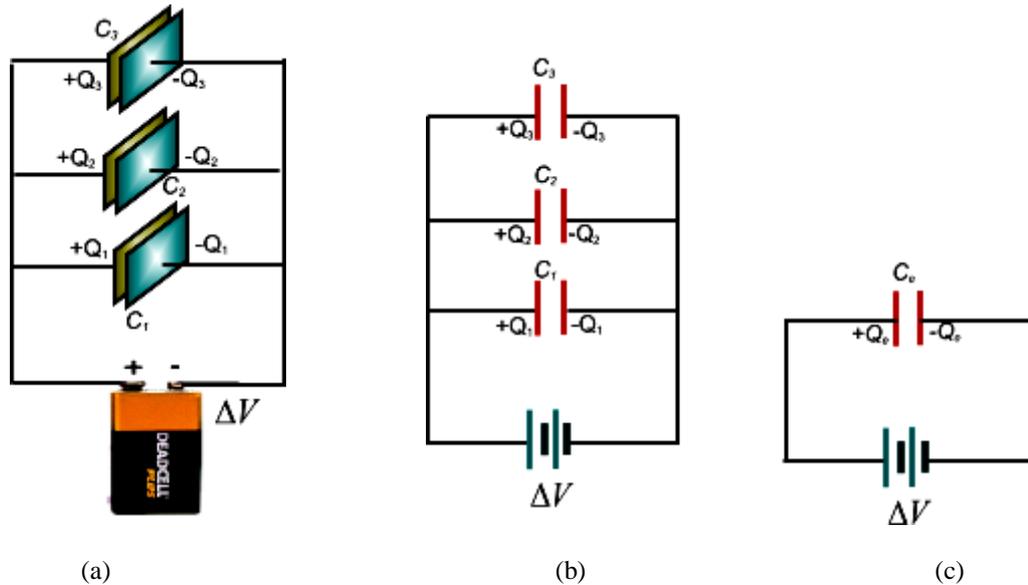


Figura 5.17 (a) capacitores en paralelo conectados a una batería; (b) representación de los capacitores en el lenguaje de circuitos y (c) condensador equivalente

Al remplazar la ecuación (5.19) en la ecuación (5.20), se tiene

$$Q = C_1\Delta V + C_2\Delta V + C_3\Delta V = (C_1 + C_2 + C_3)\Delta V$$

$$C_e = \frac{Q}{\Delta V} = C_1 + C_2 + C_3 \quad (5.21)$$

Si ahora se tiene un sistema de N capacitores conectados en paralelo, entonces la capacidad equivalente no es más sino la suma de las capacidades de cada uno de los capacitores que componen el sistema

$$C_e = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_i + \dots + C_N$$

$$C_e = \sum_{i=1}^N C_i \quad (5.22)$$

5.7.3 Conexión mixta

En la figura 5.18, se muestra un circuito capacitivo con varios capacitores conectados a una fuente de tensión que le proporciona una diferencia de potencial ΔV . Es nuestro objetivo, determinar la capacitancia equivalente del circuito

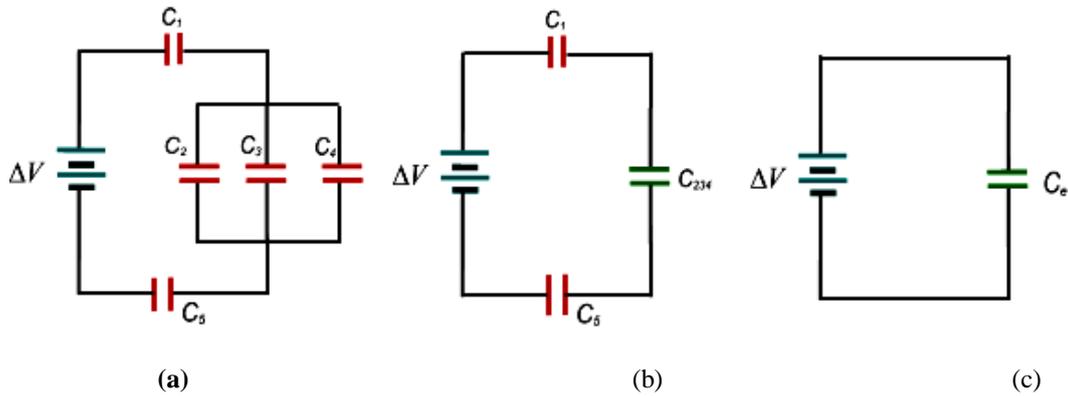


Figura 5.18 (a) conexión mixta de capacitores; (b) reducción de los capacitores en paralelo y (c) condensador equivalente

De esta se observa que los condensadores cuyas capacidades son C_2 , C_3 y C_4 están en paralelo, entonces su capacidad equivalente C_{234} es

$$C_{234} = C_2 + C_3 + C_4$$

El nuevo circuito queda como el mostrado en la figura (b). Ahora se observa que los capacitores C_1 , C_{234} y C_5 se encuentran en serie y como tal su capacidad equivalente es la mostrada en la figura (c) y su capacitancia está dada por

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{234}} + \frac{1}{C_5} = \frac{C_5 C_{234} + C_1 C_5 + C_1 C_{234}}{C_1 C_{234} C_5} = \frac{C_1 C_5 + (C_1 + C_5)(C_{234})}{C_1 C_{234} C_5}$$

$$C_e = \frac{C_1 C_5 (C_2 + C_3 + C_4)}{C_1 C_5 + (C_1 + C_5)(C_2 + C_3 + C_4)}$$

5.7.4 Capacitores conectados en Puento de Wheatstone

En la figura 5.19 se muestra un sistema de condensadores en red en puente. En esta conexión los capacitores no están conectados ni en serie ni en paralelo y para determinar la capacitancia equivalente entre los puntos a y d se utiliza la transformación *triángulo-estrella*.

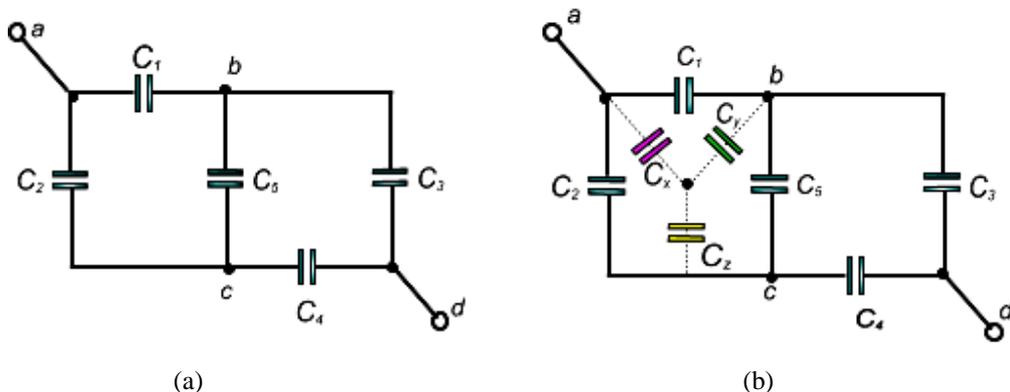


Figura 5.19 (a) Red de capacitores en puente de Whetastone; (b) reducción de capacitores de triángulo a estrella.

Los condensadores C_1 , C_2 y C_5 son remplazados por los capacitores C_x , C_y y C_z , cuyas capacidades se determina a partir de las ecuaciones

$$\frac{1}{C_x} = \frac{\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{C_2} \right)}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_5}} = \frac{C_5}{C_1 C_2 + C_1 C_5 + C_2 C_5} \tag{5.23}$$

$$\frac{1}{C_y} = \frac{\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{C_5} \right)}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_5}} = \frac{C_2}{C_1 C_2 + C_1 C_5 + C_2 C_5} \tag{5.24}$$

$$\frac{1}{C_z} = \frac{\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{C_5} \right)}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_5}} = \frac{C_1}{C_1 C_2 + C_1 C_5 + C_2 C_5} \tag{5.25}$$

Ahora el circuito se reduce al mostrado en la figura 520

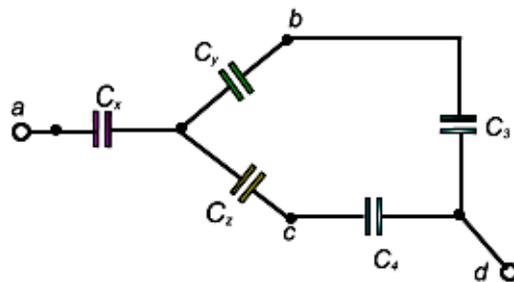


Figura 5.20 Circuito de capacitores después de la reducción triángulo estrella

El circuito capacitivo ahora se puede reducir mediante el sistema serie paralelo ;*Intente terminar la tarea!*

5.8 ENERGÍA ALMACENADA EN UN CAPACITOR.

En las secciones precedentes, definimos la *Capacitancia* y describimos y analizamos varios tipos de capacitores. Es fácil comprender que todo capacitor cargado contiene una cierta cantidad de energía. Por ejemplo, en un capacitor de placas paralelas, las armaduras se atraen mutuamente entre sí. Si mediante algún medio impedimos que se muevan, ellas ejecutarán una cierta cantidad de trabajo. Esto indica que para que un sistema realice trabajo es necesario que contengan cierta cantidad de energía. Debido a que las placas del capacitor no experimentan atracción mutua cuando están descargadas, para que haya atracción alguna energía debería ser almacenada en el capacitor cargado. En otras palabras, cuando un capacitor está cargándose mediante una batería (o fuente de tensión), el trabajo es realizado por la batería para mover la carga desde una placa del capacitor a la otra placa. Debido a que el capacitor está siendo cargado, decimos que el capacitor se encuentra almacenando energía en forma de energía potencial electrostática, energía que posteriormente puede ser liberada cuando se descarga el capacitor.

Para comprende el proceso consideremos un capacitor de placas planas paralelas *C* inicialmente descargado como se muestra en la figura 5.21a.

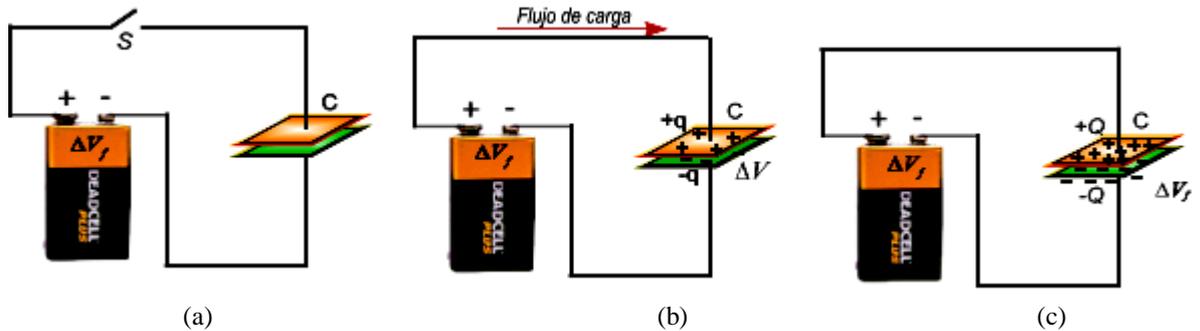


Figura 5.21 (a) capacitor descargado; (b) capacitor cargándose en un instante t y (c) condensador completamente cargado a una diferencia de potencial igual al de la fuente.

El capacitor es conectado a una batería, mediante el cierre del interruptor transfiere energía de una placa a la otra hasta que la diferencia de potencial en el capacitor sea igual producido por la fuente aunque de polaridades opuestas. Cuando se alcanza la etapa mostrada en la figura c se detiene el flujo de carga. En este instante se dice que el capacitor se ha cargado completamente a una diferencia de potencial ΔV_f y sus placas acumulan una carga $\pm Q$ (figura 5.21c)

En etapas intermedias como la mostrada en la figura 521b, la placa superior del capacitor tendrá una carga $+q$ y la otra una carga $-q$, siendo la diferencia de potencial en este instante

$$\Delta V = \frac{q}{C} \tag{5.26}$$

Para mover una cantidad de carga adicional dq desde una placa a la otra en un intervalo de tiempo dt , la batería debe hacer una cantidad de trabajo dW , dado por $dW = (dq)(\Delta V)$. Este trabajo corresponde a un cambio en la energía potencial eléctrica que es igual a dU_E . En consecuencia en el tiempo dt la energía potencial del capacitor ha aumentado en la cantidad

$$dU_E = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq \tag{5.27}$$

La diferencia de potencial entre las placas es variable de manera que la cantidad de trabajo realizado por la batería no solamente depende de dq sino también de la diferencia de potencial entre las placas ΔV , que cambia a medida que se acumula carga en el capacitor.

Para obtener la energía total almacenada en el capacitor se integra la ecuación (5.27), es decir

$$U_E = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q |\Delta V| = \frac{1}{2} C |\Delta V|^2 \tag{5.28}$$

5.8.1 Densidad de energía del campo eléctrico

Se ha determinado que los condensadores acumulan o almacena energía pues bien dicha energía es almacenada en el campo eléctrico entre las placas del condensador mismo. Para el caso de un capacitor de placas planas paralelas, cuya capacidad es $C = \epsilon_0 A/d$ y siendo su diferencia de potencial $\Delta V = Ed$, la energía potencial eléctrica puede expresarse

$$U_E = \frac{1}{2} C |\Delta V|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0 A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (Ad) \tag{5.29}$$

Debido a que la cantidad Ad , representa el volumen entre las placas, podemos definir a la densidad de energía μ_E como la energía por unidad de volumen, es decir

$$\mu_E = \frac{\text{Energía}}{\text{Volumen}} = \frac{U_E}{V} = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 (Ad)}{Ad}$$

$$\mu_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (5.30)$$

Aun cuando la ecuación (8.30) ha sido deducida para un capacitor de placas planas paralelas, dicha ecuación es aplicable a cualquier tipo de capacitor.

Ahora consideremos un condensador infinitesimal en el espacio comprendido entre las placas como se muestra en la figura 5.22.

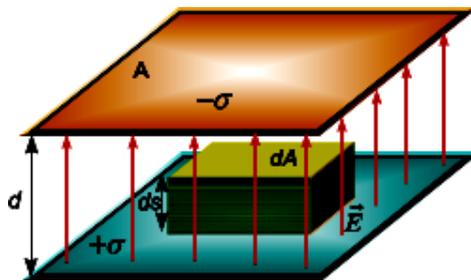


Figura 5.22 Capacitor infinitesimal utilizado para determinar la densidad de energía

Para encontrar la densidad de energía observe que el volumen del pequeño cubo es dV , el área de su sección transversal dA y su espesor ds . Debido a que ds es paralelo al campo eléctrico entre las placas, todo el flujo que sale del área dA de una superficie termina sobre el área correspondiente de la superficie opuesta. La energía potencial electrostática dU_E almacenada en este condensador infinitesimal ficticio es prácticamente la energía que se requiere para situar las cargas superficiales sobre el área dA de los dos conductores. Podemos en este caso considerar $A \rightarrow dA$; $d \rightarrow ds$, entonces la energía potencial será

$$dU_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 (dA)(ds) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dv_{vol}$$

$$\mu_E = \frac{dU_E}{dV} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (5.31)$$

Donde E es la intensidad de campo eléctrico en dicho punto.

A partir de la ecuación (5.31) se puede determinar la energía potencial electrostática total contenida en cualquier campo eléctrico, esto es

$$U_E = \int dU_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V E^2 dv_{vol} \quad (5.32)$$

La integral se evalúa extendiéndose a todo el espacio libre de cargas donde existe campo eléctrico; es decir, en todo el espacio exterior a las fuentes que producen el campo.

5.8.2 Fuerzas electrostáticas entre placas de un capacitor.

En el Capítulo I se inició la discusión electrostática con la ley de Coulomb para determinar fuerzas eléctricas entre dos cargas puntuales. Utilizando el principio de superposición podemos determinar la fuerza

eléctrica entre sistemas de cargas puntuales posteriormente se extiende hacia el cálculo de la fuerza eléctrica sobre cualquier cuerpo en un sistema donde conocemos la distribución de carga.

Como ejemplo, consideremos los dos cuerpos conductores cargados con una distribución de carga superficial como se muestra en la figura 5,23. Encontramos la expresión para la fuerza \vec{F}_{12} con la cual el cuerpo 1 actúa sobre el cuerpo 2. Para determinar esta fuerza, dividamos al cuerpo 2 en pequeños elementos diferenciales de carga de área dA_2 y determinemos la intensidad campo eléctrico \vec{E}_1 en todos los diferenciales debido a la carga del cuerpo 1. Esta fuerza está dada por

$$\vec{F}_{12} = \int_{A_2} \sigma_2 dA_2 \vec{E}_1 \tag{5.33}$$

Figura 5.23 Fuerza electrostática entre capacitores

En esta ecuación, el campo eléctrico \vec{E}_1 está dado por

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{A_1} \frac{\sigma_1 dA_1}{r_{12}^2} \vec{e}_{r_{12}} \tag{5.34}$$

5.8.3 Fuerza entre placas en un capacitor de placas paralelas

Debido a que las placas de dicho condensador plano se encuentran cargada con cargas del mismo signo +Q y -Q, respectivamente, estas placas se ejercerán un fuerza de tipo coulombiana. Dicha fuerza se determina en la siguiente forma

La capacidad del condensador separado una distancia x está dado por

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{Q}{\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)x} = \frac{Q\epsilon_0 A}{Q(x)}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{x} \tag{5.36}$$

La energía potencial será

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2\left(\frac{\epsilon_0 A}{x}\right)} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} x \tag{5.37}$$

La fuerza será

$$F = -\frac{\partial U_e}{\partial x} = -\frac{\partial\left(\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} x\right)}{\partial x} \Rightarrow F = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \tag{5.38}$$

5.9. DIELECTRICOS

De acuerdo con la teoría atómica, decimos que cada uno de los átomos que componen un sólido se encuentra fijo respecto a los otros átomos del mismo sólido. Sin embargo, esta afirmación es solo aproximadamente cierta, pues cada uno de los átomos puede vibrar respecto a una hipotética posición de equilibrio. Por esta razón sería mejor decir que cada uno de los átomos están confinados en un pequeño volumen. No obstante, a pesar de su vibración, los átomos y las moléculas de los sólidos se llaman *partículas fijas*. Y aquellas partículas que pueden moverse a través del material se denominan *partículas libres*.

Si ahora se aplica una cierta cantidad de energía a una de las partículas componentes del material y no es posible extraerla de un determinado volumen, se dice que dicha partícula está *confinada a ese volumen* para la mencionada energía. De esta forma, llamamos *partícula fija o ligada* si el volumen en el cual se encuentra confinada es muy pequeño respecto al volumen considerado, que en general suele ser el volumen total del sólido. Si la partícula fija tiene carga eléctrica, se le denomina *carga fija o ligada*. Por el contrario si en el material existe una partícula libre cargada eléctricamente a ella se le denomina *carga libre*.

Entre los átomos de los cuerpos existen grandes espacios vacíos. El espacio entre los átomos del sólido puede asemejarse al vacío entre las estrellas en el universo. Análogamente a lo que ocurre con el giro de los planetas alrededor del sol, en el átomo los electrones giran alrededor del núcleo. Pero al aumentar la energía, algunos electrones de la última capa pueden abandonar el átomo al cual pertenecen y convertirse en electrones libres, los mismos que pueden moverse a través del sólido interactuando con los demás electrones e iones. Debemos recalcar que en los metales este abandono ocurre a veces sin aporte de energía, ya que incluso en el cero absoluto existen electrones libres.

En el caso molecular debemos señalar que las moléculas de los líquidos y gases son en general partículas libres, pues se mueven por todo el volumen del fluido. Si el fluido contiene partículas cargadas, podemos considerar a dichas partículas como cargas libres. Por ejemplo, una disolución acuosa de una sal, de un ácido o de una base, consta de moléculas neutras, e iones positivos y negativos. Estos iones son las cargas libres. En la atmósfera, junto a las moléculas neutras de oxígeno, nitrógeno, etc., siempre existen iones de éstos u otros cuerpos orientados por los rayos cósmicos, por tormentas o por otras causas, constituyendo entonces un conjunto de cargas libres.

Definición. Un *conductor* es caracterizado por presentar un volumen con cargas libres. En el caso de los metales estas cargas libres son *los electrones*. Mientras que en otras sustancias estas partículas libres pueden ser los iones y los electrones

Definición. Un *dieléctrico o aislante* es caracterizado por presentar un volumen sin cargas libres. En estos materiales los electrones permanecen ligados a los átomos o moléculas a los cuales ellos pertenecen. Podemos considerar dentro de estos materiales al vacío, al vidrio, la mica y ciertos plásticos cuyos enlaces químicos mantienen todos los electrones ligados a sus átomos.

El uso de los dieléctricos es muy amplio, en el caso de los capacitores dichos materiales son utilizados por ejemplo para mantener la separación física de las placas. Por otro lado, debido a que la ruptura dieléctrica de muchos de ellos es mucho menor que la del aire, permiten reducir al mínimo la fuga de carga, especialmente cuando se le aplica altos voltajes. Permitiendo de este modo una mayor acumulación de carga en las placas del capacitor

5.9.1 CAPACITORES CON UN DIELECTRICO ENTRE SUS PLACAS

Si se introduce un dieléctrico (vidrio, plástico, aceite mineral) entre las placas de un capacitor, la capacitancia de este nuevo condensador varía. Fue Faraday, quien utilizando un equipo sencillo, descubrió que la capacidad de un capacitor aumenta en un factor K a esta constante se le denomina *constante dieléctrica*. La presencia de un dieléctrico entre las placas cumple con las siguientes funciones:

- Permite mantener una distancia muy pequeña entre las placas sin que exista contacto físico,
- Permite aumentar la diferencia de potencial entre las placas del capacitor, aumentando de este modo la capacidad de almacenar cargas y energía.
- Permite aumentar la capacitancia de un capacitor es mayor cuando posee un medio dieléctrico entre sus placas que cuando el medio entre las placas es el vacío.

Este efecto se demuestra usando un *electrómetro* quien permite medir la diferencia de potencial entre las placas del capacitor. La figura 5.24a muestra un *electrómetro* conectado a las placas de un capacitor previamente cargado con cargas $\pm Q$ a una diferencia de potencial $\Delta V = V_0$. Al insertar un dieléctrico entre las placas (figura 5.24b) se observa que la diferencia de potencial disminuye a un valor $\Delta V = V$. Si ahora se retira el dieléctrico nuevamente se recupera el valor original V_0 , este hecho muestra que las cargas originales no han variado.

