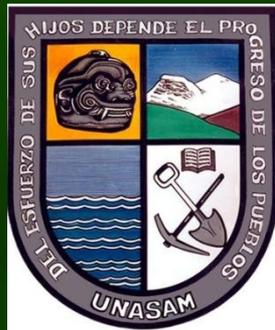


UNIVERSIDAD NACIONAL
“SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO”
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL



CURSO: FISICA III

FLUJO ELECTRICO Y LA LEY DE GAUSS

AUTOR: Mag. Optaciano L. Vásquez García

HUARAZ - PERÚ

2010

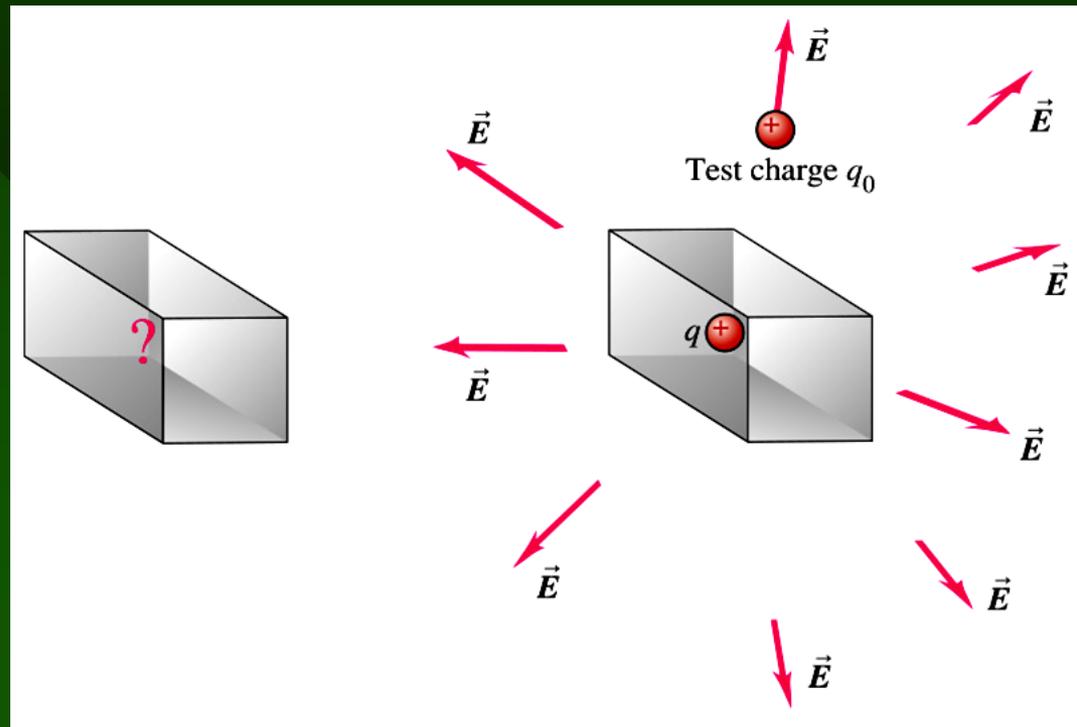
I. INTRODUCCIÓN

Para realizar una tarea existe dos formas: (a) fácil y (b) difícil.

- La manera fácil consiste en utilizar las herramientas apropiadas.
- En física una herramienta importante para simplificar la solución de problemas es el uso de las propiedades de simetría de los sistemas.
- Muchos sistemas físicos tienen simetría , por ejemplo un cilindro no se ve diferente después de hacerlo girar en torno a su eje, una esfera cargada se ve idéntica al hacerle girar en torno a cualquier eje.
- La ley de Gauss nos ayuda a simplificar los cálculos de campos eléctricos si se usa adecuadamente la simetría. Por ejemplo el calculo del campo de distribuciones lineales, cilíndricas, esféricas mediante el uso de la Ley de Gauss se simplifica enormemente.
- De hecho dicha ley establece una relación entre las cargas eléctricas y el campo eléctrico.

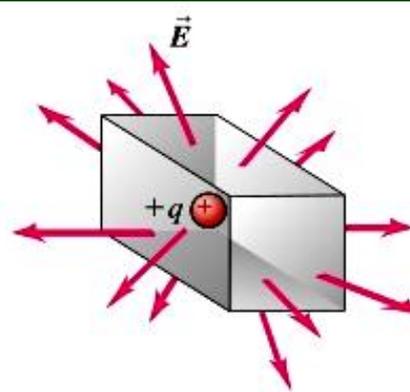
II. CARGA Y FLUJO ELECTRICO

- En el capítulo anterior se determinó el campo eléctrico cuando se conocía la distribución de carga.
- Ahora se puede plantear la situación inversa: “Si se conoce la disposición del campo eléctrico en una región ¿Qué se puede saber acerca de la distribución de carga en dicha región.

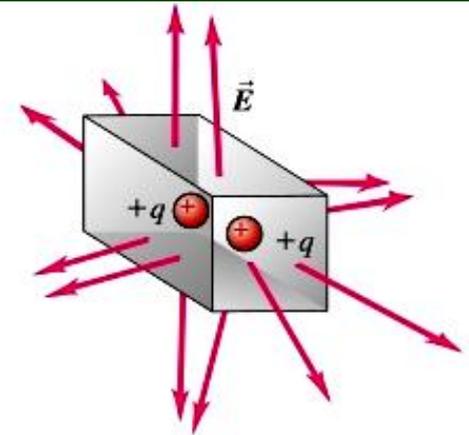


CARGA Y FLUJO ELECTRICO_2

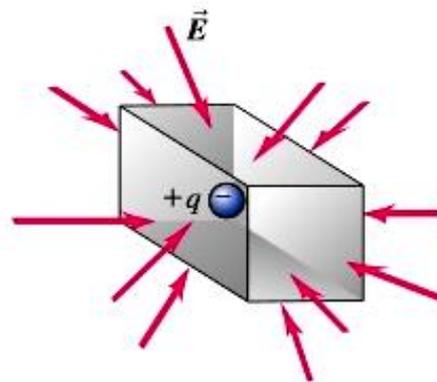
- Para conocer el contenido de la caja, es necesario medir \vec{E} sólo en la superficie de la caja



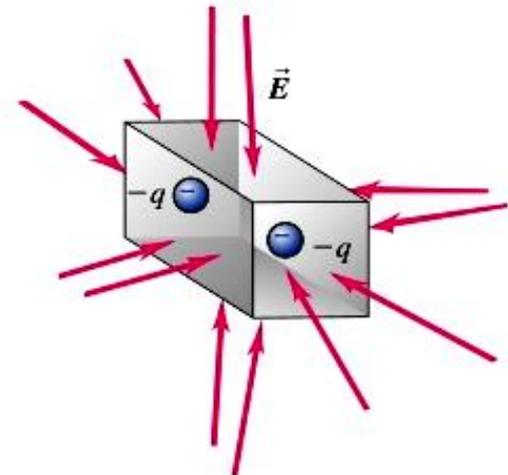
(a) Positive charge inside box, outward flux



(b) Positive charge inside box, outward flux



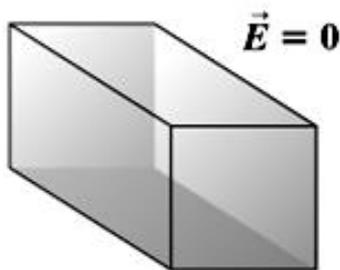
(c) Negative charge inside box, inward flux



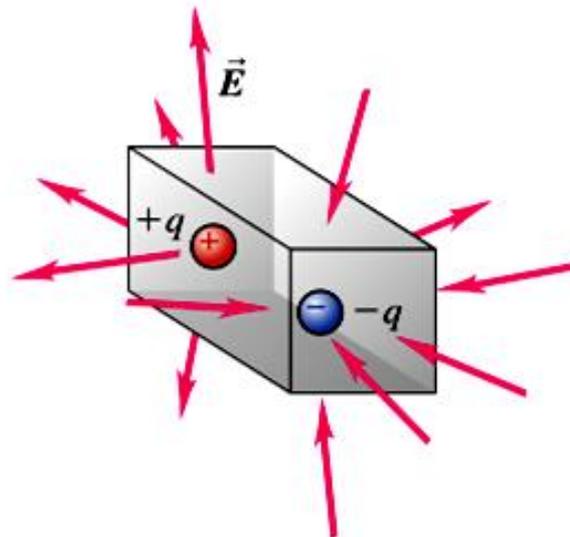
(d) Negative charge inside box, inward flux

CARGA Y FLUJO ELECTRICO_3

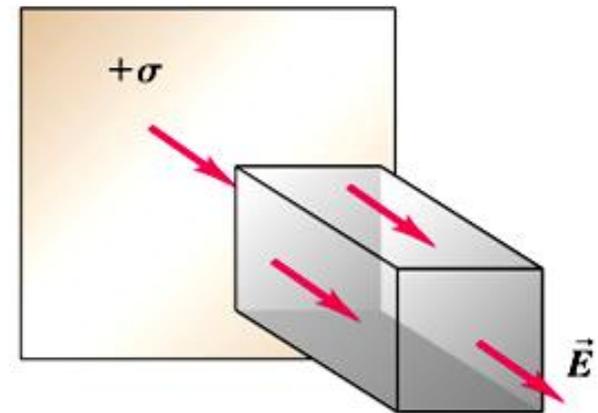
- En la figura (a) la caja está vacía entonces $E = 0$, en la fig. (b) hay una carga positiva y otra negativa es decir la carga neta en la caja es nulo sin embargo no existe flujo neto; en la fig. (c) la caja está vacía sin embargo existe carga fuera de la caja.