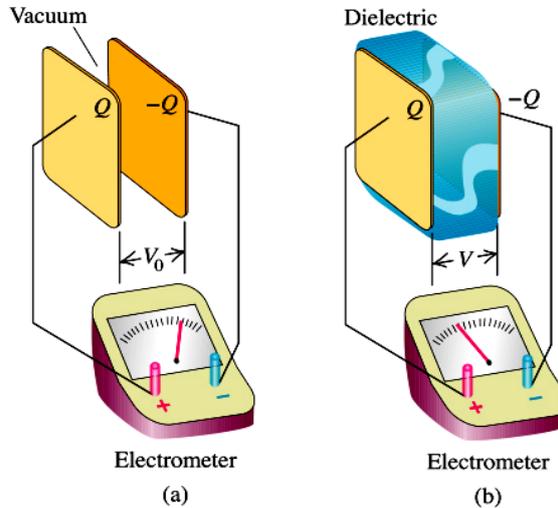


Figura 5.24 (a) Capacitor de placas planas cargado sin dieléctrico conectado a un electrómetro, (b) capacitor con dieléctrico conectado a un electrómetro

La capacitancia original C_0 está dado por $C_0 = Q/V_0$ y la capacidad con dieléctrico será $C = Q/V$. Debido a que la carga Q es la misma y la diferencia de potencial V es menor que V_0 . Esta experiencia muestra que la capacitancia C de un capacitor se incrementa cuando el espacio entre los conductores es llenado con un dieléctrico. Es decir, cuando un material dieléctrico es insertado completamente hasta llenar el espacio entre las placas, la capacidad se incrementa en

$$C = \kappa_e C_0 \tag{5.39}$$

Donde κ_e es la denominada constante dieléctrica. En la Tabla 5.1 se muestra las constantes dieléctricas de algunos de los materiales. De ella se observa que todos los materiales dieléctricos tienen $\kappa_e > 1$. Además, la tabla muestra la rigidez dieléctrica (valor máximo del campo eléctrico antes ocurra la ruptura dieléctrica)

Tabla 5.1 Valores de constantes y rigideces dieléctricas de algunos materiales

Material	Constante dieléctrica (κ_e)	Rigidez dieléctrica (kV/mm)
Vacío	1	
Aire (1 atm)	1,00059	3
Teflón	2,1	
Poliestireno	2,6	24
Papel	3,5	16
Pyrex	4,7	14
Mica	5,4	
Vidrio	5 - 10	
Agua (20°C)	80,4	

Cuando la carga es constante, $Q = C_0 V_0 = CV$, entonces $C/C_0 = V_0/V$. En este caso la ecuación (5.1) se escribe

$$V = \frac{V_0}{\kappa} \tag{5.40}$$

Es decir el voltaje entre las placas del capacitor disminuye en un factor $1/\kappa$.

5.9.2. MOLÉCULAS POLARES Y NO POLARES.

El hecho de que la capacidad se incrementa en presencia de un dieléctrico se puede explicar desde el punto de vista molecular. A continuación vamos a mostrar que la constante dieléctrica es una medida de la respuesta dieléctrica a un campo eléctrico externo. Es sabido que un dieléctrico está formado por moléculas eléctricamente neutras. Desde este punto de vista los dieléctricos pueden ser:

5.9.2.1 Polares

Aquellos que tienen momentos dipolares eléctricos permanentes o intrínsecos. Es decir, los centros de las cargas positivas y negativas poseen un desplazamiento relativo. Ejemplos de este tipo lo constituye el agua (H₂O), el ácido clorhídrico (HCL), el CO, el HN, etc. En la figura 5.26a se muestra la molécula de agua, en la figura 5.26b, se muestra un dieléctrico compuesto por varias de las moléculas polares en ausencia campo externo, en donde se observa que las moléculas tienen una orientación aleatoria. Cuando existe la presencia de un campo externo (\vec{E}_0) tal como se muestra en la figura 5.26c, el torque sobre las moléculas origina que ellas se alineen con el campo aplicado. Sin embargo, el alineamiento no es completo debido a la agitación molecular debido a la temperatura. La alineación molecular da lugar a la aparición de un campo eléctrico interno que es opuesto al campo exterior y de una magnitud menor.

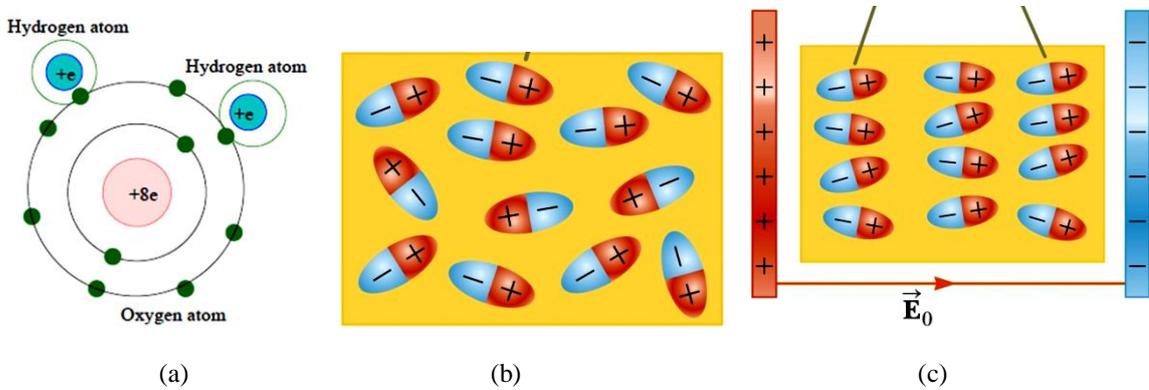


Figura 5.25. (a) Molécula de agua (b) Dieléctrico sin campo externo y (c) dieléctrico en el interior de un campo eléctrico externo (\vec{E}_0).

5.9.2.2 No polares

Aquellos que tienen momentos dipolares eléctricos no permanentes. Es decir, los centros de las cargas positivas y negativas coinciden tal que el momento dipolar neto es cero. Ejemplos de este tipo son el H₂, O₂, N₂, el dióxido de carbono, etc. En la figura 5.26, se muestra la molécula del dióxido de carbono en donde se observa que el centro de las cargas positivas y negativas es único.

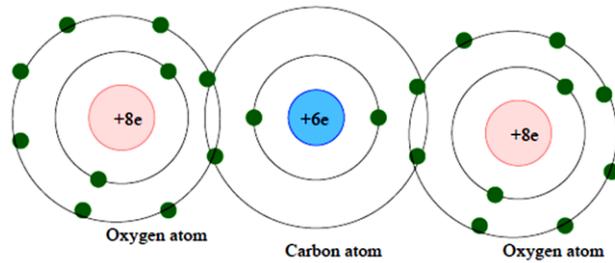


Figura 5.26 Molécula de un dieléctrico no polar como el dióxido de carbono

En la figura 5.27a se muestra un dieléctrico compuesto por varias de las moléculas no polares en ausencia campo externo, en donde se observa que las moléculas no tienen una orientación aleatoria. Cuando existe la presencia de un campo externo (\vec{E}_0) tal como se muestra en la figura 5.27b, este campo induce cargas

superficiales en las caras izquierda y derecha y como tal aparece un campo eléctrico (\vec{E}_p) en la dirección opuesta a (\vec{E}_0), siendo ($\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$), siendo $|\vec{E}| < |\vec{E}_p|$

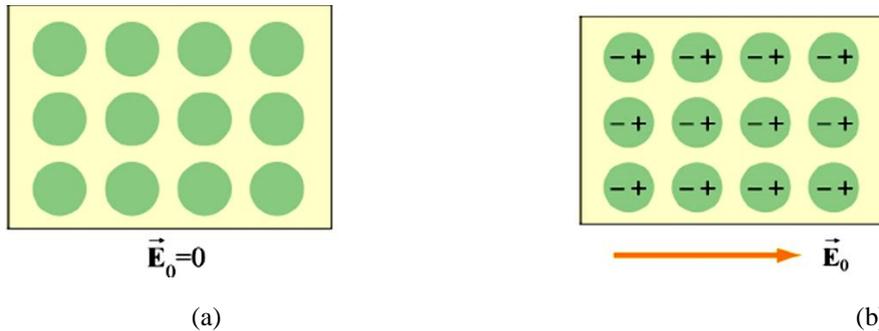


Figura 5.27. (a) Dieléctrico no polar sin campo externo y (c) dieléctrico polar en el interior de un campo eléctrico externo (\vec{E}_0).

5.9.3 BASES FÍSICAS DE κ

Al examinar la tabla 5.1, se observa que κ no tiene unidades, pero su valor tiende al infinito cuando se trata de los metales. Este hecho indica que la diferencia de potencial ΔV entre las placas debe tender a cero. Para evaluar esto consideremos un condensador plano de placas paralelas tal como se muestra en la figura 5.28a. La diferencia de potencial entre sus placas es $\Delta V_0 = Ed$, y el campo eléctrico en el interior es $E = \sigma/\epsilon_0$, entonces la diferencia de potencial entre placas es

$$\Delta V_0 = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \tag{5.41}$$

Cuando se introduce una hoja de metal, entre las placas, el campo se anula en el interior del metal insertado como se muestra en la figura 5.28b y sólo toma un valor $E = \sigma/\epsilon_0$ en la región no ocupada por el conductor insertado. Entonces la diferencia de potencial es

$$\Delta V = \frac{\sigma(d - d_o)}{\epsilon_0} \tag{5.42}$$

La relación entre las capacidades es entonces

$$\kappa = \frac{C}{C_0} = \frac{Q/\Delta V}{Q/\Delta V_0} = \frac{\Delta V_0}{\Delta V} = \frac{\frac{\sigma d}{\epsilon_0}}{\frac{\sigma(d - d_o)}{\epsilon_0}} = \frac{d}{d - d_o} \tag{5.43}$$

Si el espacio entre las placas está casi completamente lleno con metal, la constante dieléctrica $K \rightarrow \infty$.

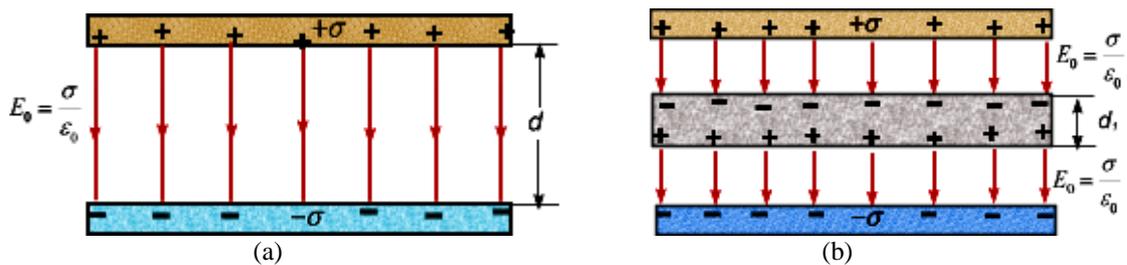


Figura 5.28. (a) Capacitor de placas planas sin dieléctrico, (b) capacitor con una hoja metálica en su interior

Remplacemos ahora la hoja metálica por un dieléctrico tal como se muestra en la figura 5.29 y observemos lo que ocurre. Los efectos que causa este dieléctrico se observan aplicando la ley de Gauss a la superficie gaussiana mostrada

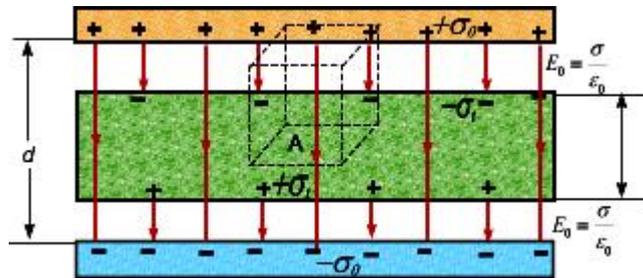


Figura 5.29 Capacitor de placas planas con un dieléctrico en su interior

Debido a que la tapa está en el conductor el campo es nulo; además a lo largo de las superficies laterales no existe flujo debido a que las normales son perpendiculares al campo eléctrico y solamente existe flujo en la tapa inferior, entonces la aplicación de la ley de Gauss nos da

$$\oiint_{SG} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{tapa} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_1 dA + \int_{c.lateral} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_L dA + \int_{fondo} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_2 dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\int_{fondo} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_2 dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Pero el campo eléctrico es de magnitud constante en la superficie del cubo que se encuentra en el dieléctrico, entonces la ecuación anterior se escribe.

$$EA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{libre} + Q_{ligada}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0 A - \sigma_i A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma_0 - \sigma_i}{\epsilon_0} \tag{5.44}$$

De la ecuación (5.44), puede observarse que la *carga ligada* (inducida) en el dieléctrico es la causa de la disminución en el campo eléctrico y por tanto en la disminución en la diferencia de potencial entre las placas. Esto a su vez produce un incremento en la capacitancia del condensador.

Si el dieléctrico llena completamente la región entre las placas metálicas, el campo tendrá el valor dado por la ecuación (5.44), excepto en el delgado espacio de separación entre placas y dieléctrico. La diferencia de potencial entre las placas será entonces

$$\Delta V = Ed = \left(\frac{\sigma_0 - \sigma_i}{\epsilon_0} \right) d \tag{5.45}$$

La capacitancia en este nuevo condensador es:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\left(\frac{\sigma_0 - \sigma_i}{\epsilon_0} \right) d} = \frac{\epsilon_0 Q}{(\sigma_0 - \sigma_i) d} \tag{5.46}$$

La capacitancia antes de insertar el dieléctrico es

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 Q}{\sigma_0 d} \quad (5.47)$$

Por tanto la constante dieléctrica será

$$\kappa = \frac{C}{C_0} = \frac{\frac{\epsilon_0 Q}{(\sigma_0 - \sigma_i)d}}{\frac{\epsilon_0 Q}{\sigma_0 d}} = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma_i} \quad (5.48)$$

O también puede escribirse en la forma

$$\kappa = \frac{1}{1 - (\sigma_i/\sigma_0)} \quad (5.49)$$

5.9.4 VECTOR POLARIZACIÓN (\vec{P})

Se ha demostrado en las secciones anteriores que los materiales dieléctricos están formados por un conjunto de dipolos eléctricos permanentes o inducidos. Uno de los conceptos cruciales para el entendimiento del comportamiento de los materiales dieléctricos es el campo eléctrico promedio producido por los dipolos eléctricos alineados con el campo eléctrico. Para evaluar dicho campo, supongamos que tenemos una pieza de material en la forma de un cilindro con área A y altura h , como se muestra en la figura 5.30a. Si ahora al dieléctrico le aplicamos un campo externo \vec{E}_0 dicho campo provoca un ligero desplazamiento $\vec{\delta}$, de la carga positiva en la dirección del campo alejándose de la carga negativa. Por otro lado, cuando se combina la carga positiva y la negativa dentro del dieléctrico, aún se cancelan entre sí. Únicamente en los extremos aparecen los efectos de desplazamiento véase figura 5.30 d.

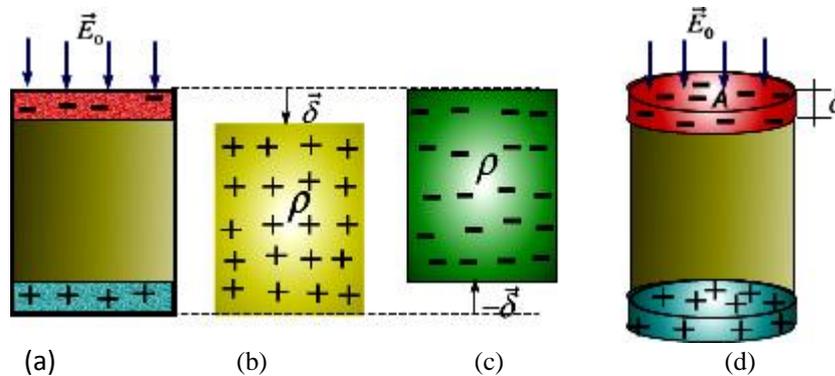


Figura.5.30. Polarización de un dieléctrico

En efecto, su campo eléctrico ha producido cargas en los dos extremos del cilindro. Esta carga se encuentra firmemente unida a las moléculas del dieléctrico, denominándose a ésta *carga ligada*. A diferencia de las cargas libres, la carga ligada no puede moverse libremente dentro del material. Sin embargo, las cargas ligadas no balanceadas producen un campo exactamente en la misma forma que las cargas libres.

Con el objeto de definir el vector polarización consideremos un dieléctrico formado por N moléculas sobre las que actúa un campo externo \vec{E}_0 . Cada una de las moléculas polares adquiere un pequeño momento dipolar \vec{p}_i . Por tanto, un elemento macroscópico de volumen Δv que contiene m dipolos de esta clase tendrá un momento dipolar

$$\Delta \vec{p} = \sum_{i=1}^m \vec{p}_i \quad (5.50)$$

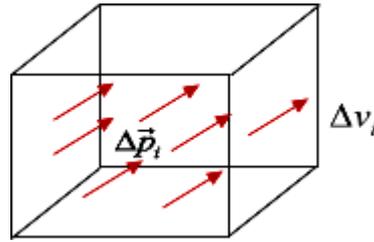


Figura 5.31 Momentos dipolares elementales inducidos por la aplicación de un campo eléctrico externo

El vector polarización macroscópica medio \vec{P} se define como el momento dipolar medio por unidad de volumen de dieléctrico (figura 5.31), es decir

$$\vec{P} = \frac{1}{\text{Volumen}} \sum_{i=1}^m \vec{p}_i \quad (5.51)$$

Entonces el vector polarización o simplemente polarización en cualquier punto dentro del dieléctrico es

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta v} \right) = \frac{d\vec{p}}{dv} \quad (5.52)$$

La existencia de \vec{P} implica la presencia de un nuevo campo eléctrico dentro del dieléctrico el mismo que cancela parcialmente al campo original. Sin embargo, es difícil calcular el nuevo campo eléctrico superponiendo directamente los campos producidos por cada elemento de volumen dentro del dieléctrico. Para determinar el campo originado por la polarización, consideremos un material dieléctrico en el cual \vec{P} es uniforme en todas partes como se muestra en la figura 5.32.

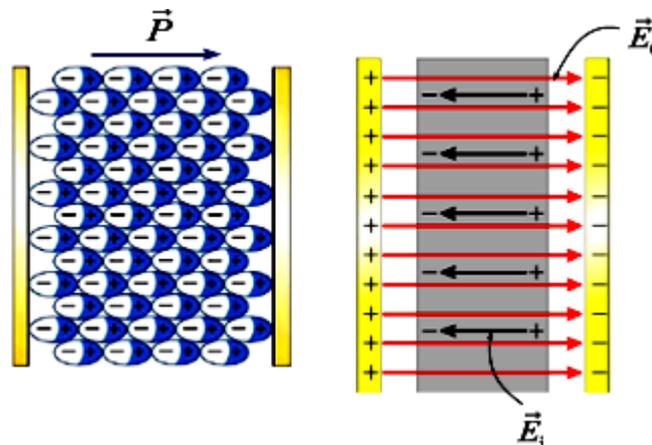


Figura 5.32. En un dieléctrico polarizado uniformemente, las cargas de los dipolos internos adyacente se cancela mutuamente, el campo eléctrico inducido se debe solo a la distribución de cargas superficiales desequilibradas que aparece en la superficie externa del dieléctrico.

Si la carga positiva se desplaza una distancia vectorial $\vec{\delta}$ con relación a la carga negativa, entonces la polarización será

$$\vec{P} = \frac{q_i \vec{\delta}}{v} = \rho \vec{\delta} \quad (5.53)$$

De la figura se observa que, el volumen es $v = A\delta$, entonces la magnitud del vector polarización es

$$P = \frac{q_i \delta}{A\delta} = \frac{q_i}{A} = \sigma_i \quad (5.54)$$

En consecuencia la magnitud del vector polarización es igual a la densidad de carga superficial (carga por unidad de área).

En el caso de que \vec{P} no sea perpendicular a la superficie la densidad de carga superficial ligada se expresa

$$\sigma_i = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cos \theta \quad (5.55)$$

Donde \vec{n} es un vector unitario normal a la superficie. La ecuación (5.17) también puede escribirse en la forma

$$\sigma_i = P_{\perp} \quad (5.56)$$

Donde P_{\perp} , es la componente perpendicular a la superficie.

La ecuación (5.56) podría interpretarse diciendo que el vector polarización empuja una carga $\sigma_i = P_{\perp}$ a través de un área unitaria de superficie dieléctrica original no polarizada. En otras palabras si el área ΔA se considera en el interior del dieléctrico, la cantidad de carga positiva empujada a través de ésta área, cuando se polariza el dieléctrico es

$$\sigma_i = \frac{\Delta Q}{\Delta A} = P_{\perp} \Rightarrow \Delta Q = P_{\perp} \Delta A \quad (5.57)$$

Para determinar la carga dentro del dieléctrico consideremos una superficie cerrada que encierra una porción de volumen dieléctrico como se muestra en la figura 5.33, inicialmente sin polarizar. Si ahora procedemos a polarizar dicho material, ¿cuánta carga positiva es empujada hacia afuera del volumen cerrado por el proceso de polarización?

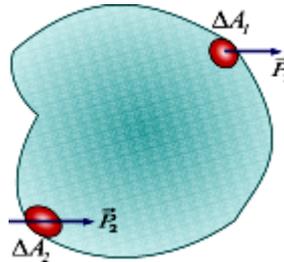


Figura 5.33 Material dieléctrica polarizado.

Es sabido que la carga empujada a través del área ΔA está dada por la ecuación (5.19), es decir, la carga total empujada fuera del área encerrada es la suma de las cargas, esto es

$$Q_{fuera} = \sum \Delta Q = \sum P_{\perp} \Delta A \quad (5.58)$$

Si ahora hacemos el área cada vez más pequeña ($\Delta A \rightarrow 0$), la ecuación (5.20), se escribe

$$Q_{fuera} = \int_S P_{\perp} dA = \int_S P \cos \theta dA \quad (5.59)$$

Puesto que el volumen del dieléctrico era inicialmente neutro, el volumen tendrá ahora un exceso de carga de $(-Q_{fuera})$ en su interior. La carga no balanceada en el interior del volumen cerrado será

$$Q_{dentro} = - \int_S \vec{P} \cdot \vec{n} dA \quad (5.60)$$

5.9.5 Ley de Gauss para dieléctricos

En el capítulo III se estudió la ley de Gauss y sus aplicaciones en el caso de que las cargas se encontraban en el medio vacío es decir no existen dieléctricos. Ahora apliquemos dicha ley en el caso de la presencia de dieléctricos para esto, consideremos un capacitor de placas paralelas con un dieléctrico en su interior tal como se muestra en la figura 5.34.

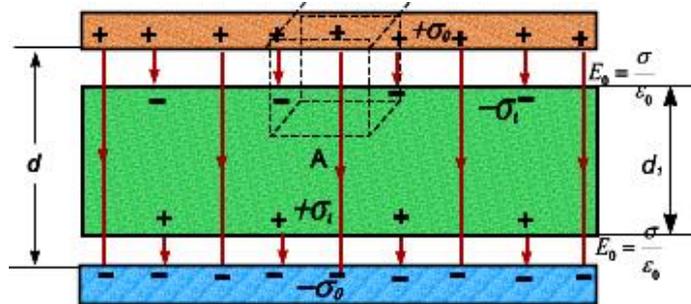


Figura 5.34. Ley de gauss aplicada a un capacitor de placas paralelas con dieléctrico.

La aplicación de dicha ley será

$$\oiint_{SG} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{q_{libre}}{\epsilon_0} + \frac{q_{ligada}}{\epsilon_0} \tag{5.61}$$

Remplazando la ecuación (5.60) en (5.61) se tiene

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{q_{libre}}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \oiint \vec{P} \cdot \vec{n} dA \tag{5.62}$$

Simplificando la ecuación anterior se tiene

$$\oiint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \vec{n} dA = q_{neta,libre} \tag{5.63}$$

La ecuación (5.25) se simplifica aún más cuando se tiene materiales dieléctricos homogéneos e isotropos (materiales que tiene propiedades dieléctricas similares en todas las direcciones y en todos los lugares). Debido a que la polarización \vec{P} es provocada por el campo eléctrico \vec{E} , no debemos sorprendernos de que algunos materiales sean lineales, esto es $\vec{P} \propto \vec{E}$ siendo la constante de proporcionalidad la llamada **susceptibilidad eléctrica** χ_e . Entonces la polarización se escribe

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \tag{5.64}$$

Al remplazar la ecuación (5.64) en la ecuación (5.5.63) se tiene

$$\epsilon_0 \oiint (1 + \chi_e) \vec{E} \cdot \vec{n} dA = q_{libre} \tag{5.65}$$

Como se demuestra posteriormente, la cantidad $(1 + \chi_e)$ es igual a la constante dieléctrica K, es decir

$$\kappa = 1 + \chi_e \tag{5.66}$$

Remplazando la ecuación (5.66) en (5.65) se tiene

$$\epsilon_0 \oiint \kappa \vec{E} \cdot \vec{n} dA = q_{libre} \tag{5.67}$$

De otro lado al producto $\epsilon_0(1 + \chi_e)$ se le denomina *permisividad del dieléctrico* esto es

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e) \quad (5.68)$$

Y la constante dieléctrica puede escribirse en la forma

$$\kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = (1 + \chi_e) \quad (5.69)$$

La ley de Gauss también puede escribirse

$$\oint \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{libre} \quad (5.70)$$

5.9.6 Desplazamiento eléctrico \vec{D} .

Cuando se tiene un dieléctrico en el interior de un capacitor de placas paralelas y se aplica la ley de Gauss a una superficie gaussiana, se tiene

$$\oint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{q_0}{\epsilon_0} - \frac{q_i}{\epsilon_0} \quad (5.71)$$

$$EA = \frac{\sigma_0 A}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_i A}{\epsilon_0} \quad (5.72)$$

El signo menos se debe a que la carga ligada en el interior de la superficie gaussiana es negativa. Entonces

$$\sigma_0 = \epsilon_0 E + \sigma_i = \epsilon_0 E + P \quad (5.73)$$

Es a la cantidad ($\sigma_0 = q/A$) que se le conoce como desplazamiento eléctrico (\vec{D}), entonces la ecuación

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (5.74)$$

Debido a que el campo eléctrico y la polarización son cantidades vectoriales se puede escribir

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (5.75)$$

De esta ecuación puede deducirse que:

- i. El desplazamiento eléctrico \vec{D} está únicamente relacionado con la carga libre y se puede representar por líneas de fuerza que comienzan y terminan en las cargas libres.
- ii. La polarización \vec{P} , está únicamente relacionada con la carga ligada (carga de polarización). También es posible representarlo por líneas de fuerza que comienzan y terminan en las cargas de polarización.
- iii. El campo eléctrico \vec{E} , está relacionado con todas las cargas que existen ya sea libres o ligadas

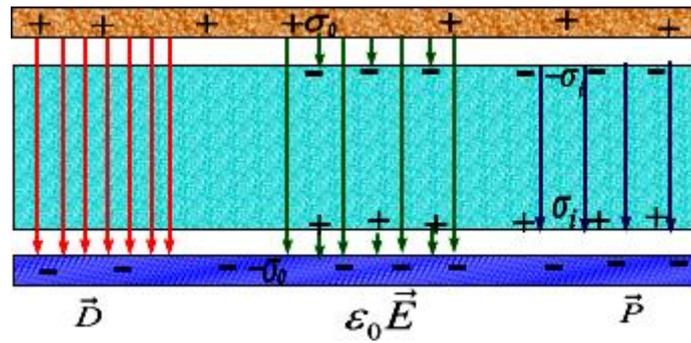


Figura 5.35. Vectores desplazamiento, campo y polarización eléctricos en un condensador de placas planas con dieléctrico.

Teniendo en cuenta que la polarización está dada por $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$, el desplazamiento eléctrico puede escribirse en la forma

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \kappa \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (5.76)$$

Y la ley de Gauss en función del desplazamiento eléctrico es

$$\oint_{SG} \vec{D} \cdot d\vec{A} = q_{libre} \quad (5.77)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una esfera conductora cargada y aislada de 12 cm de radio crea un campo eléctrico de $4,9 \cdot 10^4 \text{ N/C}$ a una distancia de 21 cm de su centro. ¿Cuál es su densidad de carga superficial?. (b) ¿Cuál es su capacitancia?

Solución

Sabemos que el campo eléctrico creado por una esfera en puntos exteriores es

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$$

Y su módulo está dado por

$$E = k \frac{q}{r^2}$$

Entonces la carga que posee este conductor será

$$4,9 \cdot 10^4 \text{ N/C} = 9 \cdot 10^9 \text{ N.m}^2 / \text{C}^2 \left(\frac{q}{(0,21\text{m})^2} \right)$$

$$q = 0,24 \mu\text{C}$$

Parte (a.) Densidad de carga

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{0,24 \mu\text{C}}{4\pi(0,12\text{m})^2}$$

$$\sigma = 1,33 \mu\text{C} / \text{m}^2$$

Parte (b). Capacitancia de la esfera

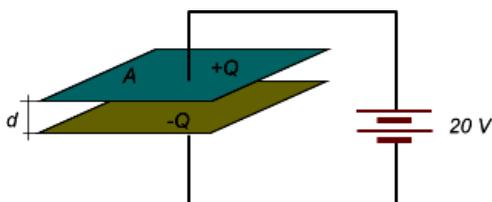
$$C = 4\pi\epsilon_0 R = 4\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N.m}^2)(0,12\text{m})$$

$$C = 13,3 \text{ pF}$$

2. Un capacitor de aire está formado por dos placas paralelas cada una de ellas con un área de 8 cm^2 , separadas por una distancia de $2,0\text{ mm}$. A estas placas se le aplica una diferencia de potencial de 25 V . determine: (a) el campo eléctrico entre las placas. (b) La densidad de carga superficial, (c) La capacitancia y (d) La carga sobre la placa.

Solución

En la figura se muestra la disposición de capacitor



Parte (a) Campo eléctrico entre las placas

$$\Delta V = Ed$$

$$25\text{V} = E(2 \cdot 10^{-3} \text{ m})$$

$$E = 12,5 \text{ kV/m}$$

Parte (b). Densidad de carga superficial

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 E = 8,85 \cdot 10^{-12} (12,5 \cdot 10^3 \text{ V/m})$$

$$\sigma = 110,5 \text{ nC/m}$$

Parte (c). La capacitancia

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} (8 \cdot 10^{-4})}{2 \cdot 10^{-3}}$$

$$C = 3,54 \text{ pF}$$

Parte (d) Carga sobre la placa

$$\Delta V = \frac{Q}{C} \Rightarrow Q = C\Delta V = 3,54 \text{ pF}(25\text{V})$$

$$Q = 88,5 \text{ pC}$$

3. Un condensador de placas paralelas tiene una capacidad de $2,0\text{ }\mu\text{F}$ y la separación entre las placas es de $1,6\text{ mm}$. (a) Qué diferencia de potencial puede establecerse entre las placas de capacitor antes que se produzca la ruptura dieléctrica del aire?. ($E_{\text{max}} = 3\text{ MV/m}$). (b) cuál es el valor de la carga máxima que puede almacenar el condensador antes que se produzca esta ruptura?

Solución

Parte (a). Diferencia de potencial máxima

$$\Delta V = E_{\text{max}} d = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}(1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m})$$

$$\Delta V = 4,8 \text{ kV}$$

Parte (b) Carga máxima almacenada

$$\Delta V = \frac{Q}{C}$$

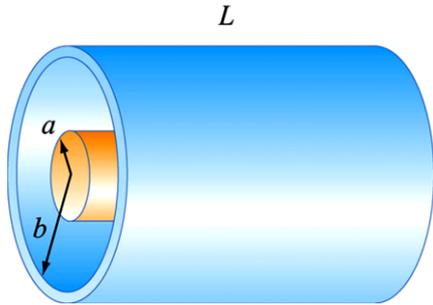
$$Q_{\text{mx}} = C\Delta V = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}(4800\text{V})$$

$$Q = 9600 \mu\text{C}$$

4. Un tramo de 50 m de cable coaxial tiene un conductor interior de $2,58\text{ mm}$ de diámetro y lleva una carga de $8,10\text{ }\mu\text{C}$. El conductor que lo rodea tiene un diámetro interno de $7,27\text{ mm}$ y lleva una carga de $-8,10\text{ }\mu\text{C}$. (a) ¿Cuál es la capacitancia de este cable?. (b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los conductores?. Suponga que el espacio entre conductores está lleno de aire.

Solución

En la figura se muestra la disposición del cable



Parte (a). Capacitancia del cable. Se ha demostrado que la capacidad está dada por

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

Remplazando los valores dados en el enunciado se tiene

$$C = \frac{2\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N.m}^2)(50\text{m})}{\ln(3,635/1,29)}$$

$$C = 2,68 \text{ nF}$$

Parte (b) Diferencia de potencial entre conductores

i) Primer método

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{8,10 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{2,68 \cdot 10^{-9} \text{ F}}$$

$$\Delta V = 3022 \text{ V}$$

ii) Segundo método.

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a) = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a)$$

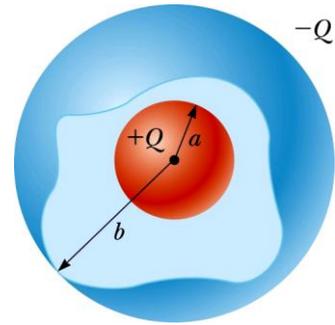
$$\Delta V = \frac{8,10 \cdot 10^{-6} \text{ C} / 50\text{m}}{2\pi(8,99 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N.m}^2)} \ln(3,635/1,29)$$

$$\Delta V = 3022 \text{ V}$$

5. En un capacitor esférico lleno de aire los radios de los cascarones interior y exterior miden 7 y 14 cm, respectivamente. (a) Determine la capacitancia de este dispositivo. (b) ¿Cuál tendría que ser la diferencia de potencial entre las cascaras esféricas para obtener una carga de 4 μC?

Solución

En la figura se muestra el condensador esférico.



Parte (a) Se ha demostrado que la capacitancia para un condensador esférico está dado por

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{(b-a)}$$

Remplazando los valores consignados en el problema se tiene

$$C = \frac{4\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N.m}^2)(0,07\text{m})(0,14\text{m})}{(0,14\text{m} - 0,07\text{m})}$$

$$C = 15,6 \text{ pF}$$

Parte (b) Diferencia de potencial

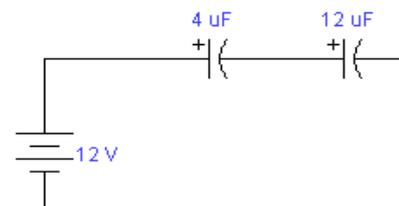
$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{4 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{15,6 \cdot 10^{-12} \text{ F}}$$

$$\Delta V = 256 \text{ kV}$$

6. Dos condensadores de capacidad C₁ = 4 μF y C₂ = 12 μF se encuentran conectados en serie y alimentados por una batería a 12 V. Si ahora se desconectan cuidadosamente sin que se descarguen y ahora se conectan en paralelo uniendo sus lados positivos y sus lados negativos. Calcular la diferencia de potencial a través de cada uno de los condensadores después de ser reconectados. (b) Hallar la energía final e inicial almacenada e los condensadores.

Solución

En la figura se muestra los condensadores conectados en el estado inicial.



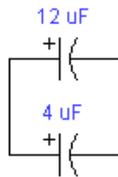
Debido a que los condensadores están en serie las cargas en ambos son iguales a Q . Aplicando la ley de Kirchhoff se tiene

$$+12V - \frac{Q}{4\mu F} - \frac{Q}{12\mu F} = 0$$

$$Q \left[\frac{1}{4\mu F} + \frac{1}{12\mu F} \right] = 12V$$

$$Q = 36\mu C$$

Cuando se les desconecta y se vuelve a conectar en paralelo el circuito queda en la forma



La capacidad equivalente en este caso es

$$C_e = 4\mu F + 12\mu F = 16\mu F$$

La diferencia de potencial en el condensador equivalente será

$$\Delta V = \frac{2Q}{C_e} = \frac{2(36\mu C)}{16\mu F}$$

$$\Delta V = 4,5V$$

Parte (b). La energía almacenada inicialmente será

$$U_{inic} = \frac{1}{2} C_{e,inc} \Delta V_{inicial}^2 = \frac{1}{2} (3\mu C)(12V)^2$$

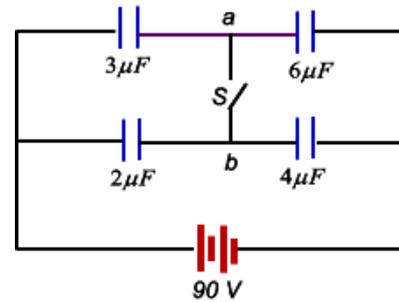
$$U_{inic} = 216\mu J$$

La energía final almacenada será

$$U_{inic} = \frac{1}{2} C_{e,final} \Delta V_{final}^2 = \frac{1}{2} (16\mu C)(4,5V)^2$$

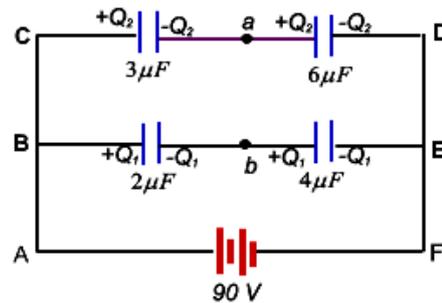
$$U_{inic} = 162\mu J$$

7. Para el sistema de condensadores que se muestra en la figura. Halle: La diferencia de potencial entre a y b cuando el interruptor S se encuentra abierto. (b) El potencial eléctrico del punto b cuando el interruptor S está cerrado. (c) la carga en cada condensador cuando S está cerrado.



Solución

Parte (a). Cuando el interruptor S está abierto



Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla ABEFA, tenemos

$$\Delta V_f + \Delta V_{C_2} + \Delta V_{C_6} = 0$$

$$+90V - \frac{Q_1}{2 \cdot 10^{-6}} - \frac{Q_1}{4 \cdot 10^{-6}} = 0$$

$$90 = Q_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) (10^{-6})$$

$$Q_1 = 120\mu C$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla ACDEFA tenemos

$$\Delta V_f + \Delta V_{C_3} + \Delta V_{C_6} = 0$$

$$+90V - \frac{Q_2}{2 \cdot 10^{-6}} - \frac{Q_2}{4 \cdot 10^{-6}} = 0$$

$$90 = Q_2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) (10^{-6})$$

$$Q_2 = 180\mu C$$

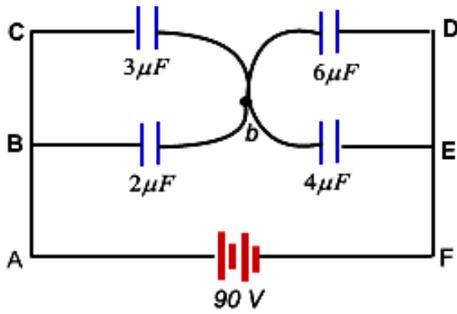
Aplicar el teorema de la trayectoria

$$V_b + \frac{Q_1}{2 \cdot 10^{-6}} - \frac{Q_2}{3 \cdot 10^{-6}} = V_a$$

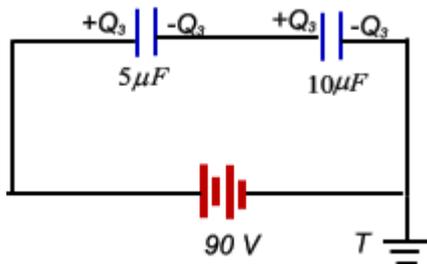
$$\frac{120 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6}} - \frac{180 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6}} = V_a - V_b$$

$$V_a - V_b = 0V$$

Parte (b) Cuando el interruptor está cerrado



Reduciendo los condensadores en paralelo, se tiene



Aplicando la segunda ley de Kirchooff, se tiene

$$+90V - \frac{Q_3}{5 \cdot 10^{-6}} - \frac{Q_3}{10 \cdot 10^{-6}} = 0$$

$$90 = Q_1 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} \right) (10^{-6})$$

$$Q_1 = 300 \mu C$$

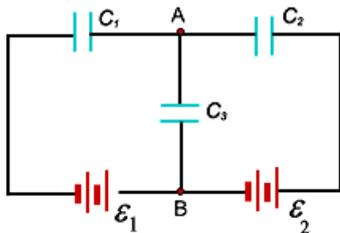
Aplicar el teorema de la trayectoria

$$V_T + \frac{Q_3}{10 \cdot 10^{-6}} = V_b$$

$$\frac{300 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-6}} = V_a - 0$$

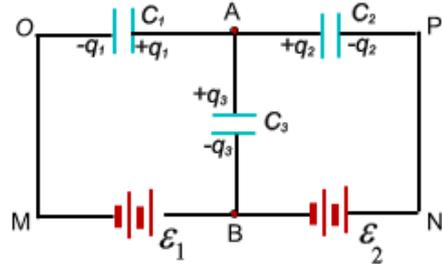
$$V_a = 30V$$

8. Halle la diferencia de potencial $V_A - V_B$ entre los puntos A y B del circuito mostrado.



Solución

En la figura se muestra el circuito capacitivo conjuntamente con las polaridades en los elementos del circuito y las cargas en los capacitores.



Aplicando la primera ley de Kirchoff (conservación de la carga) al nudo A, tenemos

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0$$

Aplicando el teorema de la trayectoria a la malla MOABM, resulta

$$V_M + \varepsilon_1 + \frac{q_3}{C_3} - \frac{q_1}{C_1} = V_M$$

$$q_1 = \left(\varepsilon_1 + \frac{q_3}{C_3} \right) C_1 \quad (1)$$

Aplicando el teorema de la trayectoria a la malla BNPA, resulta

$$V_B + \varepsilon_2 + \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_3}{C_3} = V_B$$

$$q_2 = \left(\frac{q_3}{C_3} - \varepsilon_2 \right) C_2 \quad (2)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1), tenemos

$$\varepsilon_1 C_1 + \frac{q_3}{C_3} C_1 + \frac{q_3}{C_3} C_2 - \varepsilon_2 C_2 + q_3 = 0$$

$$q_3 = \left(\frac{\varepsilon_2 C_2 - \varepsilon_1 C_1}{C_1 + C_2 + C_3} \right) C_3 \quad (3)$$

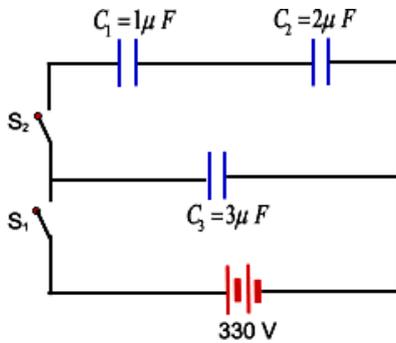
Aplicando el teorema de la trayectoria entre A y B,

$$V_A - \frac{q_3}{C_3} = V_B$$

$$V_A - V_B = \frac{q_3}{C_3} = \frac{\left(\frac{\varepsilon_2 C_2 - \varepsilon_1 C_1}{C_1 + C_2 + C_3} \right) C_3}{C_3}$$

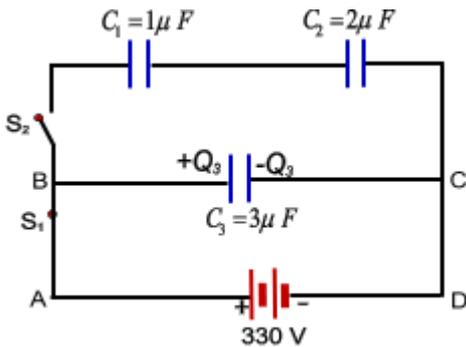
$$V_A - V_B = \left(\frac{\varepsilon_2 C_2 - \varepsilon_1 C_1}{C_1 + C_2 + C_3} \right) \quad \text{Rta.}$$

9. Tres condensadores se conectan tal como se muestra en la figura. Se cierra el interruptor S_1 y el condensador C_3 se carga a una diferencia de potencial de 330 V . Luego se abre S_1 y se cierra S_2 . (a) Cuál es la diferencia de potencial en cada uno de los condensadores? (b) Cuál es la carga en cada uno de los condensadores?.



Solución

Cuando el interruptor S_1 se encuentra cerrado y S_2 se encuentra abierto.

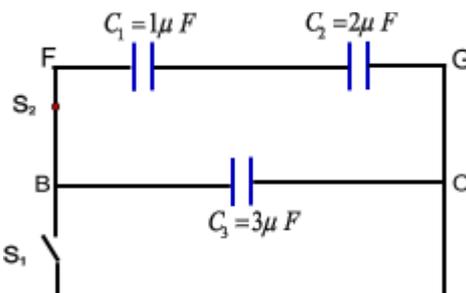


Aplicando la segunda ley de Kirchoff, a la malla ABCDA, se tiene

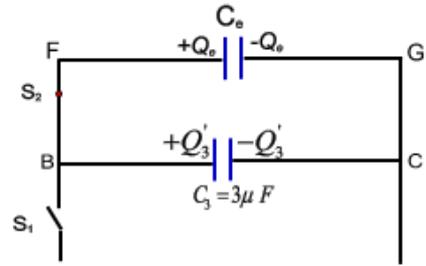
$$330V - \frac{Q_3}{C_3} = 0 \Rightarrow Q_3 = 330V(3\mu F)$$

$$Q_3 = 990\mu C \quad (1)$$

Cuando se ha cargado el capacitor C_3 , se abre el interruptor S_1 y se cierra el interruptor S_2 . Entonces el circuito capacitivo queda en la forma.