(a) No charge inside box,
zero flux



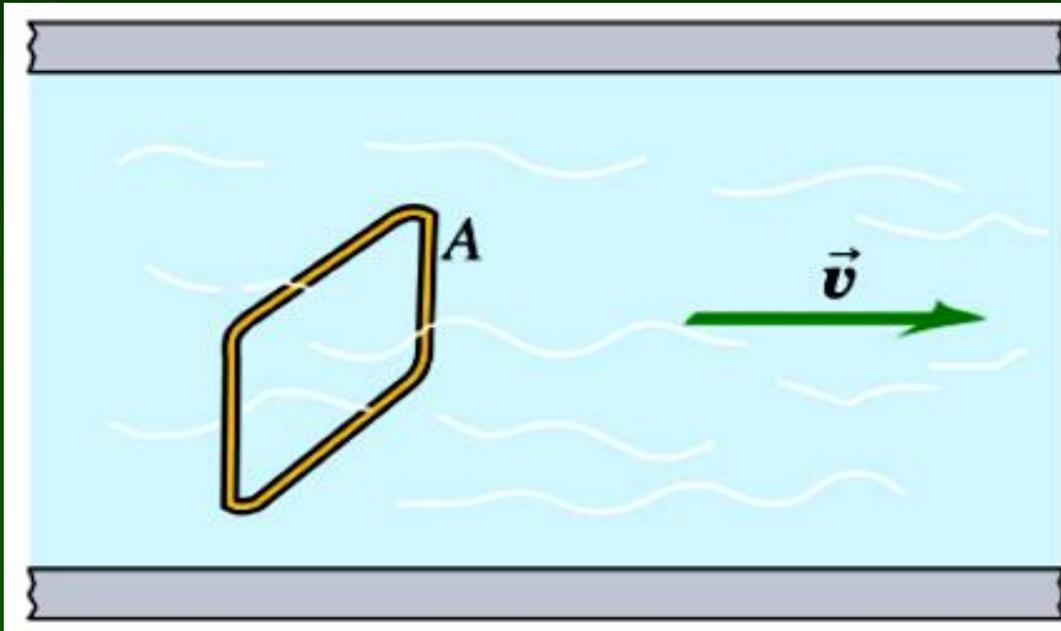
(b) Zero *net* charge inside box,
inward flux cancels outward flux



(c) No charge inside box,
inward flux cancels outward flux

III. FLUJO ELECTRICO

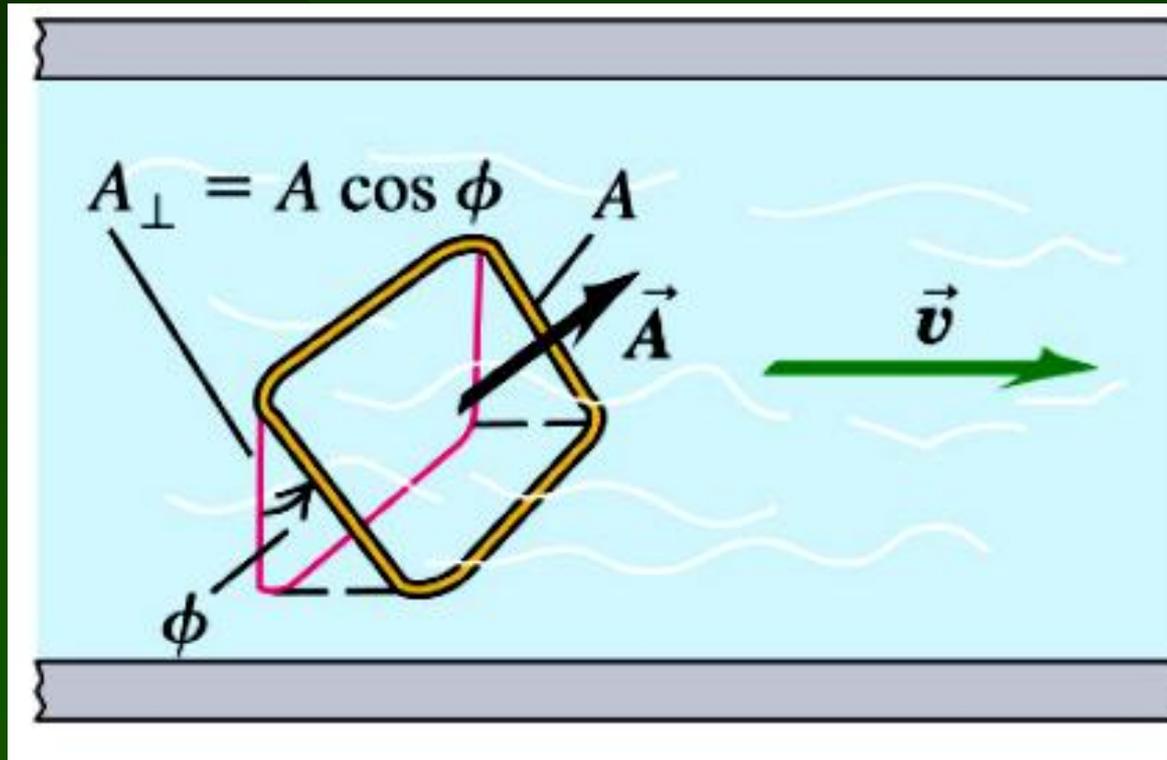
- La figura muestra un flujo uniforme de un fluido de izquierda a derecha. El flujo volumétrico en metros cúbicos por segundo a través del área perpendicular del alambre es



$$\frac{dV}{dt} = vA$$

FLUJO ELECTRICO_2

- Al inclinar el rectángulo un ángulo ϕ de modo que su cara no sea perpendicular a la velocidad entonces el flujo volumétrico es



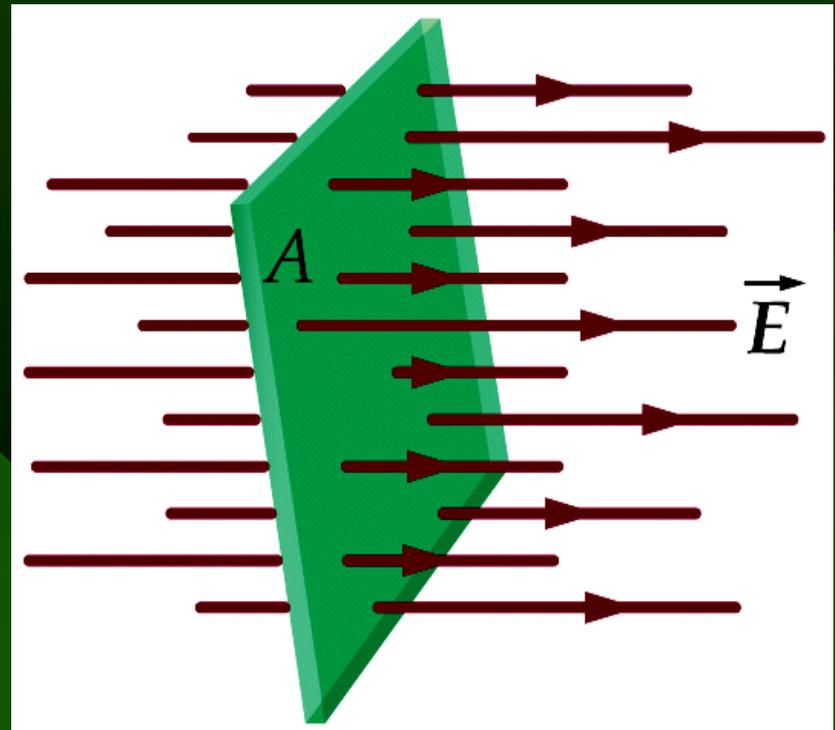
$$\frac{dV}{dt} = v A \cos \phi$$

$$\frac{dV}{dt} = v \square A$$

FLUJO ELECTRICO_3

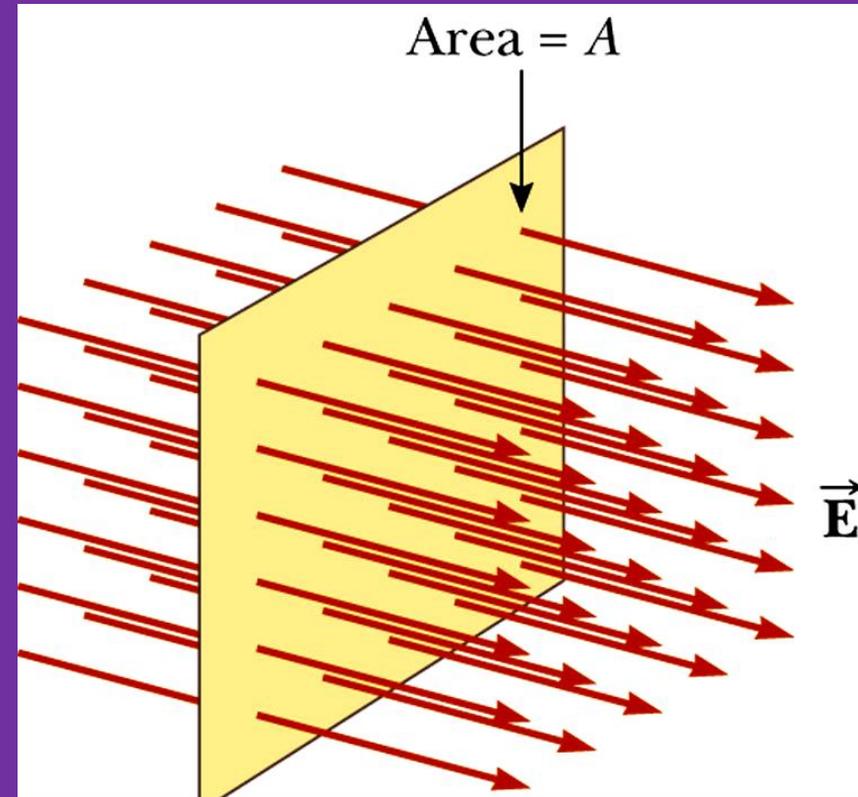
En forma análoga al flujo de fluidos podemos definir el flujo eléctrico Φ_E a partir de una de las propiedades de las líneas de fuerza “*el número de líneas N por unidad de área perpendicular que pasa a través del área unitaria perpendicular A es numéricamente igual a la intensidad de campo eléctrico E .* Es decir

$$E \propto \frac{\text{\# de líneas}}{A_{\perp}} = \frac{N}{A_{\perp}}$$



3.1 Flujo de un campo uniforme a través de una superficie plana

- Definimos al flujo eléctrico (Φ_E), que atraviesa una superficie perpendicular al campo como *el producto de la magnitud del campo eléctrico E y el área A perpendicular al campo de la superficie atravesada por las líneas de fuerza*
- Es decir el flujo no es mas sino el número de líneas de fuerza que atraviesa una determinada superficie*