Los condensadores C_1 y C_3 se encuentran en serie, entonces se halla su capacidad equivalente. Quedando el circuito en la forma



$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1\mu F(2\mu F)}{3\mu F} = \frac{2}{3}\mu F$$

Según el principio de conservación de carga, tenemos

$$Q_3 = Q_3' + Q_e$$

$$990\mu C = Q_3' + Q_e \quad (1)$$

Debido a que los condensadores C_3 y C_e están en paralelo. Sus diferencias de potencial son iguales.

$$\Delta V_3' = \Delta V_e \Rightarrow \frac{Q_3'}{C_3} = \frac{Q_e}{C_e}$$

$$Q_3' = Q_e \frac{C_3}{C_e} = \left(\frac{3\mu F}{(2/3)\mu F} \right) Q_e = \frac{9}{2} Q_e \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1), tenemos

$$990\mu C = \frac{9}{2} Q_e + Q_e = \frac{11}{2} Q_e$$

$$Q_e = 180\mu C \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2), resulta

$$Q_3' = \frac{9}{2}(180\mu C) = 810\mu C \quad (4)$$

Debido a que los capacitores C_1 y C_2 se encuentran en serie, éstos tendrán la misma carga, e igual a la carga en capacitor equivalente. Es decir

$$Q_e = Q_1 = Q_2 = 180\mu C \quad (5)$$

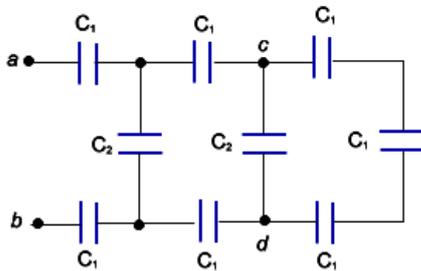
Ahora procedemos a determinar las diferencias de potencial en cada capacitor

$$\Delta V_3' = \frac{Q_3'}{C_3} = \frac{810 \mu C}{3 \mu F} = 270V$$

$$\Delta V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{180 \mu C}{1 \mu F} = 180V$$

$$\Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{180 \mu C}{2 \mu F} = 90V$$

10. En la figura, cada capacitancia C_1 es de $9,3 \mu F$ y cada capacitancia C_2 es de $6,2 \mu F$. (a) Calcular la capacidad equivalente de la red entre los puntos a y b . (b) Calcule la carga en cada uno de los capacitores más cercanos a los puntos a y b cuando $V_{ab} = 840 V$. Con $840 V$ a través de a y b determine V_{cd} .



Solución

Parte (a)

Los tres capacitores de la derecha están en serie su capacidad equivalente será C_a

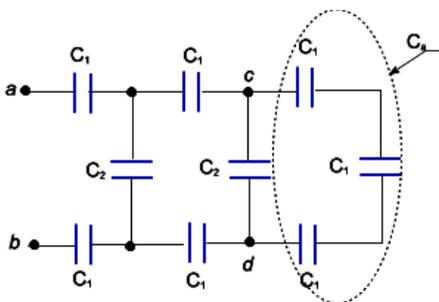


Figura (a)

La capacidad será

$$\frac{1}{C_a} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} = \frac{3}{C_1}$$

$$C_a = \frac{C_1}{3} = \frac{9,3}{3} = 3,1 \mu F$$

El circuito reducido es el mostrado en la figura (b)

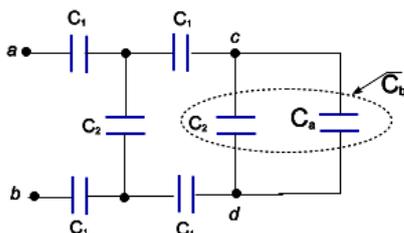


Figura (b)

Los capacitores C_a y C_2 están en paralelo entonces su capacidad equivalente será C_b

$$C_b = C_a + C_2 = 3,1 \mu F + 6,2 \mu F$$

$$C_b = 9,3 \mu F$$

El circuito reducido se muestra en la figura c.

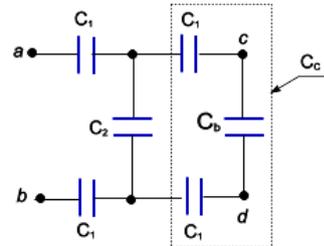


Figura (c)

Los capacitores C_b y los dos capacitores C_1 están en serie entonces su capacidad equivalente será C_c es

$$\frac{1}{C_c} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_b} + \frac{1}{C_1} = \frac{1}{9,3} + \frac{1}{9,3} + \frac{1}{9,3}$$

$$C_c = \frac{9,3}{3} = 3,1 \mu F$$

El circuito reducido se muestra en la figura c.

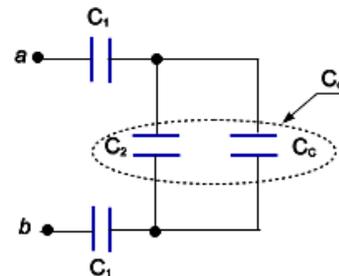


Figura (d)

Los condensadores C_2 y C_c están en paralelo, entonces su capacidad equivalente será C_d .

$$C_d = C_c + C_2 = 3,1 \mu F + 6,2 \mu F$$

$$C_d = 9,3 \mu F$$

El nuevo circuito reducido es el mostrado en la figura (e).

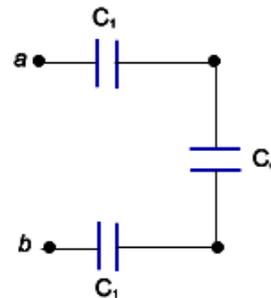


Figura (e)

Finalmente se observa que los capacitores C_1 y C_d están en serie, entonces su capacidad equivalente es

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_d} + \frac{1}{C_1} = \frac{1}{9,3} + \frac{1}{9,3} + \frac{1}{9,3}$$

$$C_e = \frac{9,3}{3} = 3,1\mu F$$

Parte (b)

La carga en el capacitor equivalente C_e será

$$Q_e = C_e \Delta V = 3,1\mu F (840V)$$

$$Q_e = 2604\mu C \quad (1)$$

Los capacitores C_1 , C_d , C_1 al estar en serie poseerán la misma carga esto es

$$Q_1 = Q_d = Q_e = 2604\mu C \quad (2)$$

La diferencia de potencial en el capacitor C_d será

$$\Delta V_d = \frac{Q_d}{C_d} = \frac{2604\mu C}{9,3\mu F}$$

$$\Delta V_d = 280V \quad (3)$$

Debido a que C_d es el resultado de los dos capacitores en paralelo C_c y C_2 , las diferencias de potencial de estos últimos es

$$\Delta V_2 = \Delta V_c = \Delta V_d = 280V \quad (4)$$

La carga en el condensador C_2 será

$$Q_2 = C_2 \Delta V_2 = 6,2\mu F (280V)$$

$$Q_2 = 1736\mu C \quad (5)$$

La carga en el condensador C_c será

$$Q_c = C_c \Delta V_c = 3,1\mu F (280V)$$

$$Q_c = 868\mu C$$

Debido a que los capacitores C_1 , C_c y C_1 de la figura (c) están en serie, ellos tendrán la misma carga, esto es

$$Q_1 = Q_b = Q_c = 868\mu C \quad (6)$$

Entonces la diferencia de potencial en el capacitor C_b será.

$$\Delta V_b = \frac{Q_b}{C_b} = \frac{868\mu C}{9,3\mu F}$$

$$\Delta V_b = 93,33V \quad (7)$$

Los condensadores C_2 y C_a están en paralelo, entonces su diferencia de potencial son iguales e igual al del capacitor C_b

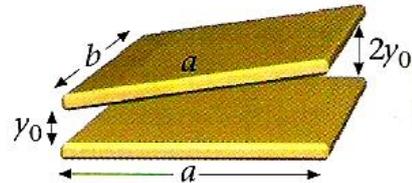
$$\Delta V_2 = \Delta V_b = 93,33V \quad (8)$$

La diferencia de potencial entre los puntos c y d será

$$V_c - \Delta V_2 = V_d$$

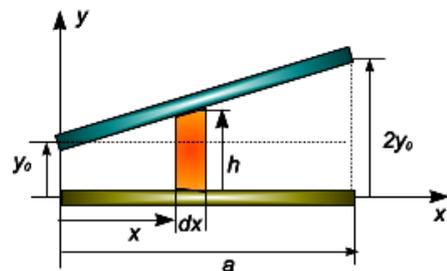
$$V_c - V_d = \Delta V = 93,33V \quad (9)$$

11. Un capacitor posee placas rectangulares de longitud a y anchura b . La placa superior está inclinada un pequeño ángulo como se indica en la figura. La separación de las placas varía de $s = y_0$ a la izquierda a $s = 2y_0$ a la derecha, siendo y_0 mucho menor que a o b . Determine la capacidad utilizando bandas de anchura dx y de longitud b que actúan como condensadores diferenciales.



Solución

En la figura se muestra la división del capacitor en capacitores de ancho b , longitud dx y de separación entre placas h .



La capacidad del capacitor diferencial es

$$dC = \frac{\epsilon_0 (b dx)}{h}$$

La altura h viene expresada mediante la ecuación

$$h = y_0 + d = y_0 + \frac{y_0}{a}x$$

$$h = y_0 \left(1 + \frac{1}{a}x\right)$$

Al remplazar el valor de h en la capacidad diferencial se tiene

$$dC = \frac{\epsilon_0(bdx)}{y_0 \left(1 + \frac{1}{a}x\right)} = \frac{\epsilon_0(abdx)}{y_0(a+x)}$$

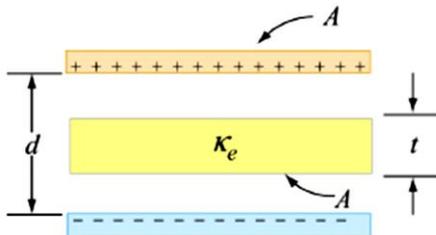
La capacidad del condensador completo se obtiene integrando la expresión anterior esto es

$$C = \int dC = \frac{\epsilon_0 ab}{y_0} \int_0^a \frac{dx}{(a+x)}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 ab}{y_0} [\ln(a+x)]_0^a$$

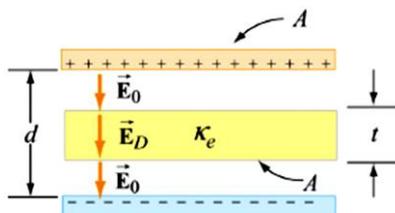
$$C = \frac{\epsilon_0 ab}{y_0} \ln 2$$

12. Una lamina no conductora de espesor t , área A y constante dieléctrica κ_e es insertada entre el espacio de las placas de un capacitor plano con espaciamiento d , carga $+Q$ y área A , como se muestra en la figura. La lámina no necesariamente está en el medio entre las placas del capacitor. Determine la capacitancia del sistema



Solución

En la figura se muestra los campos en el aire y en el dieléctrico



En ausencia de un dieléctrico el campo está dado por

$$E_0 = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Cuando está presente el dieléctrico el campo eléctrico se expresa en la forma

$$E = \frac{E_0}{\kappa_e}$$

La diferencia de potencial se determina integrando el campo eléctrico a lo largo de la trayectoria recta

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\Delta V_{0,1} - \Delta V_d - \Delta V_{0,2}$$

$$\Delta V = -E_0 \left(\frac{d-t}{2}\right) - E_d t - E_0 \left(\frac{d-t}{2}\right)$$

$$\Delta V = -E_0(d-t) - \frac{E_0}{\kappa_e} t$$

$$\Delta V = -\frac{Q}{\epsilon_0 A}(d-t) - \frac{Q}{\epsilon_0 A \kappa_e} t$$

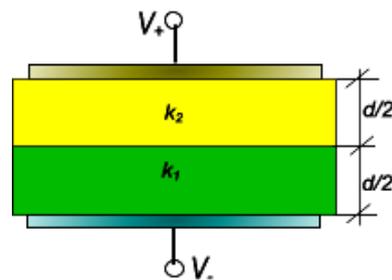
$$\Delta V = -\frac{Q}{\epsilon_0 A} \left[d-t \left(1 - \frac{1}{\kappa_e}\right) \right]$$

La capacidad del condensador será

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{\frac{Q}{\epsilon_0 A} \left[d-t \left(1 - \frac{1}{\kappa_e}\right) \right]}$$

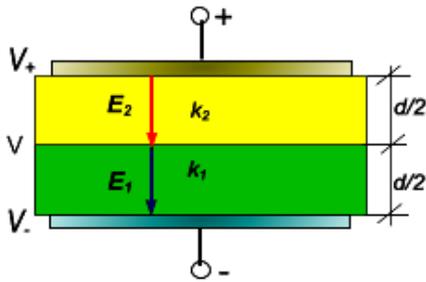
$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d-t \left(1 - \frac{1}{\kappa_e}\right)} \quad \text{Rta.}$$

13. En un condensador de placas paralelas se insertan dos dieléctricos cuyas constantes dieléctricas son κ_1 y κ_2 como se muestra en la figura. Determine la capacidad del capacitor.



Solución

En la figura se muestra los campos eléctricos en los dieléctricos



El campo eléctrico cuando existe dieléctricos está dado por

$$E_1 = \frac{E_0}{\kappa_1} = \frac{Q}{\epsilon_0 \kappa_1 A}$$

$$E_2 = \frac{E_0}{\kappa_2} = \frac{Q}{\epsilon_0 \kappa_2 A}$$

La diferencia de potencial entre las placas será

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\Delta V_2 - \Delta V_1$$

$$\Delta V = -E_2 \left(\frac{d}{2}\right) - E_1 \left(\frac{d}{2}\right)$$

$$\Delta V = -\frac{Q}{\epsilon_0 \kappa_2 A} \left(\frac{d}{2}\right) - \frac{Q}{\epsilon_0 \kappa_1 A} \left(\frac{d}{2}\right)$$

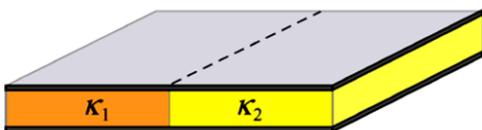
$$\Delta V = -\frac{Qd}{2\epsilon_0 A} \left(\frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_1}\right) = \frac{Qd}{2\epsilon_0 A} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2}\right)$$

La capacidad del capacitor será

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\epsilon_0 A} \left[\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2}\right]}$$

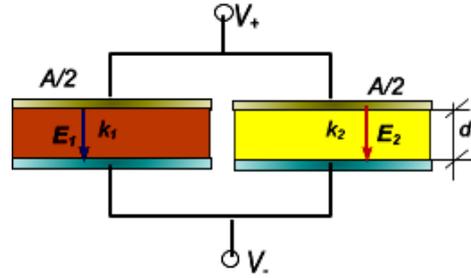
$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d} \left(\frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}\right)$$

14. En capacitor de armaduras planas paralelas d área A y separadas una distancia d se colocan dos dieléctricos de constantes dieléctricas k_1 y k_2 como se muestra en la figura. Determine la capacidad del capacitor.



Solución

Debido a que la diferencia de potencial para cada uno de los dieléctricos es la misma, podemos tratar al sistema como compuesto por dos condensadores con dieléctrico instalados en paralelo



La capacidad de cada capacitor será

$$C_1 = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma(A/2)}{E_1 d} = \frac{\sigma A}{2(E_0/\kappa_1)d} = \frac{\sigma \kappa_1 A}{2(\sigma/\epsilon_0)d}$$

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \kappa_1 A}{2d}$$

$$C_2 = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma(A/2)}{E_2 d} = \frac{\sigma A}{2(E_0/\kappa_2)d} = \frac{\sigma \kappa_2 A}{2(\sigma/\epsilon_0)d}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \kappa_2 A}{2d}$$

La capacidad del capacitor equivalente será

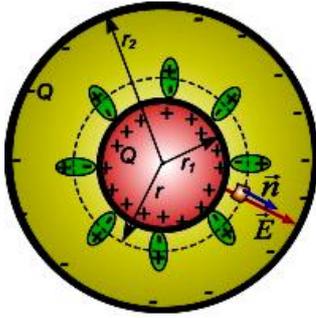
$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \kappa_1 A}{2d} + \frac{\epsilon_0 \kappa_2 A}{2d}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{2d} (\kappa_1 + \kappa_2)$$

15. El espacio entre dos esferas metálicas concéntricas muy finas está lleno de un dieléctrico cuya constante es κ_e . Los radios de las esferas son iguales a r_1 y r_2 . La cargas de los conductores interior y exterior son iguales a $+Q$ y $-Q$, respectivamente. Determine: (a) la diferencia de potencial, (b) la densidad de cargas de polarización y (c) la capacidad del condensador esférico con dieléctrico.

Solución

En la figura se muestra el capacitor esférico con el dieléctrico así mismo se muestra las cargas de polarización producto del campo entre las esferas conductoras y la superficie gaussiana de radio r a usar para hallar el campo eléctrico



Para encontrar el campo eléctrico entre las esferas se aplica la ley de Gauss a la superficie gaussiana, esto es

$$\oiint_{SG} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{q_{libre} + q_{polariz}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q - q_l}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{Q - q_l}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

O aplicando la ley de Gauss a dieléctricos, se tiene

$$\oiint_{SG} \kappa_e \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{q_{libre}}{\epsilon_0} \Rightarrow \kappa_e E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \kappa_e r^2} \vec{e}_r$$

De donde se obtiene las cargas de polarización q_l

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q_l}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \kappa_e r^2}$$

$$q_l = Q \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e} \right)$$

Las densidades de carga de polarización serán

$$\sigma_{l,int} = - \frac{Q(\kappa_e - 1)}{4\pi\kappa_e r_1^2}$$

$$\sigma_{l,int} = + \frac{Q(\kappa_e - 1)}{4\pi\kappa_e r_2^2}$$

La diferencia de potencial entre las armaduras del capacitor será

$$\int_{V_{int}}^{V_{ext}} dV = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \kappa_e} \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr$$

$$V_{ext} - V_{int} = - \frac{Q(r_2 - r_1)}{4\pi\epsilon_0 \kappa_e r_2 r_1}$$

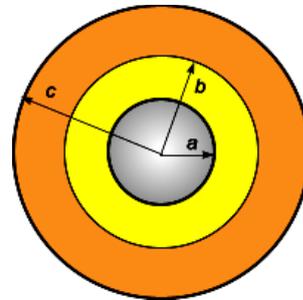
$$\Delta V = V_{int} - V_{ext} = \frac{Q(r_2 - r_1)}{4\pi\epsilon_0 \kappa_e r_2 r_1}$$

La capacidad del condensador esférico con dieléctrico será

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q(r_2 - r_1)}{4\pi\epsilon_0 \kappa_e r_2 r_1}}$$

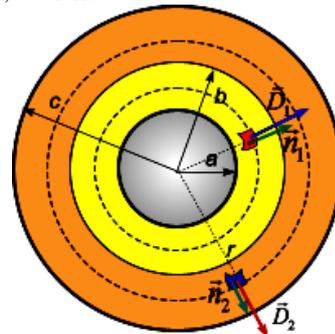
$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 \kappa_e r_2 r_1}{(r_2 - r_1)}$$

16. Considere un condensador esférico formado por dos conductores de radios a y c . Entre las dos superficies conductoras se llena dos materiales dieléctricos tal que el dieléctrico de constante κ_1 está entre a y b , y el dieléctrico de constante κ_2 entre b y c como se muestra en la figura. Determine: (a) El desplazamiento eléctrico en cada uno de los dieléctricos, (b) el campo eléctrico en cada uno de los materiales dieléctricos y (c) la capacitancia de este sistema.



Solución

Parte (a). Aplicando la ley de Gauss a las superficies gaussianas representadas con líneas punteadas, se tiene



$$\oiint_{SG} \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 dA = q_{libre} \Rightarrow D_1(4\pi r^2) = Q$$

$$\vec{D}_1 = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r \quad a \leq r \leq b$$

$$\oiint_{SG} \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 dA = q_{libre} \Rightarrow D_2(4\pi r^2) = Q$$

$$\vec{D}_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r \quad b \leq r \leq c$$

Parte (b). Cálculo de los campos eléctricos.

$$D_1 = \epsilon_0 \kappa_1 E_1 = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \kappa_1 r^2} \vec{e}_r$$

$$D_2 = \epsilon_0 \kappa_2 E_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \kappa_2 r^2} \vec{e}_r$$

Parte (c). Cálculo de la diferencia de potencial

$$dV = -E_1 dr - E_2 dr$$

$$dV = -\frac{Qdr}{4\pi \epsilon_0 \kappa_1 r^2} - \frac{Qdr}{4\pi \epsilon_0 \kappa_2 r^2}$$

$$\int_{V_a}^{V_b} dV = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \kappa_1} \int_a^b r^{-2} dr - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \kappa_2} \int_b^c r^{-2} dr$$

$$V_b - V_a = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \kappa_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \kappa_2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$$

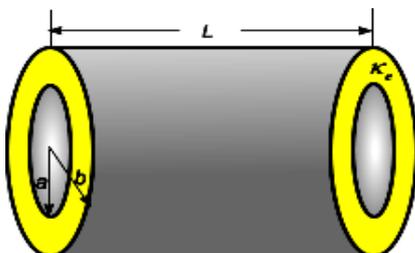
$$\Delta V = V_a - V_b = \frac{Q(b-a)}{4\pi \epsilon_0 \kappa_1 ab} + \frac{Q(c-b)}{4\pi \epsilon_0 \kappa_2 bc}$$

Parte (d). Cálculo de la capacitancia

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q(b-a)}{4\pi \epsilon_0 \kappa_1 ab} + \frac{Q(c-b)}{4\pi \epsilon_0 \kappa_2 bc}}$$

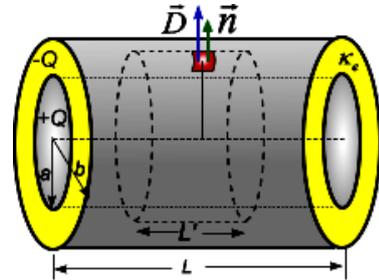
$$C = \frac{4\pi \epsilon_0 abc}{\kappa_2 c(b-a) + \kappa_1 a(c-b)}$$

17. Un capacitor cilíndrico de longitud L está compuesto por una cáscara de radio a con una carga +Q y de otra cáscara de radio b con una carga -Q, separadas por un dieléctrico de constante κ_e tal como se muestra en la figura. Determine: (a) El desplazamiento eléctrico, (b) el campo eléctrico en el dieléctrico, (c) la diferencia de potencial entre las placas del capacitor y (d) la capacitancia del capacitor.