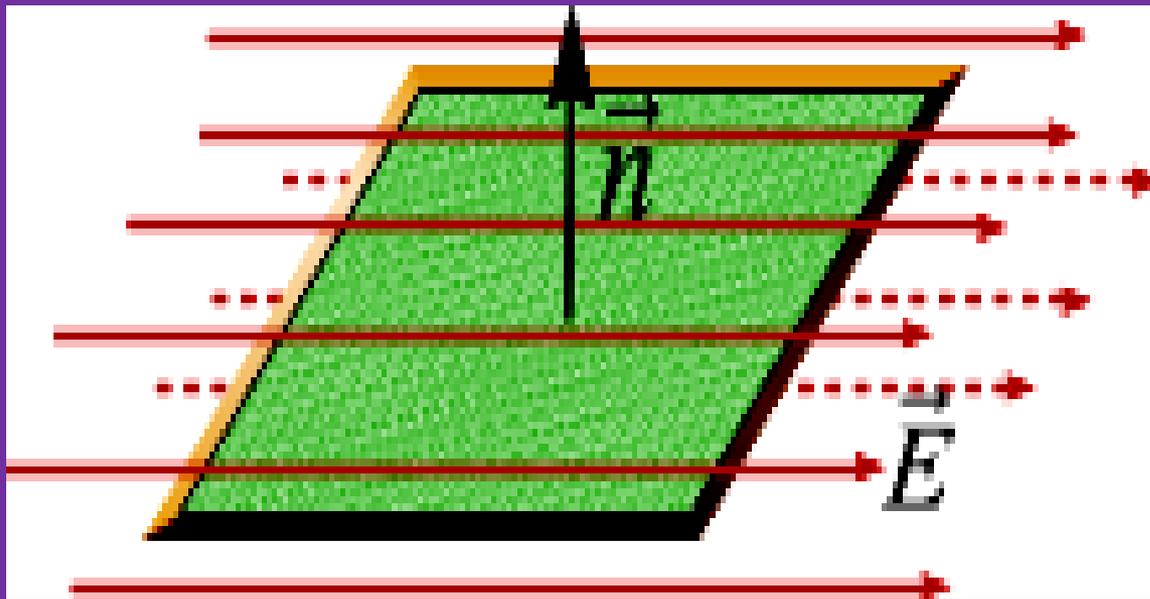


$$\Phi_E = EA_{\perp}$$

3.2 Flujo a través de un área paralela al campo eléctrico

- Si las líneas de fuerza son paralelas entonces el flujo es nulo. Es decir

$$\Phi_E = 0$$

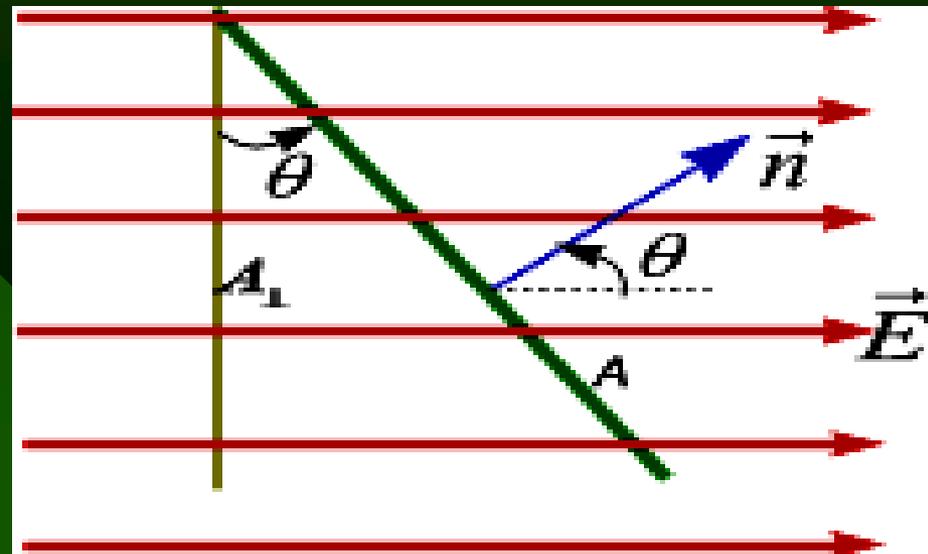
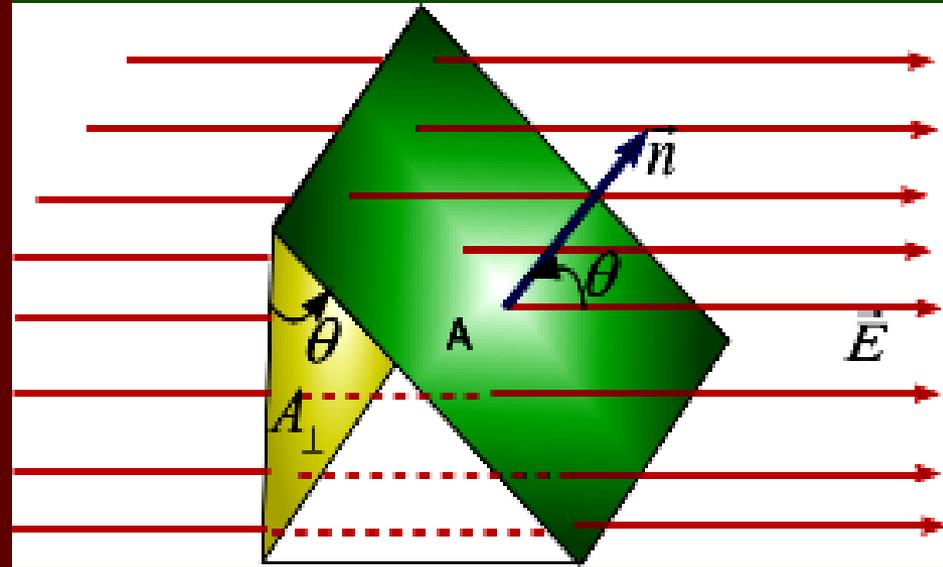


3.3 Flujo eléctrico a través de una superficie inclinada

- Si el área se encuentra inclinada respecto al campo entonces el flujo eléctrico será

$$\Phi_E = EA_{\perp} = EA \cos \theta$$

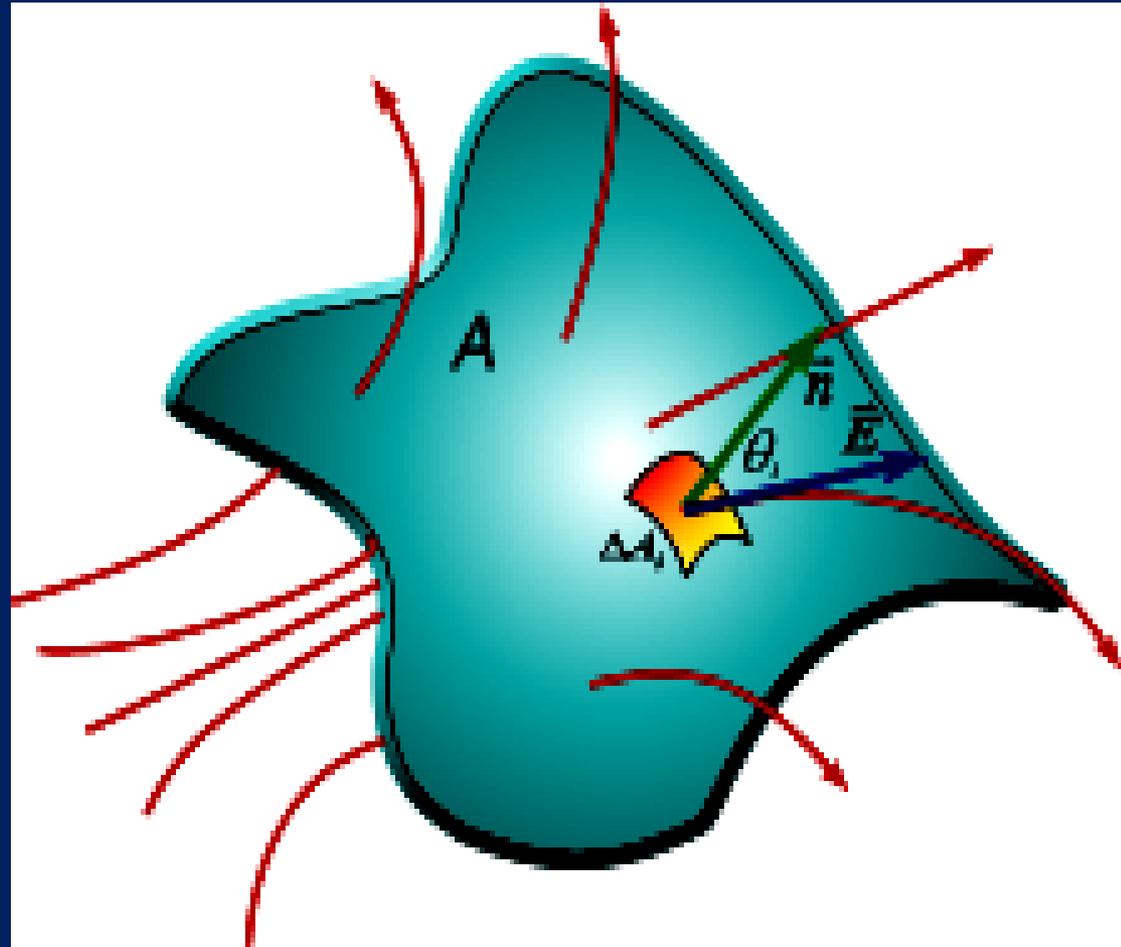
$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot \hat{n} A$$



3.3 Flujo eléctrico en general_1

- Si la superficie no es plana y el campo es no uniforme, para evaluar el flujo, se divide a la superficie en elementos de área

$$\Delta\vec{A}_i = \Delta A_i \hat{n}_i$$



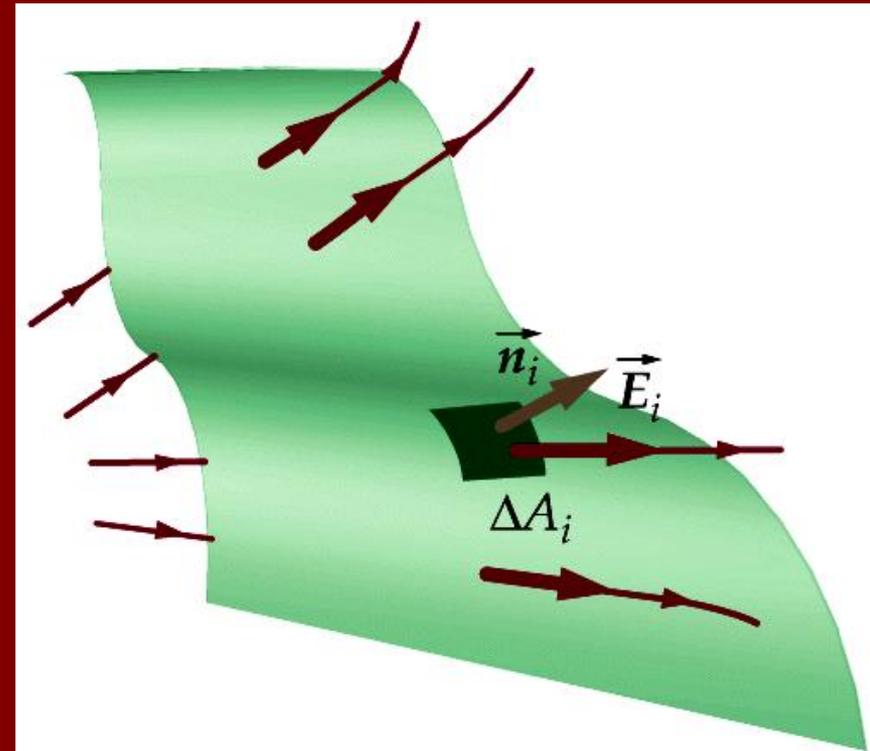
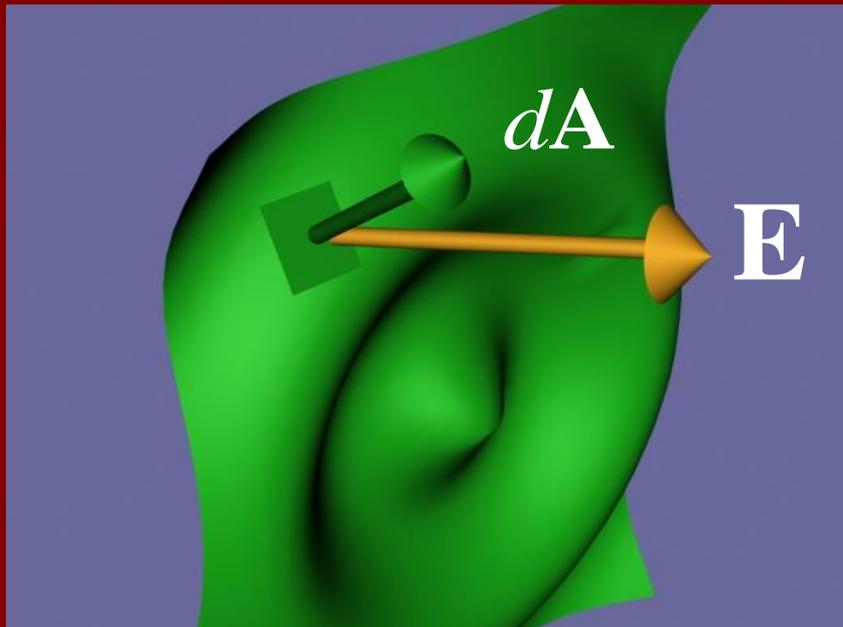
3.3 Flujo eléctrico en general_1

- El flujo eléctrico a través de cada elemento de área es

$$\Delta\Phi_{E,i} = E_i \Delta A_i \cos \theta_i = \vec{E} \cdot \hat{n}_i A_i = \vec{E}_i \cdot \hat{n} \Delta A_i$$

- El flujo neto será

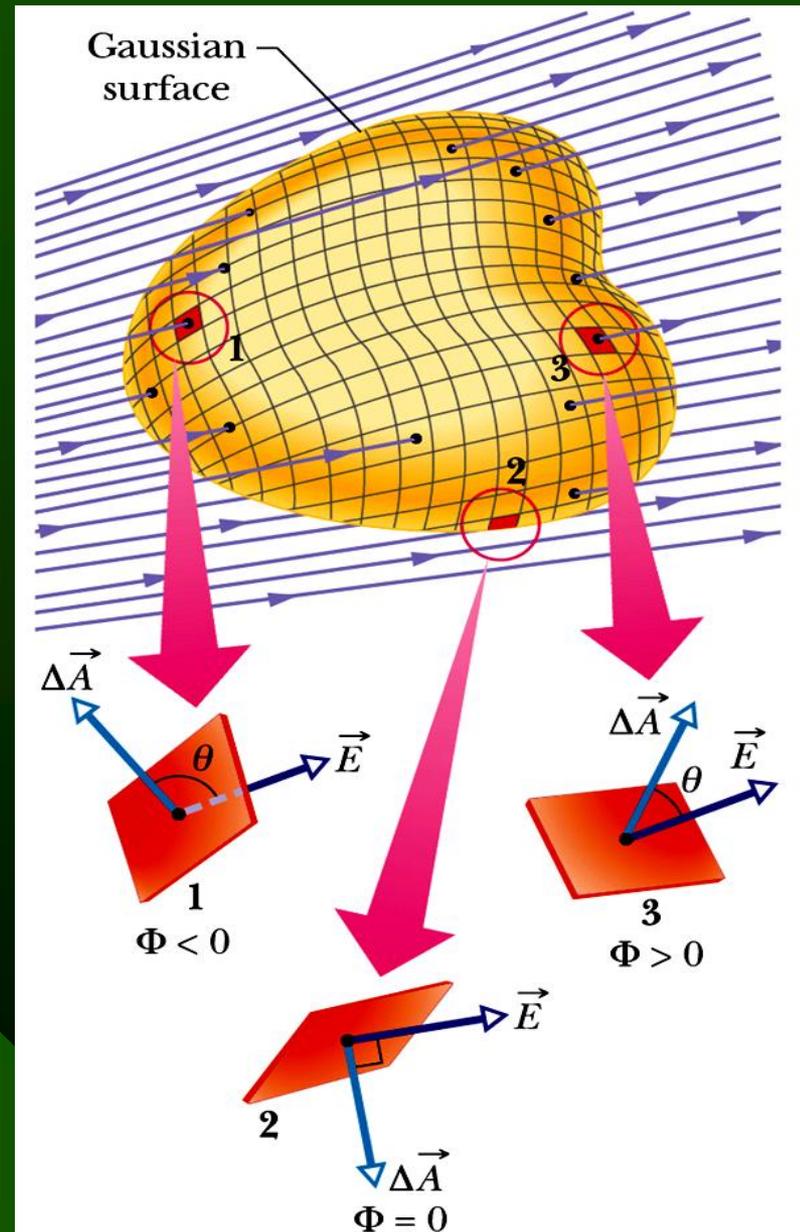
$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \left(\sum \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i \right) = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$