Solución

Parte (a) En la figura se muestra la superficie gaussiana de radio r y longitud L' a utilizar para hallar el desplazamiento eléctrico.



Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\oiint_{SG} \vec{D} \cdot \vec{n} dA = q_{libre} \Rightarrow D(2\pi r L') = Q$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{2\pi r L'} \vec{e}_r = \frac{2\pi a \sigma L'}{2\pi r L'} \vec{e}_r = \frac{a\sigma}{r} \vec{e}_r \quad a \leq r \leq b$$

Parte (b) El campo eléctrico en el dieléctrico será

$$D = \epsilon_0 \kappa_e E = \frac{\sigma a}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 \kappa_e r} \vec{e}_r$$

Parte (c). La diferencia de potencial será

$$dV = -E dr$$

$$dV = -\frac{\sigma a dr}{\epsilon_0 \kappa_e r}$$

Integrando la expresión anterior, resulta

$$\int_{V_a}^{V_b} dV = -\int_a^b \frac{\sigma a dr}{\epsilon_0 \kappa_e r} = -\frac{\sigma a}{\epsilon_0 \kappa_e} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$V_b - V_a = -\frac{\sigma a}{\epsilon_0 \kappa_e} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Delta V = V_a - V_b = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 \kappa_e} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Parte (d) Capacitancia del sistema

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma L}{\frac{\sigma a}{\epsilon_0 \kappa_e} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

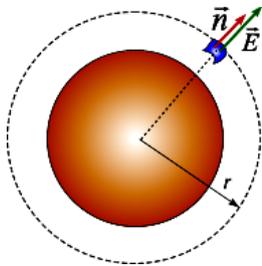
$$C = \frac{\epsilon_0 \kappa_e L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

18. Una esfera conductora de radio R en el vacío tiene una carga +Q. (a) Determine la energía potencial electrostática total almacenada en el espacio circundante. (b) ¿Cuál es el radio R₀ de la superficie esférica tal que dentro de ella quede almacenada la mitad de la energía?.

Solución

Parte (a) Cálculo de la energía potencial electrostática.

En primer lugar se determina el campo eléctrico en puntos exteriores a la esfera conductora



Para esto se aplica la ley de Gauss a la superficie gaussiana de radio r.

$$\oiint_{SG} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

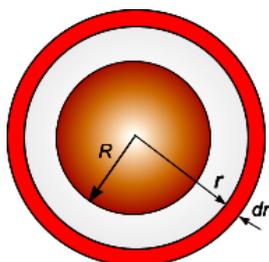
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad r > R$$

Se procede a determinar la densidad de energía

$$\mu_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2$$

$$\mu_E = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}$$

Para determinar la energía que existe en el espacio circundante dividimos a este en cascarones esféricos de radio r y espesor dr y se aplica la definición de densidad de energía



$$\mu_E = \frac{dU_e}{dv_{vol}} \Rightarrow dU_e = \mu_E dv_{vol}$$

$$dU_e = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} (4\pi r^2 dr) = \frac{Q^2 dr}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Integrando la expresión anterior, se tiene

$$U_e = \int dU_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$U_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad \text{Rta.}$$

Parte (b) Para determinar el radio R₀ para almacenar la mitad de la energía almacenada se tiene

$$\frac{1}{2} U_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^{R_0} \frac{dr}{r^2}$$

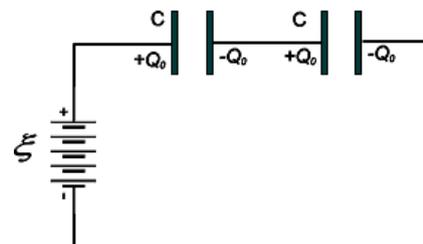
$$\frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \right) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)$$

$$R_0 = 2R \quad \text{Rta.}$$

19. A una fuente de f.e.m. ξ se le conectaron dos capacitores de placas paralelas de aire, cada uno de los cuales tiene una capacidad C. Luego uno de éstos se lleno completamente con un dieléctrico homogéneo, cuya constante dieléctrica es κ. ¿Cuántas veces disminuyó la intensidad de campo eléctrico en éste condensador?. ¿Qué carga circula a través de la fuente?.

Solución

El la figura (a) se muestra la instalación de los capacitores ante de la inserción del dieléctrico



Aplicando la segunda ley de Kirchoff, se tiene

$$\xi = \frac{Q_0}{C} + \frac{Q_0}{C} = Q_0 \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C} \right) = Q_0 \left(\frac{2}{C} \right)$$

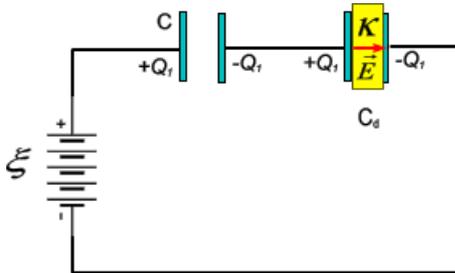
$$Q_0 = \frac{C\xi}{2} \quad (1)$$

El campo eléctrico en cada uno de los condensadores con aire entre sus placas, es

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A} = \frac{C\xi/2}{\epsilon_0 A}$$

$$E_0 = \frac{C\xi}{2\epsilon_0 A} \quad (2)$$

En la figura (b) se muestra el circuito cuando se instala el dieléctrico en uno de los capacitores



Aplicando la segunda ley de Kirchoff al circuito se tiene

$$\xi = \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_1}{C_d} = Q_1 \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_d} \right) = Q_1 \left(\frac{C + C_d}{CC_d} \right)$$

$$Q_1 = \frac{CC_d\xi}{C + C_d} = \frac{C(\kappa C)\xi}{C + \kappa C} = \frac{\kappa C\xi}{\kappa + 1} \quad (3)$$

Aplicando la ley de Gauss para dieléctricos se tiene.

$$\epsilon_0 \iint_S \kappa \vec{E} \cdot \vec{n} dA = q_{libre} \Rightarrow \kappa \epsilon_0 E(A) = Q_1$$

$$E = \frac{Q_1}{\kappa \epsilon_0 A} \quad (4)$$

Remplazando la ecuación (3) en (4), resulta

$$E = \frac{Q_1}{\kappa \epsilon_0 A} = \frac{\kappa C\xi / (\kappa + 1)}{\kappa \epsilon_0 A}$$

$$E = \frac{C\xi}{\epsilon_0 A(\kappa + 1)} \quad (5)$$

Parte (a) Relación entre campos eléctricos.

$$\frac{E_0}{E} = \frac{\frac{C\xi}{2\epsilon_0 A}}{\frac{C\xi}{\epsilon_0 A(\kappa + 1)}} \Rightarrow \frac{E_0}{E} = \frac{(\kappa + 1)}{2}$$

Parte (b). Carga que circula a través de la fuente de tensión.

$$\Delta Q = Q_1 - Q_0 = \frac{\kappa C\xi}{\kappa + 1} - \frac{C\xi}{2}$$

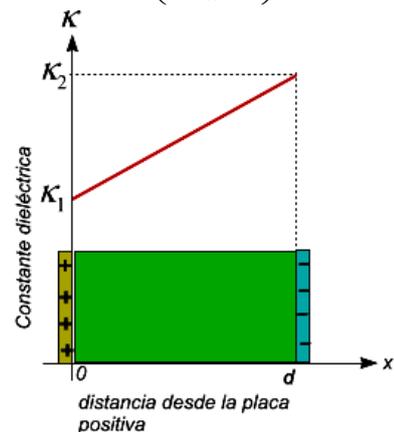
$$\Delta Q = \frac{C\xi}{2} \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right) \quad \text{Rta.}$$

20. El espacio entre las placas de un capacitor plano se llena con un dieléctrico isotrópico, cuya constante dieléctrica κ varía en dirección perpendicular a las placas según una ley lineal desde κ_1 hasta κ_2 , siendo $\kappa_1 > \kappa_2$. El área de las placas es A , mientras que la distancia de separación entre las placas es d . Determine: (a) La capacitancia del capacitor y (b) La densidad volumétrica de las cargas ligadas en función de κ , si la carga en el capacitor es Q y el campo eléctrico \vec{E} en él se orienta e el sentido de acrecentamiento de κ .

Solución

En la figura se muestra el capacitor así como la variación de κ . Una ecuación que relacione la constante dieléctrica será

$$\kappa = \kappa_1 + \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{d} \right) x \quad (1)$$



Se procede a determina el desplazamiento eléctrico aplicando la ley de Gauss a una superficie gaussiana en forma cúbica, esto es

$$\iint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dA = q_{libre} \Rightarrow D(A) = Q$$

$$D = \sigma_0 \Rightarrow \vec{D} = \sigma_0 \vec{i} \quad (2)$$

Debido a que el desplazamiento eléctrico está relacionado con el campo, se tiene

$$\vec{D} = \kappa \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\kappa \epsilon_0} = \frac{\sigma_0 \vec{i}}{\kappa \epsilon_0} \quad (3)$$

Remplazando la ecuación (1) en (3) se tiene

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \left[\kappa_1 + \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{d} \right) x \right]} \vec{i} \quad (4)$$

La diferencia de potencial será

$$\int_{V_+}^{V_-} dV = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_0^d \frac{\sigma_0 dx}{\epsilon_0 \left[\kappa_1 + \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{d} \right) x \right]}$$

Integrando la expresión anterior se obtiene

$$\Delta V = V_+ - V_- = \frac{\sigma_0 d}{\epsilon_0 (\kappa_2 - \kappa_1)} \ln \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \quad (5)$$

Parte (a). La capacitancia está dada por

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma_0 A}{\frac{\sigma_0 d}{\epsilon_0 (\kappa_2 - \kappa_1)} \ln \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)}$$

$$C = \frac{\sigma_0 A (\kappa_2 - \kappa_1)}{d \ln \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)} \text{ Rta.}$$

Parte (b). Densidad volumétrica de las cargas ligadas.

El vector polarización esta dado por

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \sigma_0 \vec{i} - \frac{\sigma_0 d}{\kappa_1 d + (\kappa_2 - \kappa_1) x} \vec{i}$$

La densidad de carga ligada se encuentra a partir de la ecuación $\nabla \cdot \vec{P} = -\rho_b$, entonces se tiene

$$\rho_b = - \frac{d}{dx} \left[\frac{\sigma_0 d}{\kappa_1 d + (\kappa_2 - \kappa_1) x} \right]$$

$$\rho_b = -\sigma_0 d \left[\frac{(\kappa_2 - \kappa_1)}{\left[\kappa_1 d + (\kappa_2 - \kappa_1) x \right]^2} \right]_{x=0}$$

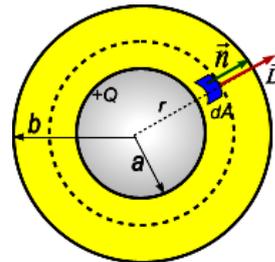
$$\rho_b = - \frac{\sigma_0 (\kappa_2 - \kappa_1)}{\kappa_1^2 d}$$

$$\rho_b = - \frac{Q (\kappa_2 - \kappa_1)}{\kappa_1^2 A d} \quad \text{Rta.}$$

21. Calcular la capacidad de un capacitor esférico el cual posee sus armaduras de radios a y $b > a$, que se llena con un dieléctrico isótropo, cuya constante dieléctrica varía según la ley $\kappa = \beta/r$, donde β es una constante y r es la distancia medida desde el centro.

Solución

En la figura se muestra el capacitor, así como la superficie gaussiana a utilizar para encontrar el desplazamiento eléctrico.



Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\iiint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dA = q_{\text{libre}} \Rightarrow D(4\pi r^2) = Q$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r$$

El campo eléctrico será

$$\vec{D} = \kappa \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\kappa \epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \kappa r^2} \vec{e}_r$$

La diferencia de potencial será

$$\int_{V_a}^{V_b} dV = - \int_a^b E dr = - \int_a^b \frac{Q dr}{4\pi \epsilon_0 \kappa r^2}$$

Remplazando el valor de $\kappa = \beta/r$, se tiene

$$\Delta V = V_a - V_b = \int_a^b \frac{Q dr}{4\pi \epsilon_0 (\beta/r) r^2} = \int_a^b \frac{Q dr}{4\pi \epsilon_0 \beta r}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\beta} \ln(b/a)$$

La capacitancia del capacitor será

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\beta} \ln(b/a)}$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\beta}{\ln(b/a)} \quad \text{Rta.}$$

22. Considere dos alambres largos, paralelos y de cargas opuestas, de radios d y con una separación D entre sus centros. Suponiendo que la carga está distribuida uniformemente es la superficie de cada uno de los alambres demuestre que la capacitancia por unidad de longitud de este par de alambres es de

$$\frac{C}{l} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{D-d}{d}\right)}$$

Solución

El campo eléctrico debido a la carga sobre el alambre positivo es perpendicular al alambre, de dirección radial y de magnitud.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r \quad (1)$$

La diferencia de potencial entre alambres debido a la presencia de esta carga es

$$\Delta V_1 = - \int_{\text{alambre}(-)}^{\text{alambre}(+)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{D-d}^d \frac{dr}{r}$$

$$\Delta V_1 = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D-d}{d}\right) \quad (2)$$

La presencia de la densidad de carga $-\lambda$ sobre el alambre negativo hace una contribución idéntica a la diferencia de potencial entre los alambres. Por lo tanto, la diferencia de potencial total será.

$$\Delta V = 2|\Delta V_1| = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D-d}{d}\right)$$

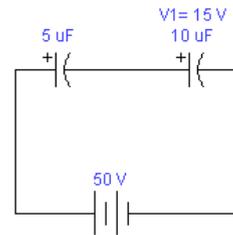
La capacitancia de este sistema de dos alambres de longitud l será

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D-d}{d}\right)} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{D-d}{d}\right)}$$

La capacitancia por unidad de longitud será.

$$\frac{C}{l} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{D-d}{d}\right)}$$

23. Un capacitor de $10 \mu\text{F}$ está cargado a 15 V . A continuación se le conecta en serie con un capacitor de $5 \mu\text{F}$ sin carga. Esta combinación en serie se conecta a una batería de 50 V , según el diagrama de la figura. Determine las diferencias de potencial que se presentan en las terminales de los capacitores de $5 \mu\text{F}$ y $10 \mu\text{F}$.



Solución

La carga inicial en el capacitor de $10 \mu\text{F}$ es

$$Q = CV_1 = 10\mu\text{F} (15\text{V}) = 150\mu\text{C}$$

Después que se instala los capacitores a la fuente de tensión, dicha fuente transfiere una carga q , dando al capacitor pequeño de $5\mu\text{F}$ una carga q y al capacitor de $10 \mu\text{F}$ una carga de $(150\mu\text{F} + q)$.

Para determinar q se aplica la segunda ley de Kirchoff al circuito, esto es

$$50\text{V} = \frac{q}{5\mu\text{F}} + \frac{150\mu\text{F} + q}{10\mu\text{F}}$$

$$500 = 2q + 150 + q$$

$$q = 117\mu\text{C}$$

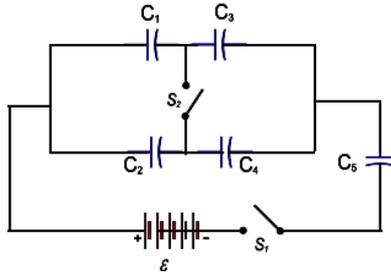
La diferencia de potencial en el capacitor de $5 \mu\text{F}$ será

$$\Delta V_5 = \frac{q}{5\mu\text{F}} = \frac{117\mu\text{C}}{5\mu\text{F}} = 23,3\text{V}$$

La diferencia de potencial en el capacitor de $10 \mu\text{F}$ será

$$\Delta V_{10} = \frac{q + 150\mu\text{C}}{10\mu\text{F}} = \frac{267\mu\text{C}}{10\mu\text{F}} = 26,7\text{V}$$

24. La figura muestra una batería de 50 V y cuatro capacitores de capacitancias $C_1 = 1 \mu F$, $C_2 = 2 \mu F$, $C_3 = 3 \mu F$, $C_4 = 4 \mu F$ y $C_5 = 5 \mu F$. Encuentre: (a) la carga en cada uno de los capacitores si sólo se cierra la llave S_1 y (b) la carga en cada uno de los capacitores después de cerrar también la llave S_2 .



Parte (a) Cuando el interruptor S_1 está cerrado y S_2 se mantiene abierto el circuito es el mostrado en la figura (a)

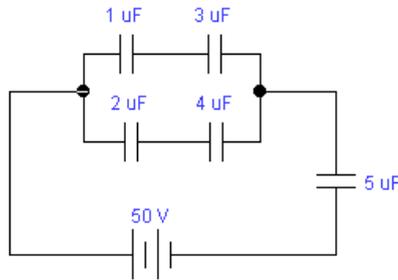


Fig (a)

Los capacitores de $1\mu F$ y $3\mu F$, se encuentran en serie; de igual forma se encuentran en serie los capacitores de $2 \mu F$ y $4 \mu F$, entonces después de la reducción se tiene

$$C_a = \frac{1\mu F(3\mu F)}{1\mu F + 3\mu F} = \frac{3}{4} \mu F$$

$$C_b = \frac{2\mu F(4\mu F)}{2\mu F + 4\mu F} = \frac{4}{3} \mu F$$

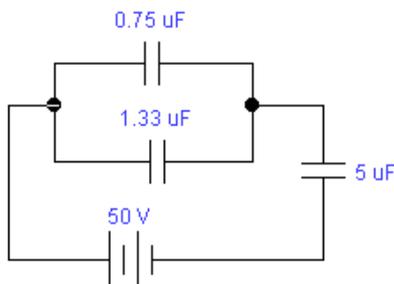


Fig (b)

Los capacitores de $0,75 \mu F$ y $1,33 \mu F$ se encuentran en paralelo, entonces su capacidad equivalente es

$$C_c = 0,75 \mu F + 1,33 \mu F = 2,08 \mu F$$

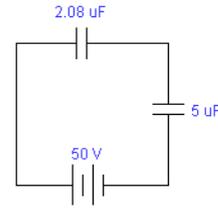


Fig c

Aplicando la segunda ley de Kirchoff, se tiene

$$+50V - \frac{Q_1}{2,08 \mu F} - \frac{Q_1}{5 \mu F}$$

$$Q_1 \left(\frac{1}{2,08} + \frac{1}{5} \right) = 50V$$

$$Q_1 \left(\frac{5 + 2,08}{5(2,08)} \right) = 50V$$

$$Q_1 = 73,45 \mu C$$

Es decir la carga en los capacitores de $2,08 \mu F$ y $5 \mu F$, es

$$Q_{2,08} = Q_5 = 73,45 \mu C$$

La diferencia de potencial en el capacitor de $2,08 \mu F$, es

$$\Delta V_{2,08} = \frac{Q_{2,08}}{C_{2,08}} = \frac{73,45 \mu C}{2,08 \mu F} = 35,31V$$

Debido a que el capacitor de $2,08 \mu F$ es el resultado de los dos capacitores en paralelo $C_{1,33}$ y $C_{0,75}$, estos tendrán la misma diferencia de potencial, esto es

$$\Delta V_{1,33} = \Delta V_{0,75} = \Delta V_{2,08} = 35,31V$$

La carga en estos capacitores será

$$Q_{1,33} = C_{1,33} \Delta V_{1,33} = 1,33 \mu F (35,31V) = 46,96 \mu C$$

$$Q_{0,75} = C_{0,75} \Delta V_{0,75} = 0,75 \mu F (35,31V) = 26,48 \mu C$$

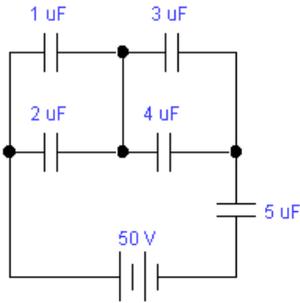
Debido a que capacitor $C_{0,75}$ es el resultado de los capacitores en serie $C_1 = 1 \mu F$ y $C_3 = 3 \mu F$, entonces estos tendrán la misma carga, esto es

$$Q_{0,75} = Q_1 = Q_3 = 26,48 \mu C$$

Análogamente ocurre con los capacitores de $2 \mu\text{F}$ y $4\mu\text{F}$, es decir

$$Q_{1,33} = Q_2 = Q_4 = 46,96 \mu\text{C}$$

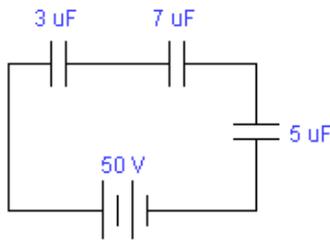
Parte (b) Cuando ambos interruptores están cerrados, entonces se tiene



Los capacitores de $1\mu\text{F}$ y de $2\mu\text{F}$ están en paralelo y también los capacitores de $3\mu\text{F}$ y $4\mu\text{F}$ están en paralelo, entonces sus capacidades equivalentes son

$$C_a = 1\mu\text{F} + 2\mu\text{F} = 3\mu\text{F}$$

$$C_b = 3\mu\text{F} + 4\mu\text{F} = 7\mu\text{F}$$



Aplicando la ley de Kirchoff, resulta

$$50\text{V} - \frac{q_0}{3\mu\text{F}} - \frac{q_0}{7\mu\text{F}} - \frac{q_0}{5\mu\text{F}} = 0$$

$$q_0 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{5} \right) = 50$$

$$q_0 \left(\frac{35 + 15 + 21}{105} \right) = 50 \Rightarrow q_0 = 73,94 \mu\text{C}$$

La diferencia de potencial en los capacitores de $3 \mu\text{F}$ y $7\mu\text{F}$, es

$$\Delta V_3 = \frac{q_0}{C_3} = \frac{73,94 \mu\text{C}}{3\mu\text{F}} = 24,65\text{V}$$

$$\Delta V_7 = \frac{q_0}{C_7} = \frac{73,94 \mu\text{C}}{7\mu\text{F}} = 10,56\text{V}$$

Debido a que el capacitor de $3 \mu\text{F}$ es el resultado de los dos condensadores C_1 y C_2 en paralelo, sus diferencias de potencial son las mismas, entonces

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = 24,65\text{V}$$

Entonces las cargas en ellos serán.