3.3 Flujo eléctrico en general_2

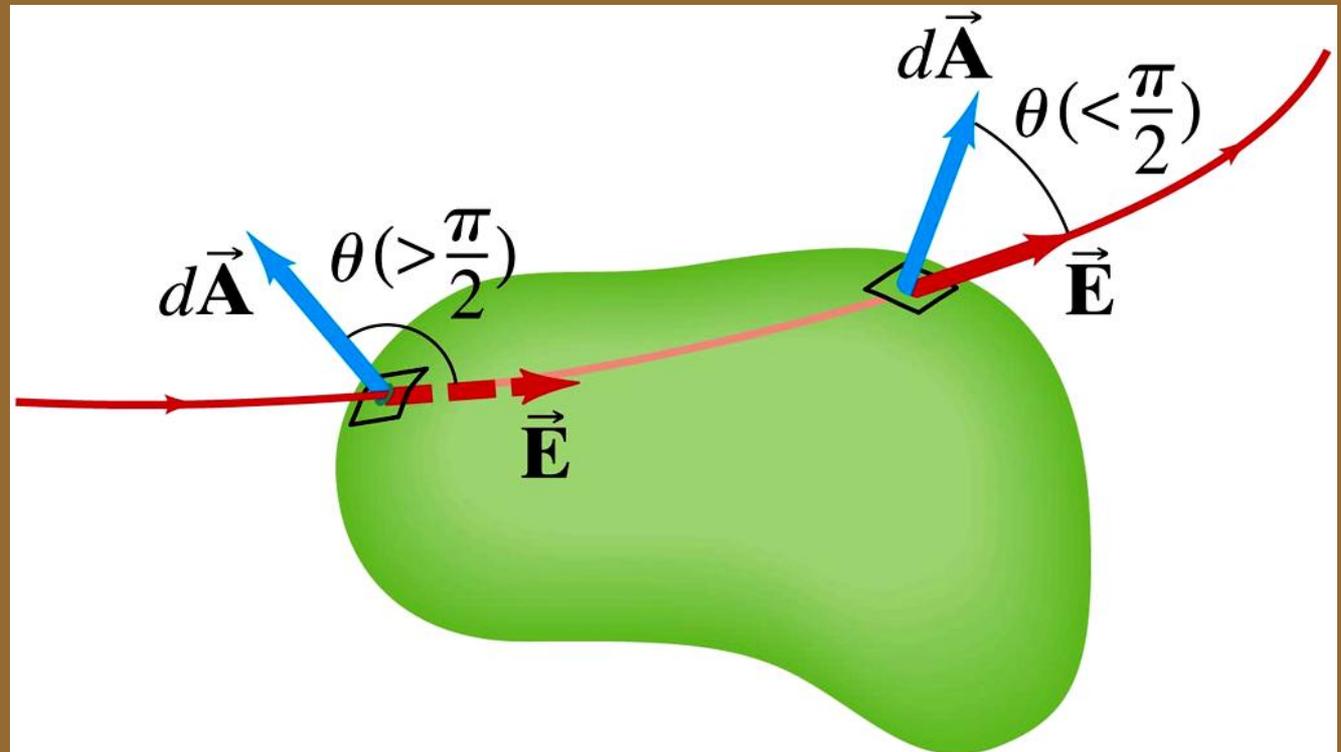
- Si la superficie es cerrada los vectores unitarios y como tal el área tiene distintas direcciones.
- En este caso el flujo puede ser positivo, negativo o nulo
- El flujo neto será

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \left(\sum \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i \right) = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$



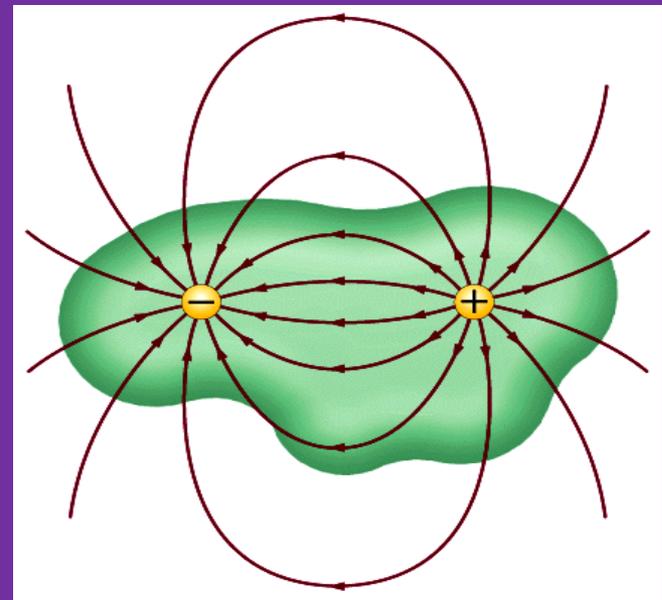
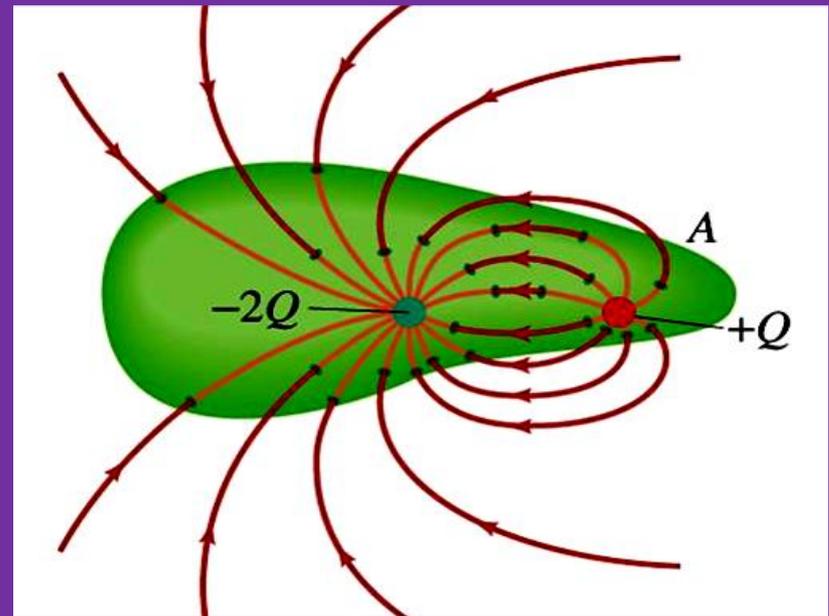
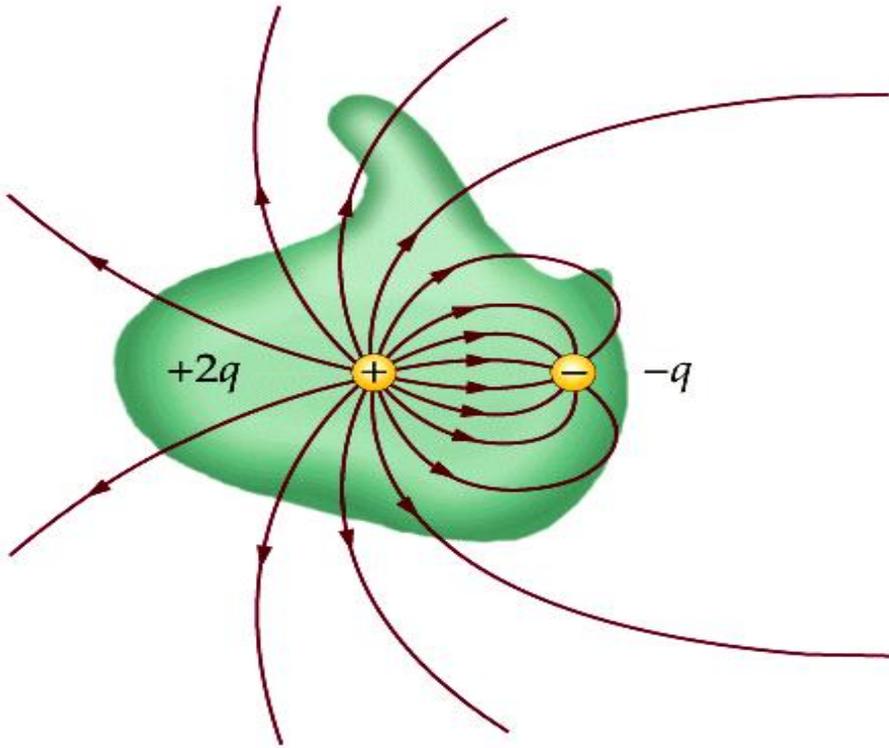
3.3 Flujo eléctrico en general_3

- Cuando una línea ingresa a la superficie el flujo es negativo
- Cuando una línea sale de la superficie el flujo es positivo