$$q_1 = C_1(\Delta V_1) = 1\mu\text{F}(24,65\text{V}) = 24,65 \mu\text{C}$$

$$q_2 = C_2(\Delta V_2) = 2\mu\text{F}(24,65\text{V}) = 49,3 \mu\text{C}$$

De igual forma el capacitor de $7\mu\text{F}$ es el resultado de los dos capacitores en paralelo $C_3 = 3 \mu\text{F}$ y $4\mu\text{F}$. Entonces su diferencia de potencial es la misma

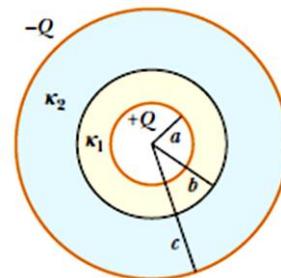
$$\Delta V_3 = \Delta V_4 = \Delta V_7 = 10,56\text{V}$$

Entonces las carga en estos condensadores será

$$q_3 = C_3(\Delta V_3) = 3\mu\text{F}(10,56\text{V}) = 31,68 \mu\text{C}$$

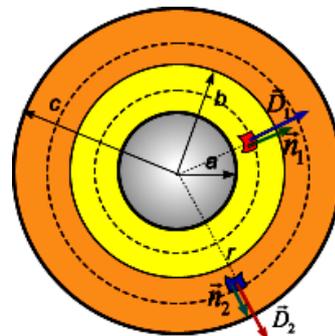
$$q_4 = C_4(\Delta V_4) = 4\mu\text{F}(10,56\text{V}) = 42,24 \mu\text{C}$$

25. Un capacitor cilíndrico de longitud L tiene un radio interno a y un radio exterior c . El espacio entre estas dos superficies es llenado con un dieléctrico para el cual la constante dieléctrica es κ_1 entre a y b , y otro dieléctrico κ_2 entre b y c , como se muestra en la figura. Determine la capacitancia de este sistema



Solución

Parte (a). Aplicando la ley de Gauss a las superficies gaussianas cilíndricas cuya sección transversal se muestra representadas con líneas punteadas, se tiene



$$\oiint_{SG} \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 dA = q_{libre} \Rightarrow D_1(2\pi rL) = \lambda L'$$

$$D_1 = \frac{\lambda L'}{2\pi r L'} = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad a \leq r \leq b$$

$$\oiint_{SG} \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 dA = q_{libre} \Rightarrow D_2(2\pi r L') = \lambda L'$$

$$D_2 = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad b \leq r \leq c$$

Parte (b). Cálculo de los campos eléctricos.

$$D_1 = \varepsilon_0 \kappa_1 E_1 = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \kappa_1 r}$$

$$D_2 = \varepsilon_0 \kappa_2 E_2 = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \kappa_2 r}$$

Parte (c). Cálculo de la diferencia de potencial

$$dV = -E_1 dr - E_2 dr$$

$$dV = -\frac{\lambda dr}{2\pi \varepsilon_0 \kappa_1 r} - \frac{\lambda dr}{2\pi \varepsilon_0 \kappa_2 r}$$

$$\int_{V_a}^{V_b} dV = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \kappa_1} \int_a^b \frac{dr}{r} - \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \kappa_2} \int_b^c \frac{dr}{r}$$

$$V_b - V_a = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \kappa_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \kappa_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\Delta V = V_a - V_b = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \left[\frac{1}{\kappa_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\kappa_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \right]$$

Parte (d). Cálculo de la capacitancia

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q/L}{2\pi \varepsilon_0} \left[\frac{1}{\kappa_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\kappa_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \right]}$$

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 L}{\left[\frac{1}{\kappa_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\kappa_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \right]}$$

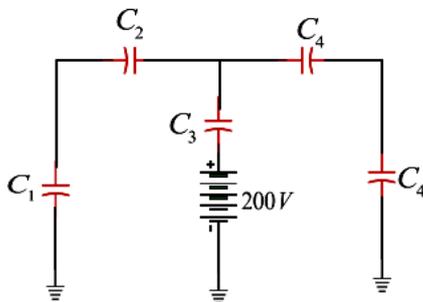
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dos condensadores $C_1 = 1\mu\text{F}$ y $C_2 = 2\mu\text{F}$ se conectan en paralelo a una línea de 1200 V. (a) Halle la carga de cada capacitor y (b) Los condensadores cargados se desconectan de la red y ellos entre sí, y se vuelven a conectar con las laminas de distintos signos juntas. Determine la carga final de cada capacitor y su voltaje respectivo.

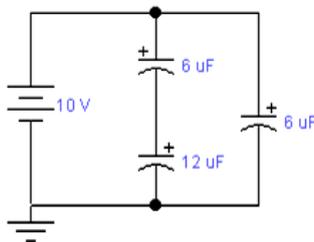
Rta: a) $1200\mu\text{C}$, $2400\mu\text{C}$; (b) $400\mu\text{C}$, $800\mu\text{C}$, 400V

2. Un capacitor de capacidad $C_1 = 1,2\mu\text{F}$ se conecta en paralelo con una fuente de tensión que posee una diferencia de potencial $V_0 = 30\text{ V}$. Después de la carga se desconecta C_1 de la fuente de voltaje y se conecta en paralelo a otro condensador completamente descargado cuya capacidad es $C_2 = 2,4\mu\text{F}$. (a) Determine la nueva diferencia de potencial V_1 , (b) ¿Cuánta energía se perdió al realizar la conexión?

3. Suponiendo que todos los capacitores que aparecen en la figura son idénticos ($C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 2\mu\text{F}$). Determine: (a) la capacidad equivalente, (b) la diferencia de potencial entre las armaduras del capacitor C_4 y (c) las cargas en los capacitores C_1 y C_3 .



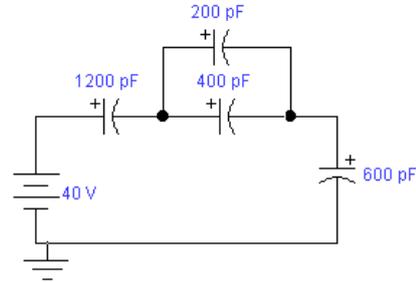
4. En el circuito capacitivo, determine: (a) la capacitancia equivalente y (b) el voltaje y la carga en cada uno de los capacitores.



5. Un capacitor de placas paralelas tiene las placas de 2 m^2 de área y una separación de 1 mm . Se carga a 100 V . (a) ¿Cuál es el campo eléctrico existente entre las placas?. (b) ¿Cuál es la energía por unidad de volumen en el espacio situado entre las placas?. (c) ¿Cuál es la capacitancia del capacitor?.

Rta. a) 10^5V/m , b) $44,3\text{ mJ/m}^3$, c) $17,7\text{ nF}$

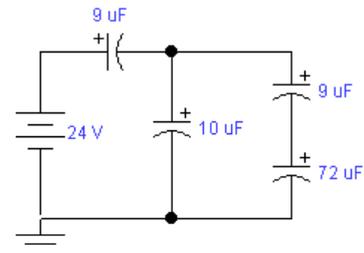
6. En el circuito capacitivo, determine: (a) la capacitancia equivalente y (b) el voltaje y la carga en cada uno de los capacitores.



7. Un condensador de placas paralelas con placas de área 500 cm^2 se carga con una diferencia de potencial V y después se desconecta de la fuente de voltaje. Cuando las placas se separan $0,4\text{ cm}$, el voltaje entre ellas se incrementa en 100 V . (a) ¿Cuánto vale la carga Q depositada sobre la palca positiva del capacitor?. (b) ¿En cuánto ha crecido la energía almacenada en el capacitor a causa del movimiento de las placas?.

Rta. a) $11,1\text{ nC}$; b) $55,3\mu\text{J}$

8. La batería de 24 V se utiliza para cargar a los capacitores mostrados en la figura. Determine: (a) la capacidad equivalente del sistema, (b) la diferencia de potencial en cada capacitor, (c) la carga en cada uno de los capacitores y (c) la energía almacenada en el capacitor de $72\mu\text{F}$



9. Un condensador de $1,2\mu\text{F}$ se carga a 30 V . Después de estar completamente cargado, se desconecta con cuidado de la fuente de voltaje y se conecta a otro condensador descargado. El voltaje final es de 10 V . (a) ¿Cuál es la capacidad del segundo capacitor?. (b) ¿Cuánta energía se perdió al realizar la conexión?

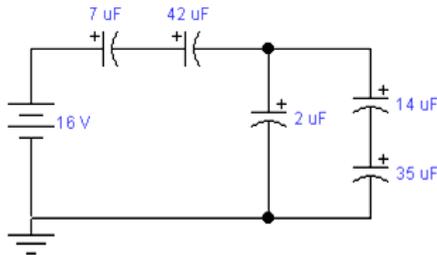
Rta. a) $2,4\mu\text{F}$, (b) 36 mJ

10. Halle todas las capacidades efectivas posibles que pueden obtenerse utilizando tres capacitores de $1\mu\text{F}$, $2\mu\text{F}$ y $4\mu\text{F}$ en cualquier combinación que incluya a los tres o a dos cualesquiera de los condensadores

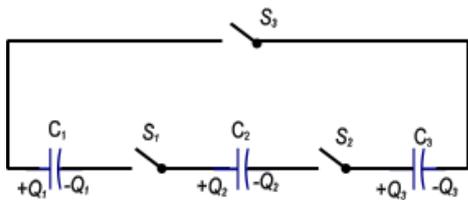
11. El voltaje a través de un capacitor de placas paralelas con una separación entre las placas de $0,5 \text{ mm}$ es de 1200 V . el capacitor se desconecta de la fuente de voltaje y la separación entre las placas se incrementa hasta que la energía almacenada en el condensador se duplica. Determine la separación final entre las placas.

Rta. 1 mm

12. La batería de 24 V se utiliza para cargar a los capacitores mostrados en la figura. Determine: (a) la capacidad equivalente del sistema, (b) la diferencia de potencial en cada capacitor, (c) la carga en cada uno de los capacitores y (c) la energía almacenada en el capacitor de $42 \mu\text{F}$.

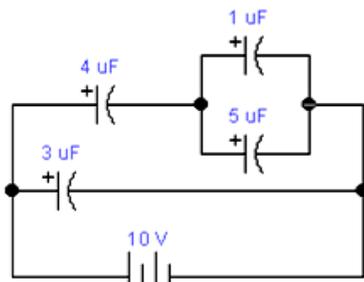


13. Tres condensadores $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 4 \mu\text{F}$, $C_3 = 6 \mu\text{F}$, conectados en paralelo se cargan con una fuente de 200 V . a continuación se desconectan de la fuente de voltaje y se conectan de nuevo las placa positivas con las negativas como se indica en la figura. (a) ¿Cuál es el voltaje a través de cada uno de los capacitores con los interruptores S_1 y S_2 cerrados, pero con el S_3 abierto. (b) después de cerrar S_3 ¿cuál es la carga final de cada capacitor?. (c) determine el voltaje a través de cada capacitor después de cerrar S_3 .

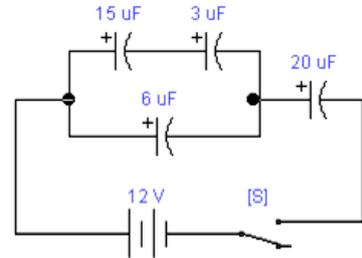


Rta. (a) 200 V , (b) $Q_1 = -533 \mu\text{C}$, $Q_2 = -133 \mu\text{C}$, $Q_3 = 267 \mu\text{C}$; (c) $V_1 = -267 \text{ V}$, $V_2 = -133 \text{ V}$, $V_3 = 400 \text{ V}$

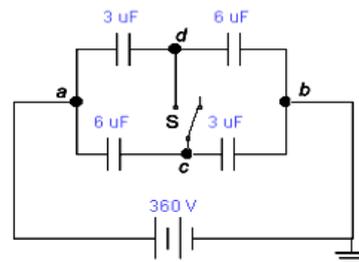
14. Encuentre la capacitancia equivalente de la combinación que se muestra en la figura. Halle también la carga en el capacitor de $4 \mu\text{F}$.



15. Cuatro capacitores está, conectados como se muestra en la figura. (a) Encuentre la capacidad equivalente del sistema. (b) Encuentre la carga en cada uno de los capacitores cuando el interruptor se encuentra cerrado.

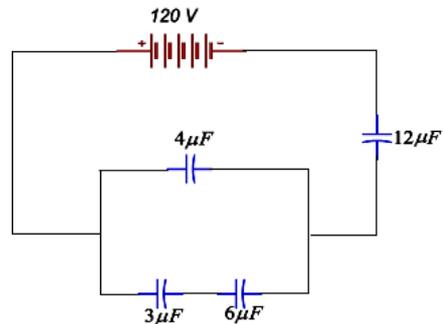


16. Los capacitores de la figura están inicial y se les conecta como se muestra en la figura. Determine: (a) la diferencia de potencial V_{cd} cuando el interruptor S se encuentra abierto, (b) El potencial del punto c cuando S está abierto, (c) la diferencia de potencial a través de cada capacitor cuando S se encuentra cerrado y (d) el potencial del punto d cuando S se encuentra cerrado.



Rta. (a) 120 V , (c) $V_6 = V_3 = 180 \text{ V}$

17. En el circuito capacitivo mostrado en la figura, determine: (a) La capacitancia total del circuito, (b) La carga total del circuito completo, (c) la diferencia de potencial en el capacitor de $4 \mu\text{F}$ y (d) la energía almacenada en el capacitor de $3 \mu\text{F}$.

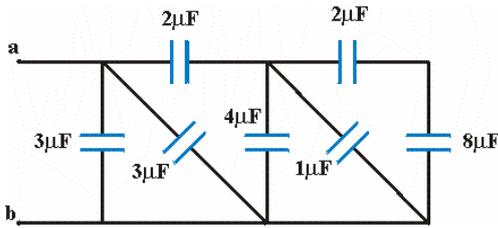


18. Dos capacitores idénticos, de placas planas y paralelas y capacidad $C = 4 \mu\text{F}$ cada uno se conectan en serie a través de una batería de 24 V . (a) ¿Cuál es la carga de cada uno de los capacitores? (b) ¿Cuál es la energía total almacenada por los capacitores?. Un dieléctrico de constante $\kappa_e = 4,2$ se inserta entre las placas de uno de los

capacitores mientras la batería todavía está conectada.

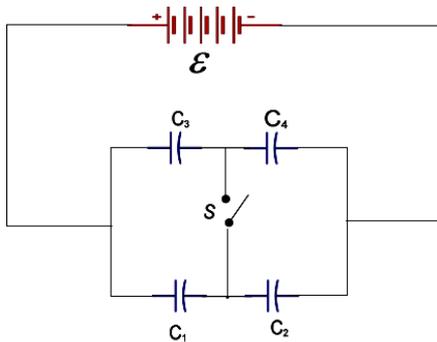
- (c) Una vez insertado el dieléctrico ¿Cuál es la carga sobre cada capacitor?.
- (d) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada capacitor?.
- (e) ¿Cuál es la energía total almacenada en los capacitores.

19. En el sistema determine: (a) la capacidad efectiva entre los puntos *a* y *b*; (b) si a los extremos *a* y *b* se le aplica una diferencia de potencial de 240 V, ¿Cuál será la energía almacenada en el capacitor de 4 μF?.

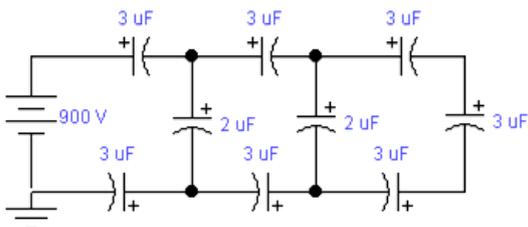


Rta: (a) 7,53 μF

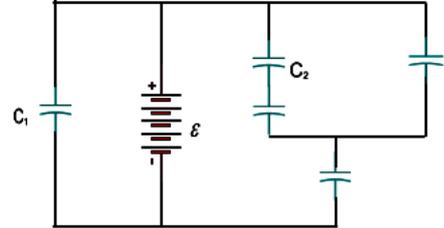
20. La batería de 25 V carga a los cuatro capacitores mostrados en la figura. Sabiendo que $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $C_3 = 3 \mu\text{F}$ y $C_4 = 4 \mu\text{F}$. Determine: (a) la capacidad equivalente del circuito cuando el interruptor *S* está abierto, (b) la carga en cada uno de los capacitores cuando el interruptor *S* se encuentra abierto y (c) la carga en cada uno de los capacitores cuando el interruptor se encuentra cerrado.



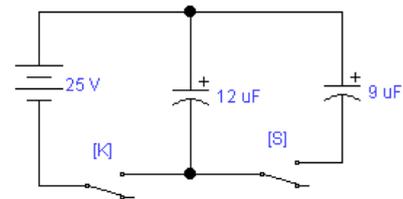
21. En la figura mostrada la batería proporciona una diferencia de potencial $\Delta V = 900 \text{ V}$. Determine: (a) La capacidad equivalente del sistema, (b) la carga de los capacitores más próximos a la fuente y (c) la energía almacenada por el sistema de capacitores.



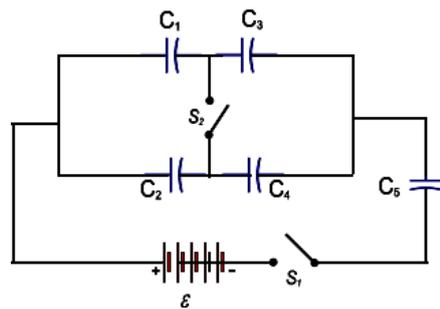
22. En la figura mostrada, la batería proporciona una diferencia de potencial de $\mathcal{E} = 36 \text{ V}$ y cada uno de los cinco condensadores tienen una capacitancia de $10 \mu\text{F}$. Determine: (a) la capacidad equivalente del sistema, (b) la carga en los capacitores C_1 y C_2 , (c) La energía almacenada por el sistema



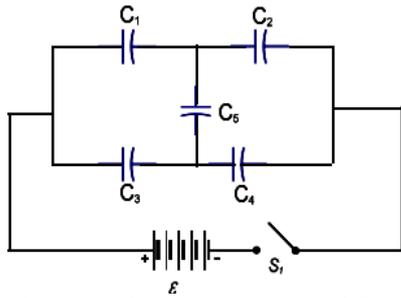
23. Considere el circuito que se muestra en la figura. Primero se carga el capacitor $C_1 = 12 \mu\text{F}$, cerrando el interruptor *K*. Después este interruptor es abierto, y el capacitor cargado se conecta al otro capacitor $C_2 = 9 \mu\text{F}$ inicialmente descargado, cerrando *S*. Determine la carga inicial adquirida por C_1 , así como la carga final en cada uno de los capacitores



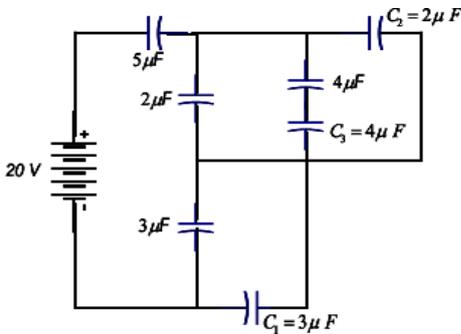
24. La figura muestra una batería de 50 V y cinco capacitores de capacitancias $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $C_3 = 3 \mu\text{F}$, $C_4 = 4 \mu\text{F}$ y $C_5 = 5 \mu\text{F}$. Encuentre: (a) la carga en cada uno de los capacitores si sólo se cierra la llave S_1 y (b) la carga en cada uno de los capacitores después de cerrar también la llave S_2 .



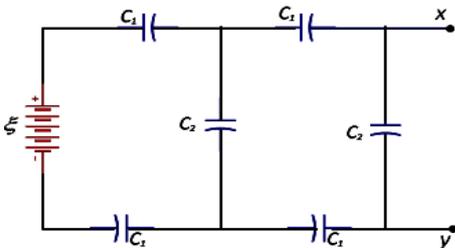
25. La batería mostrada proporciona una diferencia de potencial de 24 V para cargar el sistema de capacitores mostrados en la figura. Si $C_1 = C_3 = 4 \mu\text{F}$; $C_2 = C_4 = 12 \mu\text{F}$ y $C_5 = 9 \mu\text{F}$ Después de cerrar el interruptor S_1 , determine: (a) La carga en cada uno de los capacitores, (b) la diferencia de potencial en cada uno de ellos, (c) la capacitancia del condensador equivalente y (c) la energía almacenada en C_4



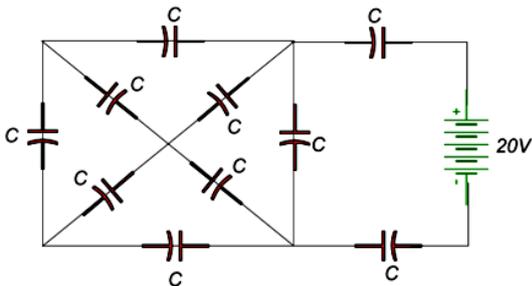
26. La batería mostrada suministra una diferencia de potencial de 20 V permitiendo cargar a los capacitores mostrados en la figura. Determine: (a) la capacidad equivalente del sistema, (b) la carga almacenada en cada uno de los capacitores, (c) el potencial en los capacitores C_1 , C_2 y C_3 y (c) la energía almacenada por el sistema.



27. Para el sistema de capacitores mostrado, determine la diferencia de potencial entre los punto x e y , si la batería proporciona una f.e.m. de 110 V y la relación entre las capacidades es $C_2 / C_1 = \eta = 2$

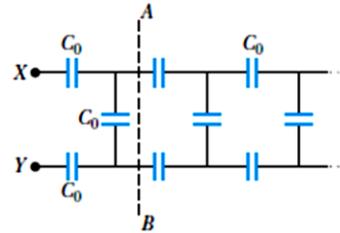


28. En el circuito capacitivo mostrado en la figura halle la energía almacenada por el sistema si $C = 19\text{ μF}$.

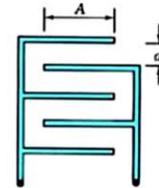


29. Algunos sistemas físicos que tienen capacitancia distribuida de manera continua en el espacio se puede representar como un arreglo infinito de

elementos discretos de circuito. Con la finalidad de practicar el análisis de un arreglo infinito, determine la capacitancia C equivalente entre los terminales X e Y del conjunto infinito de capacitores que se muestra en la figura. Cada uno de los capacitores tiene una capacitancia C_0

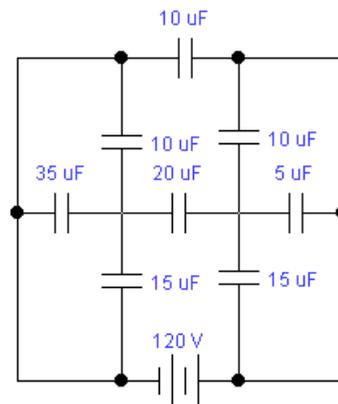


30. Un capacitor consiste de dos placas intercaladas, como se muestra en la figura. La separación de placas y el área efectiva de solapamiento se muestra en dicha figura. ¿Cuál es la capacitancia de este sistema?.