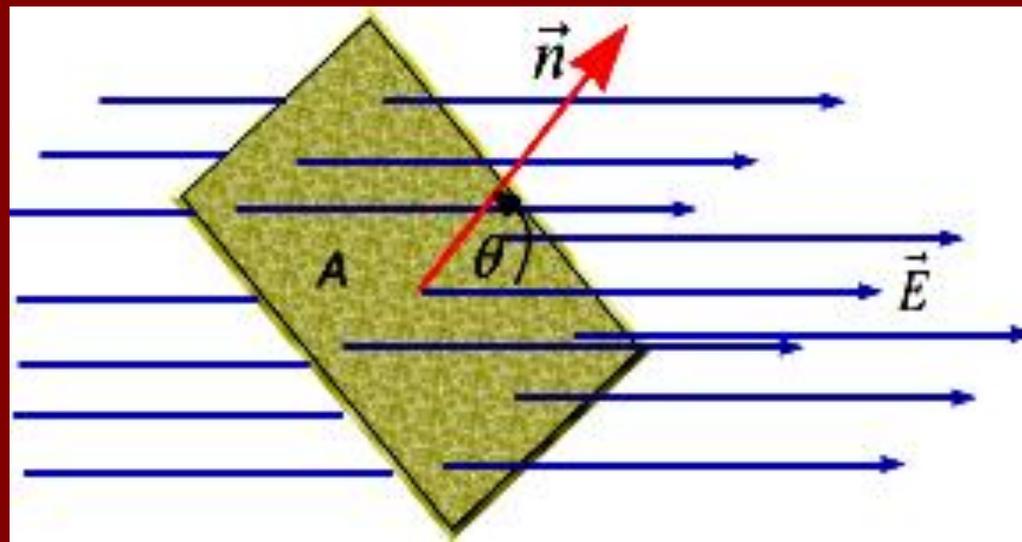
EJEMPLO 01

- En forma cualitativa indique el tipo de flujo en las gráficas mostradas



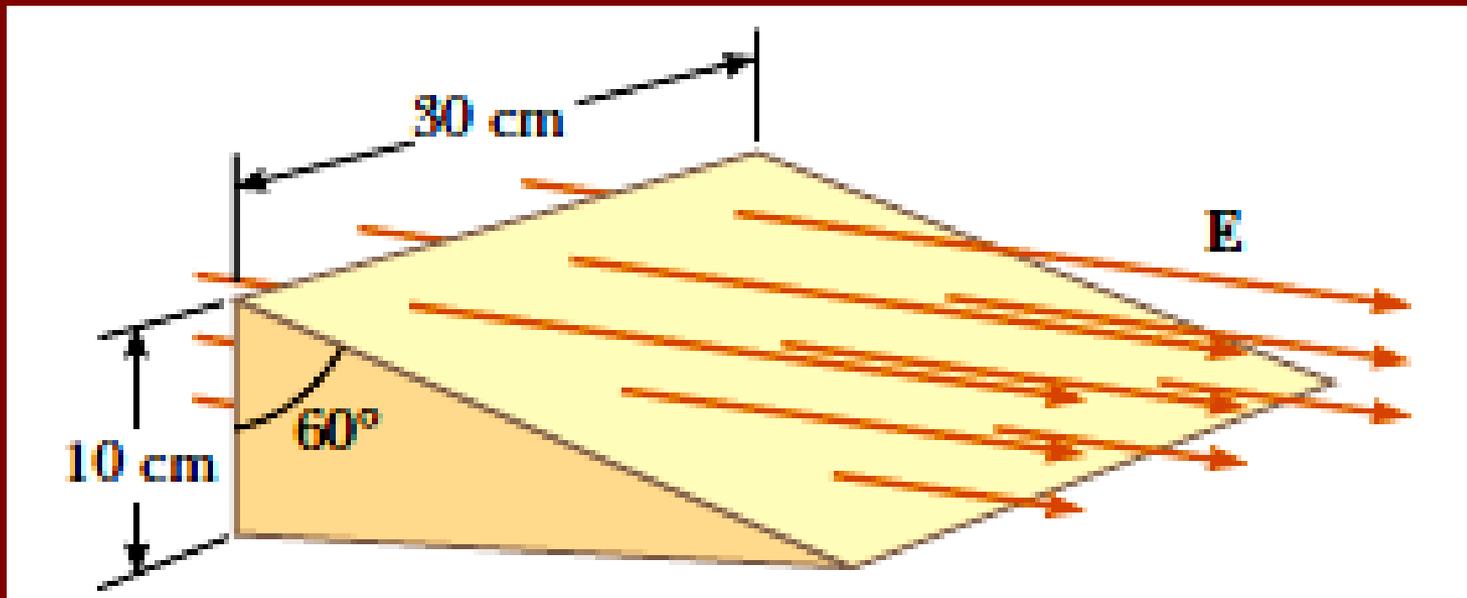
Ejemplo 02

Una hoja plana de papel con un área de $0,250 \text{ m}^2$, está orientada de tal modo que la normal a la hoja forma un ángulo de 60° con un campo eléctrico uniforme cuya magnitud es de 14 N/C . (a) Determine la magnitud del flujo eléctrico a través de la hoja, (b) ¿Depende su respuesta al inciso (a) de la forma de la hoja? ¿Porqué?. (c) ¿Con qué ángulo θ entre la normal a la hoja y el campo eléctrico es la magnitud del flujo a través de la hoja i) máximo, ii) mínimo?



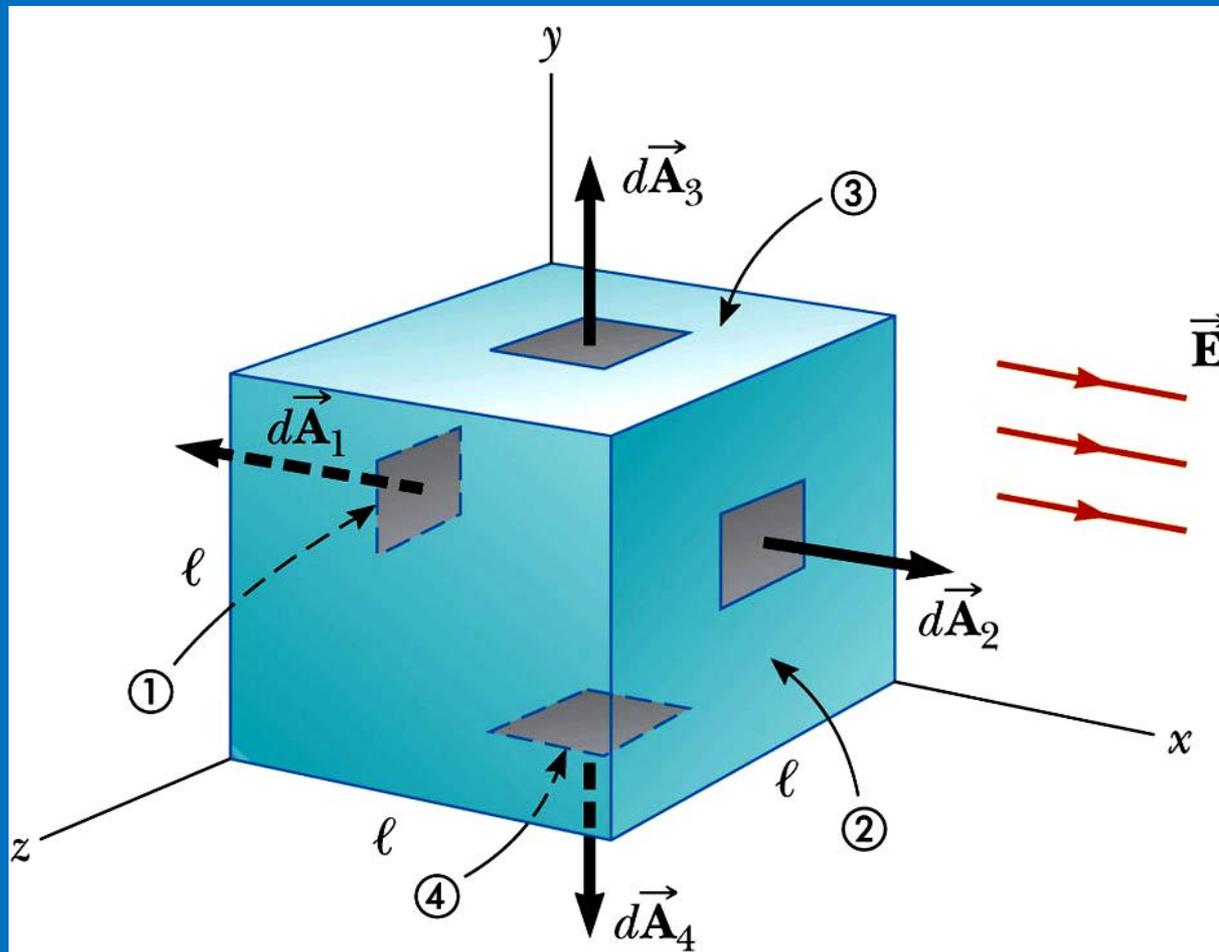
Ejemplo 03

Considere una caja triangular cerrada en el interior de un campo eléctrico horizontal de magnitud $E = 7,8 \cdot 10^4$ N/C como se muestra en la figura. Determine el flujo eléctrico a través de: (a) la superficie rectangular vertical, (b) la superficie inclinada y (c) la superficie completa del cubo



Ejemplo 04

Un cubo de arista ℓ está ubicado en un campo eléctrico E como se muestra en la figura. Halle el flujo a través de cubo

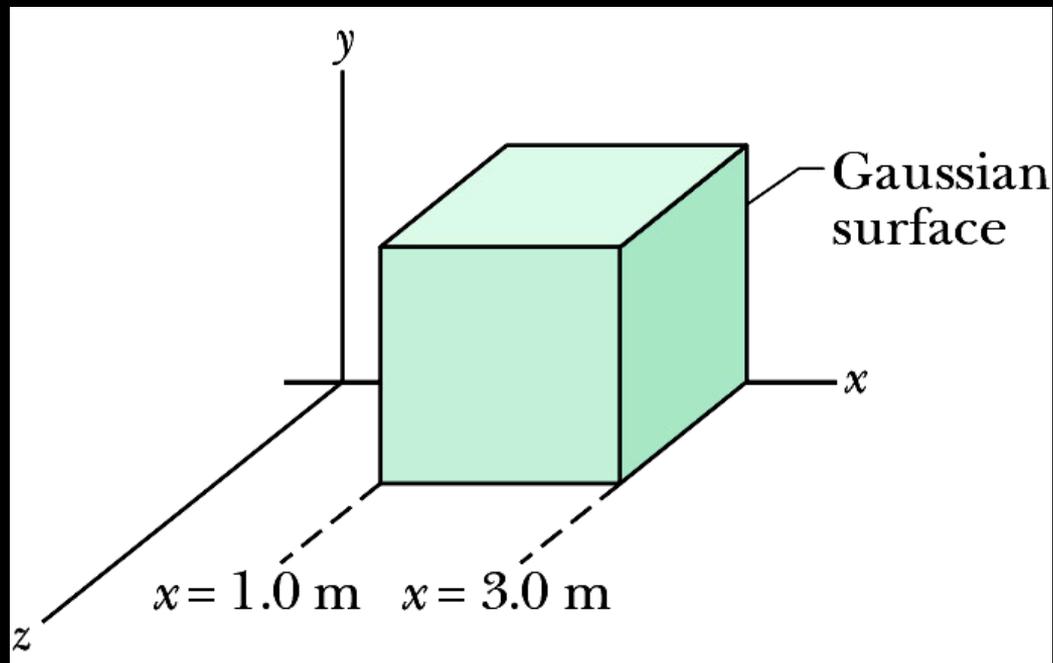


Ejemplo 05

Un cubo se encuentra en el interior de un campo magnético dado por la ecuación.

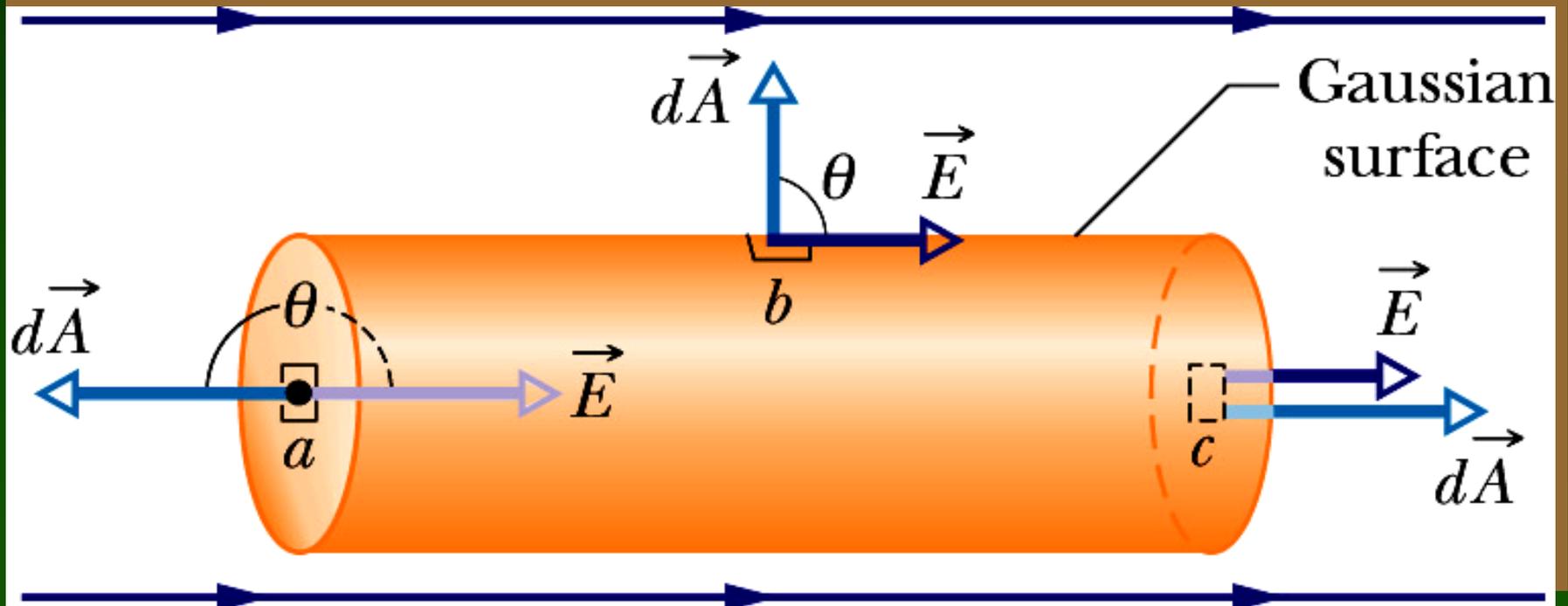
$$\vec{E} = (3x\hat{i} + 4\hat{j})N/C$$

Encuentre el flujo eléctrico a través de: (a) la cara derecha, (b) la cara izquierda, (c) a través del cubo



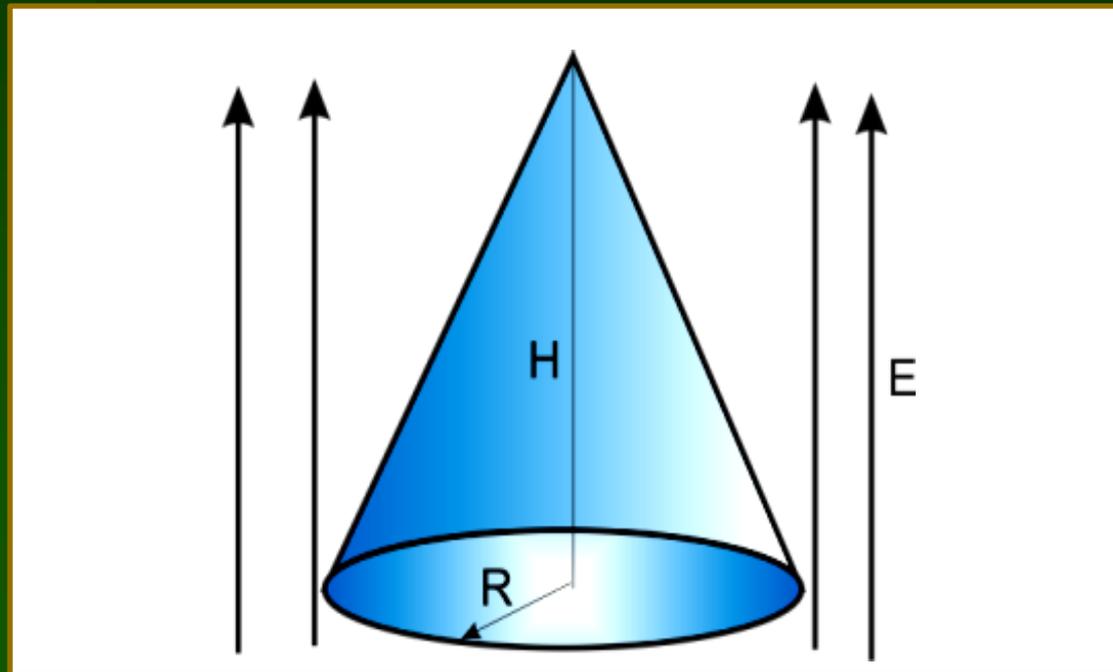
Ejemplo 06

El cilindro se encuentra en un campo horizontal. ¿Cuál es el flujo: (a) a través de la base, (b) a través de la tapa y (c) a través de la superficie lateral y (d) neto-



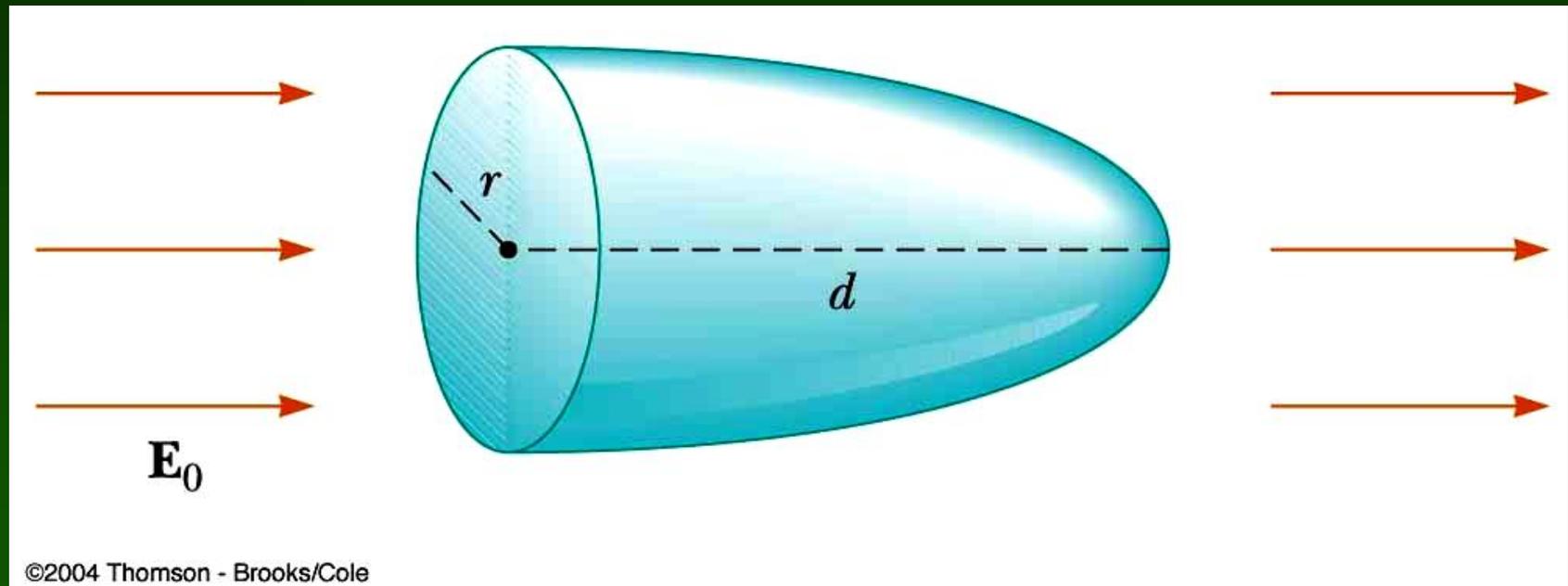
Ejemplo 07

- Un cono con una base de radio R y altura H se coloca en una mesa. Si existe un campo eléctrico vertical como se muestra en la figura. Determine el flujo eléctrico: (a) a través de la base y (b) a través de la superficie lateral.