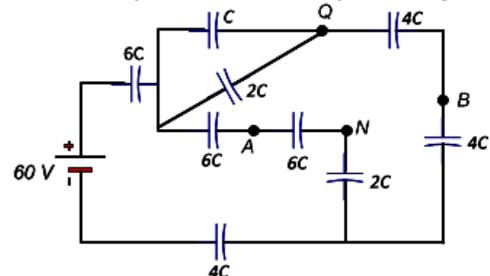


Rta. $C = 4\epsilon_0 A / d$

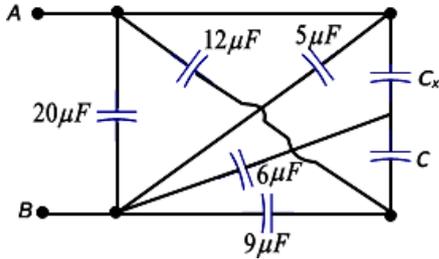
31. En el circuito determine: (a) la capacidad equivalente del sistema, (b) La energía total almacenada y (d) la diferencia de potencial en todos los capacitores



32. Si se cortocircuita los puntos Q y N. Determine la diferencia de potencial entre los puntos A y B.

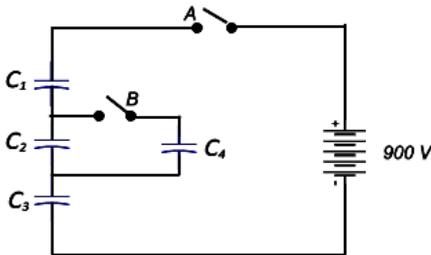


33. Determine la capacidad C_x para que la capacitancia equivalente del sistema de capacitores mostrados en la figura respecto de los puntos A y B no dependa del valor de la capacidad C. Todas las capacidades están en microfaradios

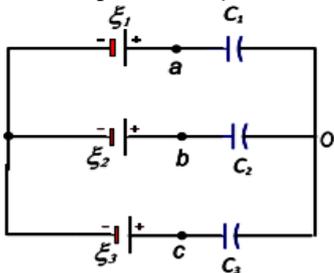


Rta. $8\mu F$

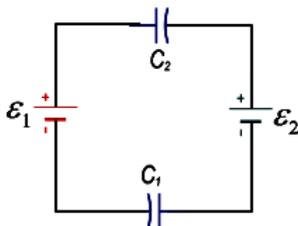
34. Cuatro capacitores idénticos de capacidad C, están conectados como se muestra en la figura. (a) al comienzo de la experiencia, el interruptor B se mantiene abierto y el interruptor A está cerrado y luego se abre. Ahora el interruptor B se cierra. ¿Cuál es la diferencia de potencial en cada uno de los capacitores?. (b) Partiendo de los capacitores descargados el interruptor B está cerrado. Si el interruptor A se cierra. ¿Cuál es la diferencia de potencial en cada capacitor?.



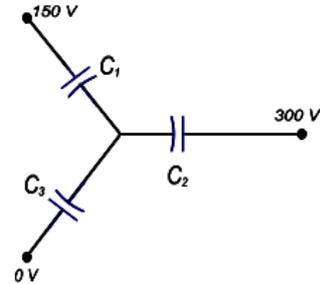
35. En el circuito capacitivo mostrado en la figura, suponga que el potencial del punto O es igual a cero. Bajo esta suposición, determine los potenciales de los puntos a, b y c.



36. Determine la carga en cada uno de los capacitores en el circuito mostrado



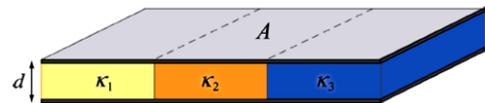
37. En el circuito mostrado en la figura, las capacitancias de los tres capacitores son $C_1 = 1\mu F$, $C_2 = 2\mu F$ y $C_3 = 3\mu F$. Determine la carga en cada uno de los capacitores.



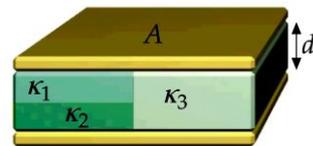
38. Un capacitor de placas planas paralelas de área A y espaciamiento d es llenado con tres dieléctricos como se muestra en la figura. Cada dieléctrico ocupa 1/3 del volumen. ¿Cuál es la capacitancia de este sistema?.



39. Un capacitor de placas planas paralelas de área A y espaciamiento d es llenado con tres dieléctricos como se muestra en la figura. Cada dieléctrico ocupa 1/3 del volumen. ¿Cuál es la capacitancia de este sistema?.

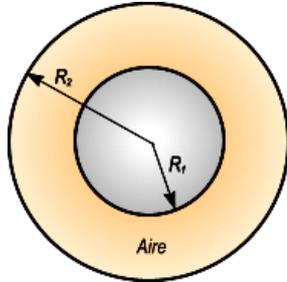


40. Un capacitor de placas paralelas es construido usando tres diferentes materiales dieléctricos, como se muestra en la figura. Determine: (a) una expresión para la capacidad del dispositivo en términos del área A, la distancia d y las constantes dieléctricas κ_1 , κ_2 , y κ_3 , (b) la capacitancia usando los valores $A = 1\text{ cm}^2$, $d = 2\text{ mm}$, $\kappa_1 = 4,9$, $\kappa_2 = 5,6$ y $\kappa_3 = 2,1$

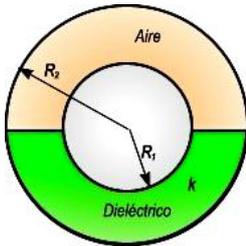


41. Considere un capacitor consistente de dos superficies cilíndricas concéntricas con radios $R_1 = 5\text{ cm}$ y $R_2 = 9\text{ cm}$ como se muestra en la figura. Los cilindros concéntricos tienen una longitud de $h = 225\text{ cm}$. El espacio entre y alrededor de las superficies está lleno con aire hasta que el capacitor es cargado. Una fuente, la cual tiene una fem de $64,0\text{ V}$, es conectada entre las dos

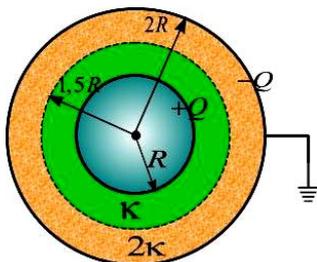
superficies hasta que el capacitor es completamente cargados. (a) ¿Cuál es la capacitancia de este capacitor cilíndrico?, (b) ¿qué cantidad de carga será almacenada en cada una de las cascaras después de que el capacitor está completamente cargado? y (c) ¿Qué cantidad de carga almacenará dicho capacitor cuando se cargue completamente?



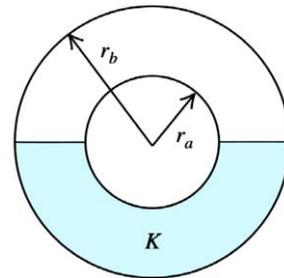
42. Suponga que el condensador del problema 41 se llena la mitad del espacio entre las dos cáscaras cilíndricas con un aceite mineral que tiene una constante dieléctrica $\kappa = 2,1$, mientras la otra mitad permanece con aire como se ilustra en la figura. Si $R_1 = 5\text{ cm}$ y $R_2 = 10\text{ cm}$ ¿Cuál sería la nueva capacitancia de este capacitor cilíndrico?, (b) ¿Cuánta carga fluiría fuera o dentro del capacitor como resultado de la adición del aislante líquido.



43. Un capacitor consiste en una esfera conductora interior de radio R y un cascarón conductor de radio interior $2R$ ubicadas coaxialmente. El espacio entre las esferas es llenado con dos dieléctricos lineales diferentes, uno con una constante κ desde $r = R$ hasta $r = 1,5R$ y el otro con una constante dieléctrica 2κ desde $r = 1,5R$ hasta $r = 2,5R$. Si el conductor interior tiene una carga $+Q$ y la cáscara conductora tiene una carga $-Q$. Determine: (a) El vector desplazamiento eléctrico en cada uno de los dieléctricos, (b) El campo eléctrico en cada uno de los dieléctricos, (c) la diferencia de potencial entre los conductores y (d) la capacitancia efectiva del capacitor.



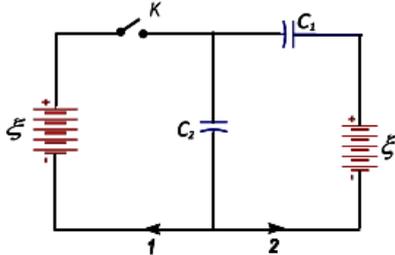
44. Un capacitor esférico aislado tiene una carga $+Q$ en su conductor interior (radio r_a) y una carga $-Q$ en su conductor exterior (radio r_b). La mitad del volumen entre los dos conductores se llena con un dieléctrico líquido de constante κ como se muestra en la figura. Determine: (a) La capacidad del capacitor formado, (b) La magnitud del campo eléctrico \vec{E} y del desplazamiento eléctrico en todas las regiones comprendidas del capacitor, (c) la densidad de carga superficial libre en la mitad superior e inferior de los conductores interno y externo, (d) la densidad de carga superficial ligada de las superficies interna del dieléctrico.



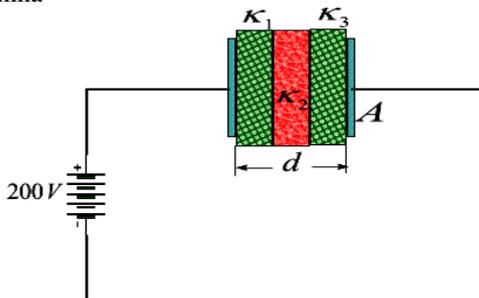
45. Entre las dos superficies esféricas concéntricas de 10 cm y 12 cm de radios se establece una diferencia de potencial de 1600 V . Si se coloca entre ellas aceite de tal manera que llene el espacio entre las armaduras, el potencial se reduce a 400 V . Determine: (a) la constante dieléctrica del aceite utilizado y (b) la energía almacenada por el capacitor antes y después de añadir el aceite.
46. Un capacitor es conectado a una fuente de voltaje de 150 V y es cargado hasta alcanzar una carga de 32 nC . Sin ser descargado es entonces conectado a una fuente de 450 V . ¿Qué cantidad de carga adicional es almacenada finalmente por el capacitor?.
47. Un capacitor de $5,7\text{ nF}$ está formado por dos placas cuadradas paralelas separadas $0,35\text{ mm}$. ¿Qué cantidad de carga es almacenada sobre las placas cuando es aplicada una diferencia de potencial de 230 V al capacitor?, Con el capacitor todavía conectado a la fuente de voltaje la separación entre las placas es disminuida $0,25\text{ mm}$. ¿Cuál es el nuevo valor de la carga almacenada en el capacitor?.
48. Dos capacitores de placas paralelas en el vacío tienen áreas iguales y sus placas están separadas las distancias d_1 y d_2 , respectivamente. Muestre que cuando los capacitores están conectados en serie, la capacitancia equivalente es la misma que la de un capacitor simple con área A y espaciamiento $d_1 + d_2$.
49. Dos capacitores de placas planas y paralelas en el vacío tienen área A_1 y A_2 y sus separaciones son iguales a d . Muestre que cuando los capacitores son

conectados en paralelo, la capacidad del condensador equivalente es la misma que de un capacitor simple de área de sus placas A_1 A_2 y espaciamiento d .

50. ¿Qué cargas circulan después de la conexión del interruptor K del circuito capacitivo mostrado en la figura a través de las secciones 1 y 2 en los sentidos marcados con las flechas?



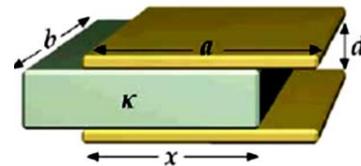
51. Un capacitor de laminas plano paralelas cuya superficie es $A = 100 \text{ cm}^2$ y cuya separación entre placas es $d = 6 \text{ mm}$ se carga hasta un potencial $V_0 = 200 \text{ V}$. Sin desconectarlo de la batería se introducen en él tres láminas planas de dieléctrico de igual espesor que ocupan todo el volumen entre las armaduras. Si la constante dieléctrica de la lámina central es $\kappa_2 = 5$ y las de las laterales es $\kappa_1 = \kappa_3 = 2,5$. Determinar: (a) la capacidad C_0 del condensador sin dieléctrico, así como la carga Q_0 y la densidad de carga superficial. (b) la capacidad C_d del capacitor cuando lleva las láminas de dieléctrico indicadas en su interior. (c) la densidad de carga en las placas una vez están dentro los dieléctricos. (d) El campo eléctrico en cada lámina de dieléctrico y (e) la caída de potencial en cada lámina



52. El área y la separación de las placas de los dos capacitores mostrados en la figura son idénticos. La mitad de la región entre las placas del capacitor C_1 se llena con un dieléctrico de constante κ . ¿Qué fracción de volumen del capacitor C_2 debe llenarse con el mismo dieléctrico de modo que los dos condensadores tengan igual capacitancia



53. Un condensador de placas paralelas rectangulares de longitud a y ancho b con cargas $+Q$ y $-Q$, posee un dieléctrico de igual anchura insertado parcialmente una distancia x entre las placas como se indica en la figura. (a) Determine la capacidad en función de x , despreciando los efectos de borde. (b) Comprobar que la respuesta ofrece los resultados esperados para $x = 0$ y $x = a$. (c) Determine la energía almacenada en función de x . (d) determine la fuerza que actúa sobre el bloque de dieléctrico.

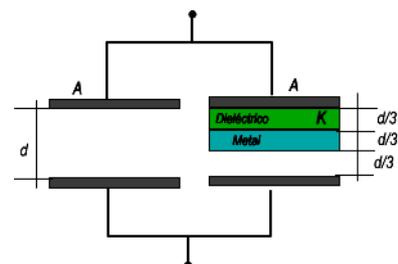


$$a) C = \frac{\epsilon_0 b}{d} [a + (\kappa - 1)x]; c) |F| = \frac{(\kappa - 1)Q^2 d}{2a\epsilon_0 [(\kappa - 1)x + a]^2}$$

54. Un capacitor plano de 100 cm^2 de área y distancia de separación $0,1 \text{ mm}$ entre placas es cargado con 200 V y después se les desconecta de la fuente de voltaje. (a) Calcule su capacidad; (b) la carga Q que se transfiere de una placa a la otra; (c) la fuerza entre las placas; (d) la magnitud del capo eléctrico y la energía almacenada, (e) ¿cuál es el valor máximo de la diferencia de potencial que puede establecerse entre las placas antes de que se produzca la ruptura dieléctrica del aire? ($E_{max} = 3 \text{ MV/m}$); (f) ¿cuál es el valor de la carga que puede almacenar el capacitor antes de que se produzca esta ruptura?.

55. En el problema anterior se llena el capacitor con un dieléctrico de constante $\kappa = 2$. ¿En cuánto cambia la capacitancia? (a) si se mantiene conectada la fuente de voltaje al introducir el dieléctrico, cómo varían las cantidades calculadas en los ítems (b) y (c) ; (b) Ídem si el proceso se realiza manteniendo constante Q ; (d) ¿Cuál es la capacidad si el dieléctrico que se inserta entre las placas tienen un espesor de $0,08 \text{ mm}$.

56. Dos capacitores de placas paralelas área A separados por una distancia d se encuentran conectados como se muestra en la figura. Si el dieléctrico de constante κ insertado en uno de ellos tiene un espesor $d/3$. Determine la capacidad equivalente del sistema en conjunto.



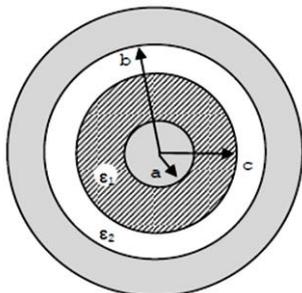
57. Un capacitor de placas planas paralelas horizontales de área $A = 0,5 \text{ m}^2$ y separación de placas $d = 30 \text{ mm}$ es llenado con dos planchas dieléctricas. La plancha superior cuyo espesor es 20 mm tiene una constante $\kappa_1 = 6$ y la plancha inferior cuyo espesor es de 10 mm tiene una constante $\kappa_2 = 12$. Si se aplica al capacitor una diferencia de potencial de 200 V , encuentre el valor de las siguientes cantidades en cada uno de los dieléctricos: (a) el campo eléctrico E , (b) el desplazamiento eléctrico D , (c) el vector polarización P , y (e) la capacitancia total del capacitor.

Rta: (a) $E = 4 \text{ y } 8 \text{ kV/m}$; (b) $D = 425 \text{ nC/m}^2$; (c) $P = 354 \text{ y } 390 \text{ nC/m}^2$; $C = 1,06 \text{ nF}$

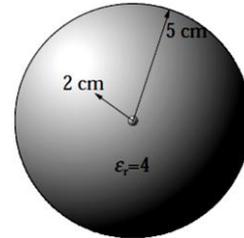
58. Un cilindro conductor de radio R y longitud L , lleva una carga Q . Coaxialmente con él se disponen dos coronas cilíndricas conductoras. La primera tiene un radio interno R_1 y radio externo R_2 , y la segunda de radio interno R_3 y radio externo R_4 está conectada a tierra. Determine: (a) la distribución de cargas y sus respectivas densidades, (b) El campo eléctrico en las distintas regiones, (c) el potencial eléctrico en las distintas regiones (d) la capacitancia del sistema.

59. Un capacitor cilíndrico consiste en un cilindro conductor interno de radio a y una corona cilíndrica externa coaxial de radio interior b . El espacio entre los dos conductores está lleno de un dieléctrico con permisividad ϵ y la longitud del capacitor es L . Determine la capacitancia del capacitor.

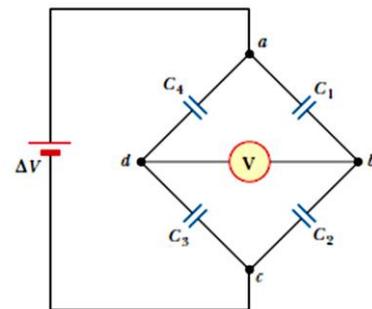
60. Entre dos cilindros conductores coaxiales, de radios a y b ($b = 2a$), se introduce dos capas de dieléctrico que llenan el espacio entre los conductores. El límite de separación entre los dieléctricos es la superficie cilíndrica de radio c , coaxial con los otros dos. Las permisividades respectivas de los dieléctricos son $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$ y ϵ_2 . Si entre los conductores se aplica una diferencia de potencial V_0 . Determine: (a) el valor de ϵ_2 para que el campo sobre la superficie del cilindro de radio a sea cuatro veces al campo en el dieléctrico sobre la superficie de radio b y (b) la capacidad por unidad de longitud del sistema con los valores de ϵ_1 dado y ϵ_2 obtenido.



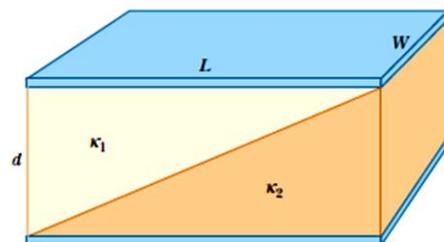
61. Una esfera de dieléctrico de 5 cm de diámetro y constante dieléctrica $\kappa = 4$, rodeada de aire, tiene en su centro una distribución de carga de $10 \mu\text{C}$ y radio despreciable. Determine el campo eléctrico, la polarización y el desplazamiento eléctrico en un punto que dista 2 cm del centro y en dos puntos inmediatamente próximos a la superficie esférica que limita al dieléctrico, pero uno interior a ella y el otro exterior.



62. En la disposición mostrada en la figura, es aplicada una diferencia de potencial ΔV , y el capacitor C_1 es ajustado tal que el voltímetro instalado entre los puntos b y d lea cero. Este balance ocurre cuando $C_1 = 4 \mu\text{F}$. Si $C_3 = 9 \mu\text{F}$ y $C_4 = 12 \mu\text{F}$. Determine el calor de C_2

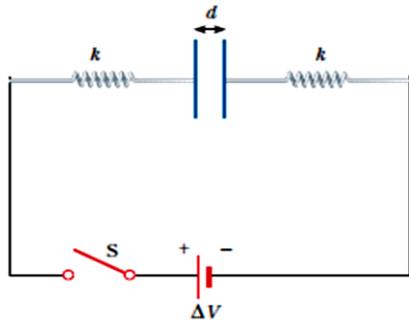


63. Un capacitor con placas paralelas de área A y separación entre placas d tiene la región entre las placas llenada con dos dieléctricos como se muestra en la figura. Asumiendo que $d \ll W$. (a) determine la capacitancia y (b) muestre que cuando $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ sus resultados llegan a ser los mismos que para un capacitor conteniendo un solo dieléctrico.

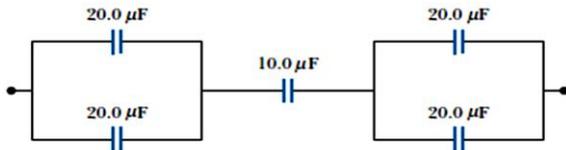


64. El circuito mostrado en la figura está formado por dos placas metálicas paralelas idénticas conectadas mediante resortes metálicos idénticos a una batería de 100 V . Cuando el interruptor está abierto, las placas no tienen carga y se encuentran separadas una distancia $d = 8 \text{ mm}$, con una capacitancia $C = 2$

μF . Si se cierra el interruptor S, la distancia entre las placas disminuye en un factor de 0,5. ¿Cuánta carga se acumula en cada una de las placas?. ¿Cuál es la constante de resorte en cada uno de ellos?.



65. Cada capacitor en la combinación mostrada en la figura tiene un voltaje de ruptura de 15V. ¿Cuál es el voltaje de ruptura de la combinación?.

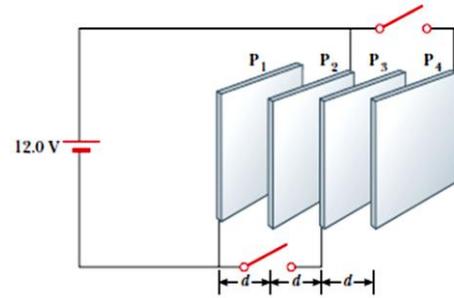


66. Un conductor interno de un cable coaxial tiene un radio de 0,80 mm, y el radio interno del conductor externo es de 3 mm. El espacio entre los conductores está lleno de polietileno, que tiene una constante dieléctrica de 2,30 y una intensidad dieléctrica de 18 MV/m. ¿Cuál es la diferencia de potencial máxima que puede soportar este cable?.

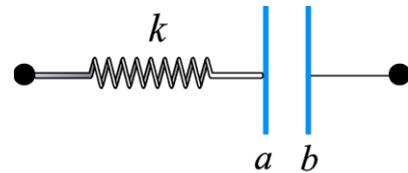
67. A un capacitor de capacitancia $C_1 = 1 \mu\text{F}$, cargado hasta la tensión $V = 110 \text{ V}$, se le conectó en paralelo a los bornes de un sistema formado por dos capacitores descargados y unidos en serie, cuyas capacitancias eran $C_2 = 2\mu\text{F}$ y $C_3 = 3\mu\text{F}$. Determine la carga que circula en este caso por los conductores de empalme

68. Dos esferas conductoras de radios a y b poseen cargas $+Q$ y $-Q$, respectivamente y se encuentran separadas una distancia d . Determine la capacitancia de este sistema.

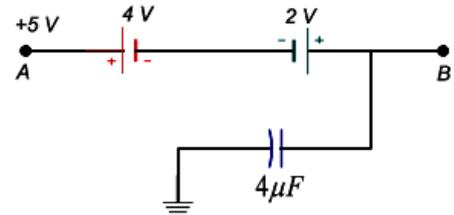
69. Cuatro placas paralelas P_1, P_2, P_3 y P_4 , cada una de área $A = 7,50 \text{ cm}^2$, están separadas sucesivamente por una distancia $d = 1,19 \text{ mm}$, como se muestra en la figura. La placa P_1 es conectada a la terminal negativa de una batería, y P_2 a la terminal positiva. La batería mantiene una diferencia de potencial de 12 V. (a) Si P_3 es conectada a la terminal negativa, cuál es la capacitancia del sistema de tres placas $P_1P_2P_3$? (b) cual es la carga sobre P_2 ? (c) Si P_4 es ahora conectada a la terminal positiva de la batería, cuál es la capacitancia del sistema de cuatro placas $P_1P_2P_3P_4$?- ¿Cuál es la carga sobre P_4 ?.



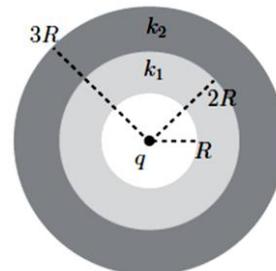
70. Considere un capacitor de placas paralelas llenas con aire con una placa conectada a un resorte de constante elástica k , y la otra placa se mantiene fija. El sistema se mantiene fijo sobre una mesa como se ve en la figura. Si sobre las placas a y b existe una carga $+Q$ y $-Q$. Determine la deformación del resorte.



71. ¿Cuál de la diferencia de potencial en el capacitor y cuál es la energía almacenada he dicho capacitor?.

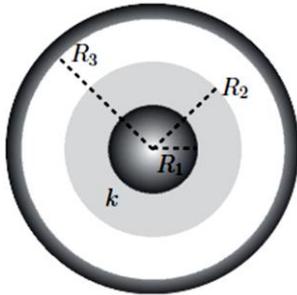


72. La figura muestra un corte de un sistema formado por dos dieléctricos y una carga puntual q . Los dieléctricos de constantes κ_1 y κ_2 , poseen cada uno carga neta nula y tienen la forma de coronas esféricas concéntricas. La carga puntual se encuentra en el centro de los dieléctricos. (a) Halle el campo eléctrico del sistema, (b) Para cada dieléctrico determine su carga depositada en sus superficies interna y externa.

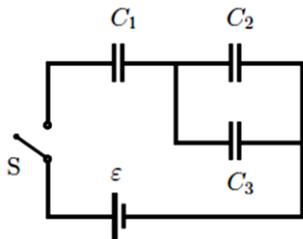


73. La figura muestra un capacitor formado por una esfera conductora de radio $R_1 = R$ y un cascarón esférico, conductor concéntrico y de radio interno $R_3 = 3R$. La región comprendida en el interior del capacitor, comprendida entre los radios R_1 y $R_2 =$

$2R$ se encuentra ocupada por un dieléctrico cuya constante es κ . La placa conductora de radio R_1 posee una carga $+Q$ mientras que la carga neta del dieléctrico es nula. (a) Halle el campo eléctrico en la región $R_1 < R_2$; (b) Calcule la diferencia de potencial entre las placas del capacitor y (c) si $\kappa = 3$, y $R = 3 \text{ cm}$. Determine la capacitancia del capacitor en picofaradios.

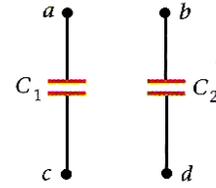


74. Los capacitores en el sistema mostrado tienen igual capacidad $C_1 = C_2 = C_3 = C$ y al inicio se encuentran descargado. (a) Se cierra el interruptor S y se espera que los capacitores se carguen y luego se vuelve a abrir el interruptor. Determine la carga de cada capacitor. (b) a continuación se introducen dos dieléctricos de constante κ que llenan completamente los capacitores C_1 y C_2 , esto se hace evitando la pérdida de carga. Determine la nueva carga de los capacitores. Si $\kappa = 2$; $\varepsilon = 9 \text{ V}$ y $C = 5 \mu\text{F}$. ¿Cuál será el trabajo que realiza un agente externo al introducir los dieléctricos?.

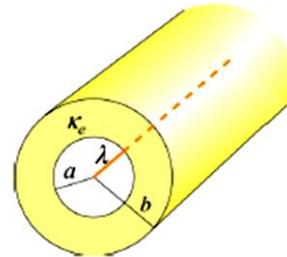


75. Una carga $+Q$ se distribuye uniformemente por el volumen de una esfera de radio R . Suponiendo que la constante dieléctrica es igual a la unidad, determine: (a) La energía electrostática propia del globo, (b) La razón entre la energía U_1 , acumulada dentro de la esfera, y la energía U_2 en el espacio circundante.

76. Los dos capacitores de la figura poseen capacitancias $C_1 = 0,4 \mu\text{F}$ y $C_2 = 1,2 \mu\text{F}$. Los voltajes aplicados a cada uno de los capacitores son de V_1 y V_2 respectivamente y la energía almacenada en los dos capacitores es $1,14 \text{ mJ}$. Si los terminales b y c se conectan entre sí, el voltaje es $V_a - V_d = 80 \text{ V}$; si el terminal a se conecta al terminal b y el terminal c se conecta a d , el voltaje $V_a - V_d = 20 \text{ V}$. Determine los voltajes iniciales V_1 y V_2 .



77. Una cáscara cilíndrica tiene radio interno a y radio externo b como se muestra en la figura. El material tiene una constante dieléctrica $\kappa_c = 10$. En el centro de la corteza hay una línea de carga colineal al eje de la corteza cilíndrica con una carga libre por unidad de longitud λ . (a) Encuentre el campo eléctrico para $r < a$, $a < r < b$ y $r > b$. (b) determine la carga inducida por unidad de longitud en la superficie interna de la corteza así como en la superficie externa.

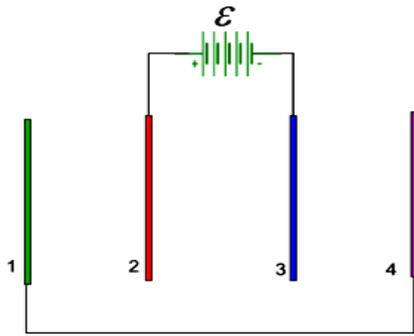


Rta. (b) $-9\lambda/10$; (b) $+9\lambda/10$

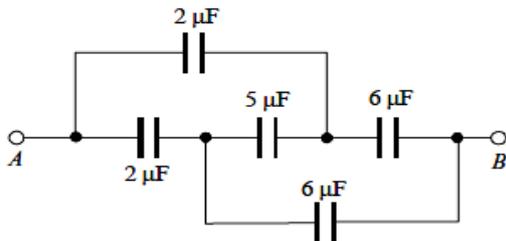
78. Dos grandes placas metálicas están orientadas en un plano horizontal y están separadas una distancia $3d$. están unidas mediante un alambre a tierra, e inicialmente las placas no tienen cargas. Ahora se introduce entre las placas una tercera placa idéntica con carga Q , paralelamente a las anteriores y se localiza a una distancia d de la placa superior, como se muestra en la figura. Determine: (a) La carga inducida que aparece en cada una de las dos placas originales, (b) La diferencia de potencial que aparece entre las placas intermedias y cada una de las demás placas. Considere que cada una de las placas tiene un área A .



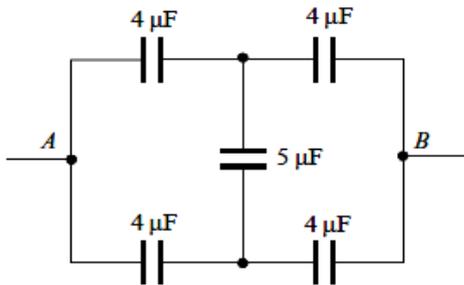
79. Cuatro placas metálicas iguales se encuentran en el aire a distancias iguales “ d ” una de la otra. El área A de las placas extremas están unidas entre sí y las del centro conectadas a una batería de f.e.m ε . La distancia entre placas es pequeña en comparación con sus dimensiones de éstas. Determine la carga en cada placa.



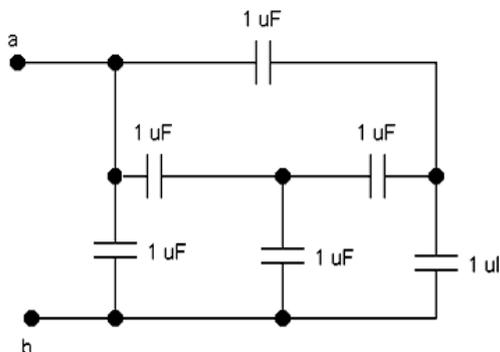
80. En el circuito capacitivo mostrado. Encuentre la capacidad equivalente entre A y B.



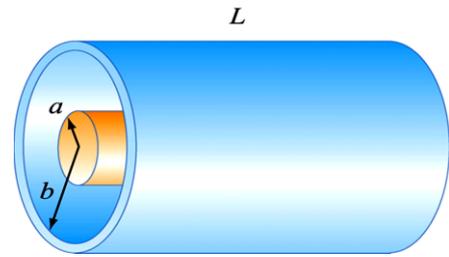
81. En el circuito mostrado encuentre la capacidad equivalente entre los puntos A y B.



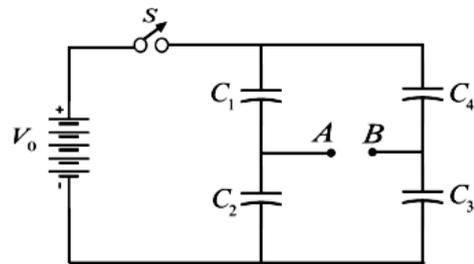
82. Halle la capacidad equivalente C_e entre los puntos a y b de la batería de capacitores de igual capacidad $C = 1 \mu\text{F}$ instalados en el circuito mostrado en la figura.



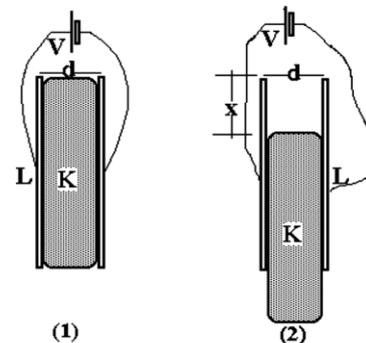
83. Un condensador cilíndrico tiene radios a y b , como se muestra en la figura. Demuestre que la mitad de la energía potencial eléctrica almacenada está dentro de un cilindro cuyo radio es $R = \sqrt{ab}$



84. En el circuito de la figura $C_1 = 2 \mu\text{F}$; $C_2 = 4 \mu\text{F}$; $C_3 = 3 \mu\text{F}$; $C_4 = 6 \mu\text{F}$, y no existe medio material entre las placas de los capacitores. (a) Si se cierra el interruptor S, ¿cuál será la diferencia de potencial entre A y B?. (b) manteniendo el interruptor S cerrado, se introduce en el capacitor C_3 un dieléctrico de constante dieléctrica $\kappa = 5$, determine la diferencia de potencial entre A y B y las cargas de los cuatro condensadores. Considere que $V_0 = 10 \text{ Voltios}$.

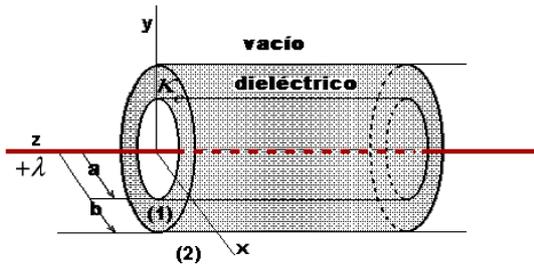


85. Se muestra un condensador de placas paralelas cuadradas, arista L separados por una distancia d , en la que un dieléctrico de constante $\kappa > 1$ y masa m es sostenido en la figura (1), y en la figura (2) su peso está en equilibrio con la fuerza eléctrica. Hallar: (a) la capacidad del condensador cuando el dieléctrico llena el 100 % del espacio entre las placas, (b) la capacidad del condensador correspondiente a la figura (2) y (c) la masa m del dieléctrico que garantiza su equilibrio en la figura (2).

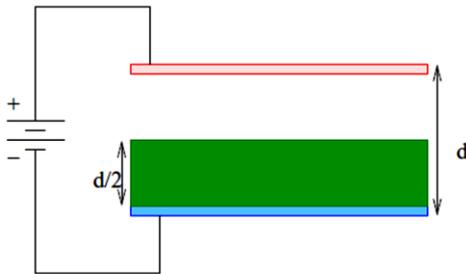


86. Una cáscara dieléctrica cilíndrica tiene radio interno a y radio externo b como se muestra en la figura. El material tiene una constante dieléctrica $\kappa_e = 10$. En el centro de la corteza hay una línea de carga de radio r_0 colineal al eje de la corteza cilíndrica con una carga libre por unidad de

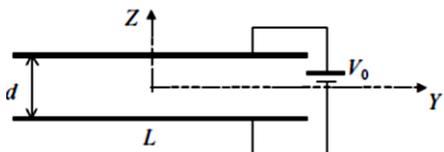
longitud $\lambda = 200 \text{ nC/m}$. (a) Encuentre los vectores \vec{D} , \vec{E} y \vec{P} , para $r < a$, $a < r < b$ y $r > b$. (b) la diferencia de potencial entre la superficie del alambre y la superficie exterior de la corteza dieléctrica. (c) la carga inducida por unidad de longitud en la superficie interna de la corteza así como en la superficie externa.



87. Un capacitor de placas paralelas de área A y separación entre placas d , contiene un dieléctrico de espesor $d/2$ y una constante dieléctrica $\kappa = 2$, en reposo sobre la placa negativa. Si se aplica una diferencia de potencial V_0 entre sus placas. Determine: (a) el campo eléctrico en la región entre sus placas y (b) la densidad de carga ligada sobre la superficie del dieléctrico



88. Disponemos de un condensador plano de espesor d y cuyas caras tienen un lado de longitud L como se muestra en la figura. El dieléctrico que existe entre las placas tiene una permisividad $\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\gamma}{L}\right)$. Si se aplica al capacitor una diferencia de potencial V_0 entre sus placas. Determine: (a) los vectores campo y desplazamiento eléctricos, \vec{E} y \vec{D} , (b) la energía almacenada en el capacitor.



89. Se tiene una carga puntual Q rodeada de una esfera dieléctrica de radio R donde la permisividad varía según la expresión:

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_0 \left(1 + \frac{r}{R}\right) & \text{para } r < R \\ \epsilon_0 & \text{para } r > R \end{cases}$$

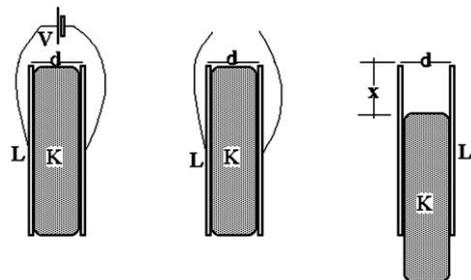
Determine (a) los vectores \vec{D} , \vec{E} y \vec{P} , en todas las regiones del espacio, (b) el potencial para $r < R$.

90. La permisividad eléctrica de un medio dieléctrico que llena el espacio entre las placas de un capacitor esférico con radios a y b ($b > a$) está dado por

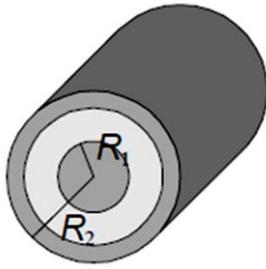
$$\epsilon = \begin{cases} 2\epsilon_0 & \text{para } a \leq r \leq (a+b)/2 \\ 4\epsilon_0 & \text{para } (a+b)/2 \leq r \leq b \end{cases}$$

Encuentre: (a) la capacitancia del capacitor, (b) la distribución superficial de carga ligada y la carga total ligada en el dieléctrico.

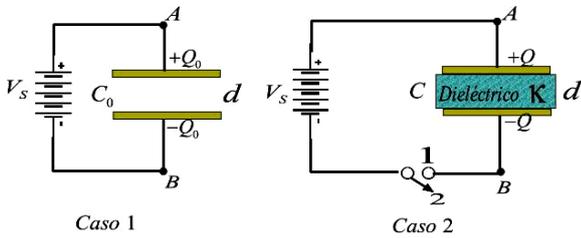
91. Un capacitor de placas paralelas rectangulares cuyas dimensiones son a y L contienen un dieléctrico de constante κ , de densidad de masa ρ y de espesor d entre sus placas como se muestra en la figura. Si el capacitor se carga conectándolo a una fuente que le proporciona una diferencia de potencial V , luego de la cual se le desconecta de la fuente y a continuación se le permite que por la gravedad la placa dieléctrica descienda sin fricción entre las placas metálicas hasta quedar en equilibrio en la posición mostrada. Determine la posición x cuando se alcanza el equilibrio para lo cual justifique cada uno de los pasos en su proceso.



92. Un condensador cilíndrico formado por dos conductores de radios R_1 y R_2 tiene dos capas dieléctricas concéntricas, que ocupan igual volumen como se muestra en la figura. En la capa dieléctrica interior la constante dieléctrica varía con $\kappa = \kappa_0 (r/R_1)$. En la exterior es uniforme e igual a κ_2 . Determine: (a) la capacidad del capacitor y (b) las densidades de carga (libre y ligada) volumétricas y superficiales.

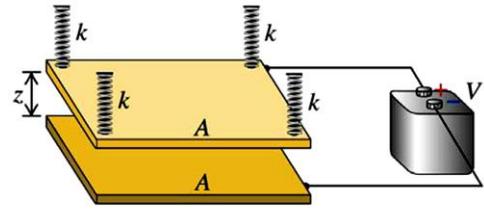


93. K Considere un capacitor hecho de dos placas metálicas paralelas de área A y separadas por una distancia $d = 1 \text{ mm}$. En el caso 1, el espacio entre las placas es el vacío. En el caso 2, el espacio entre las placas es llenado con un dieléctrico lineal de permisividad relativa $\kappa = 5$. Si la capacitancia $C_0 = 1,77 \text{ pF}$ y la diferencia de potencial aplicada es $V_s = 6 \text{ V}$



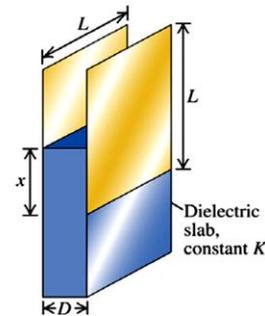
- (a) Calcule el campo eléctrico E_0 , la energía almacenada y la carga Q_0 en el caso 1.
- (b) Una lámina de dieléctrico es insertado entre las placas metálicas. Calcule la capacitancia C y la carga Q en el caso 2 (interruptor cerrado en la posición 1). ¿Cuáles son los valores de la carga de polarización y la polarización P ? ¿Cuál será la energía almacenada?
- (c) Considere Ud. ahora que el capacitor en el caso 1 es cargado completamente, el interruptor S es abierto y recién inserta el material dieléctrico (posición 2). Calcule el nuevo campo eléctrico \vec{E} dentro del material, la diferencia de potencial V_{AB} y la energía almacenada. Considere que $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$.

94. El capacitor con aire entre las placas paralelas mostrado en la figura consiste en dos placas horizontales conductoras de áreas iguales A . La placa inferior descansa sobre un soporte fijo y la placa superior está suspendida de cuatro resortes con constante elástica K . Cuando no tienen carga las placas están separadas por una distancia z_0 . Si ahora se conectan las placas a una batería la cual crea una diferencia de potencial V entre ellas. Esto provoca que la separación de placas disminuya a z . (a) Demuestre que la magnitud de la fuerza electrostática entre las placas con carga es $\epsilon_0 AV^2 / 2z^2$. (b) obtenga una expresión que relacione la separación de placas z con la diferencia de potencial.



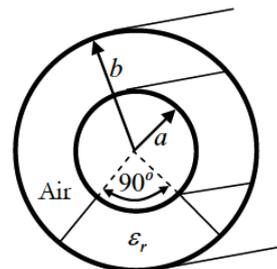
95. Dos placas conductoras cuadradas con lados de longitud L están separadas por una distancia D . Se inserta una placa de dieléctrico de constante κ y dimensiones $L \times L \times D$ una distancia x en el espacio entre las placas como se muestra en la figura. (a) halle la capacitancia del sistema. (b) suponga que el capacitor está conectado a una batería que mantiene una diferencia de potencial constante V entre las placas. Si se inserta la placa dieléctrica a una distancia adicional dx en el espacio entre placas. Demuestre que el cambio en la energía almacenada es

$$dU = + \frac{(\kappa - 1)\epsilon_0 V^2 L}{2D} dx$$



96. Cuando cierto capacitor plano de placas paralelas es conectado a una batería, éste acumula una carga q_0 en cada una de sus placas. Manteniendo conectado la batería, se inserta entre las placas una placa de dieléctrico, acumulándose una carga adicional q en cada una de las placas. ¿Cuál es la constante dieléctrica de la lámina de dieléctrico.

97. El conductor interior de un cable coaxial es soportado por un trozo de teflón que forma 90° como se muestra en la figura. Si $a = 2 \text{ mm}$ y $b = 5 \text{ mm}$ y la constante dieléctrica del teflón es $\kappa_e = 2$. Calcular la capacidad efectiva de 10 m de longitud del cable coaxial.



98.