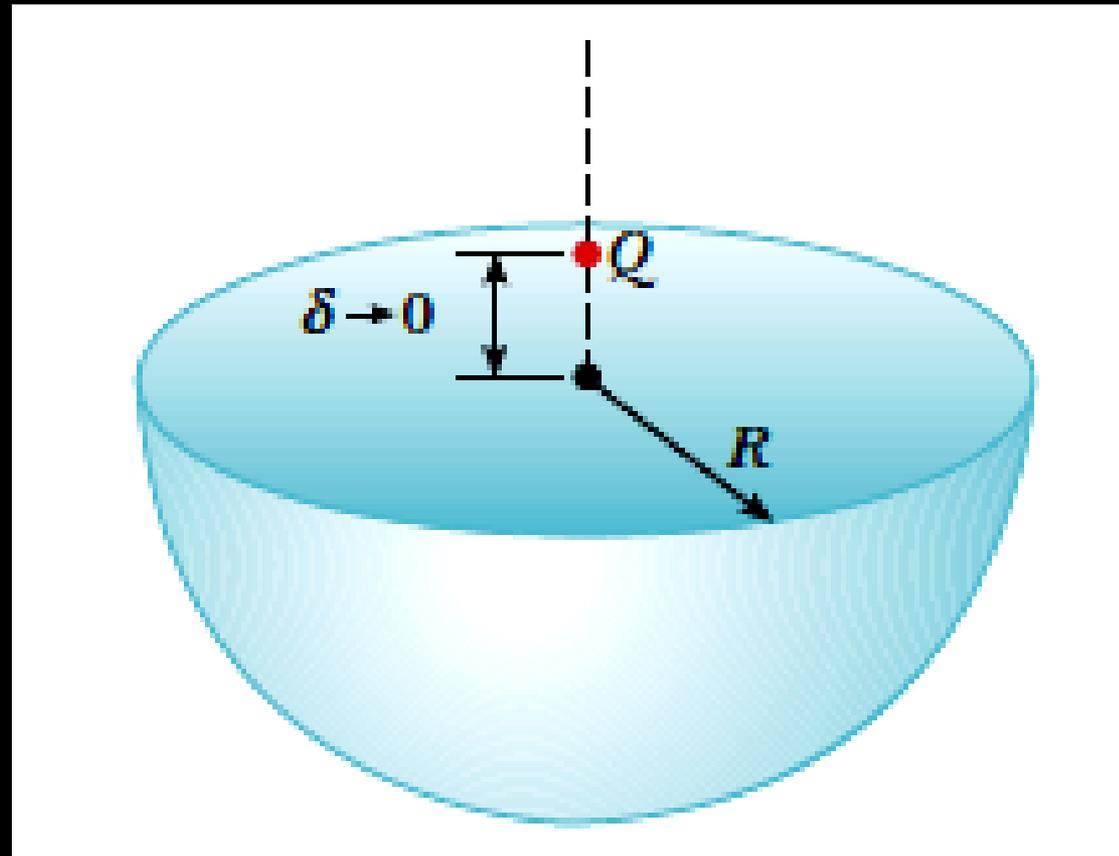
Ejemplo 08

- Calcular el flujo eléctrico total a través de la superficie del paraboloides debido a un campo eléctrico horizontal uniforme de magnitud E_0 dirigido como se muestra en la figura



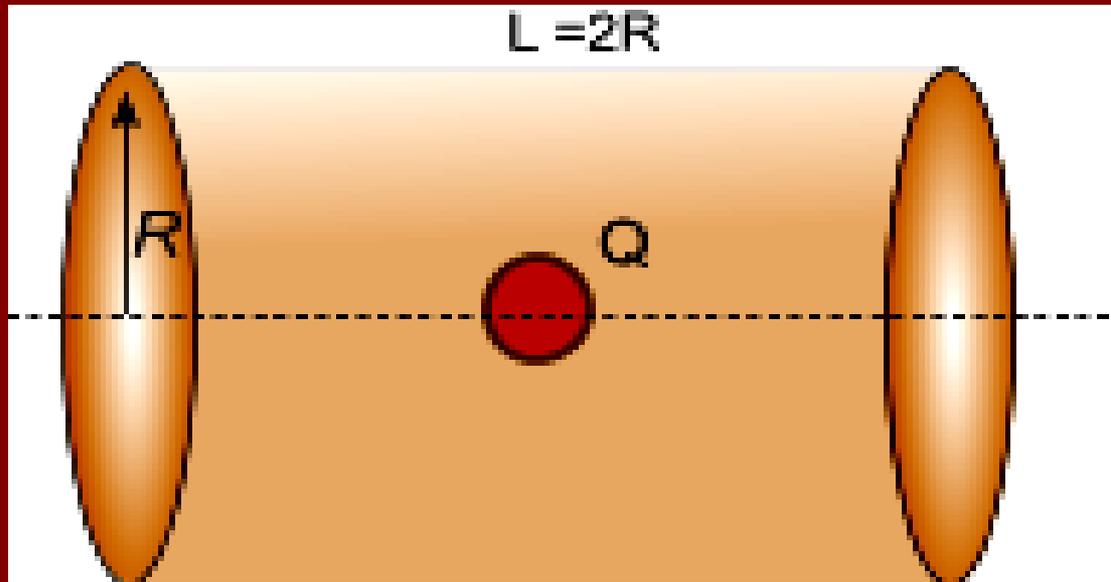
Ejemplo 09

- Una carga puntual Q se localiza justo por encima del centro de la cara plana de un hemisferio de radio R , como se muestra en la figura. Determine el flujo eléctrico que pasa: (a) a través de la superficie curva y (b) a través de la cara plana.



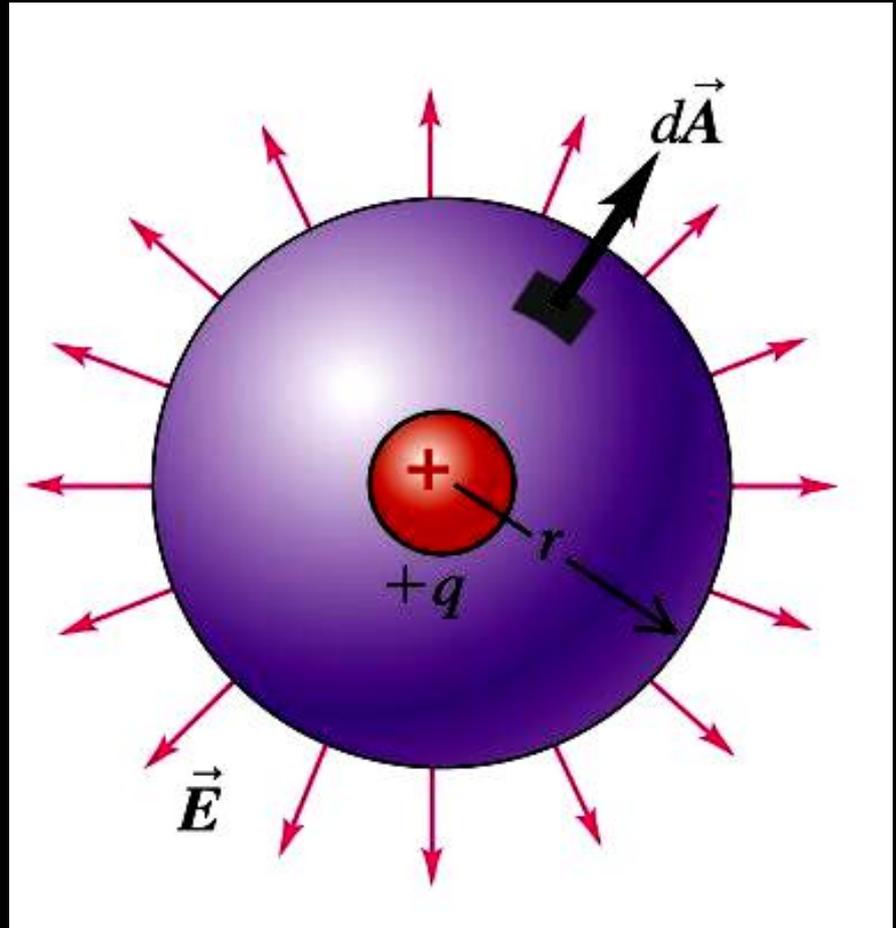
Ejemplo 10

- Una carga puntual Q está localizada en el centro de un cilindro corto. El diámetro del cilindro es igual a su longitud L . ¿Cuál es el flujo total a través de la superficie lateral del cilindro?



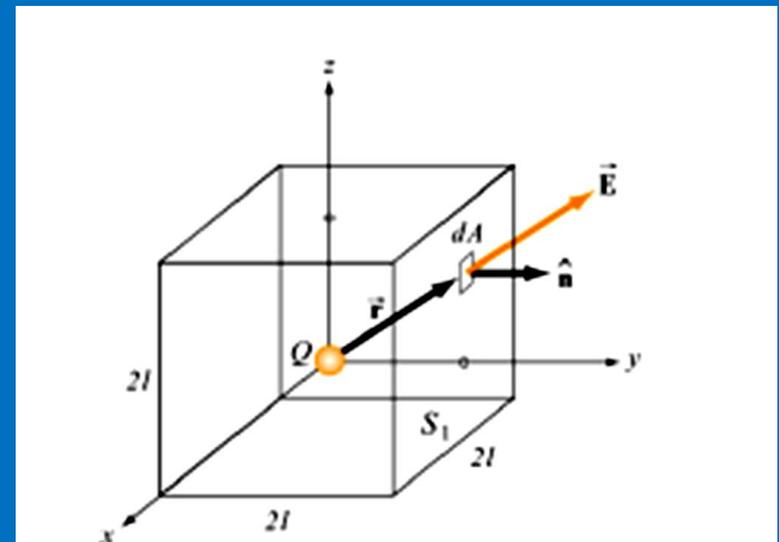
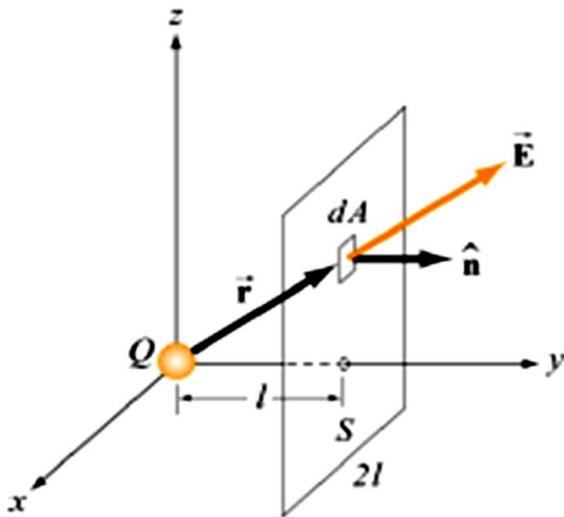
Ejemplo 11

Una carga puntual positiva $q = 3 \mu\text{C}$ es encerrada por una cáscara esférica de radio $r = 0,20 \text{ m}$ centrada en la carga. Encontrar el flujo eléctrico a través de la esfera debido a esta carga



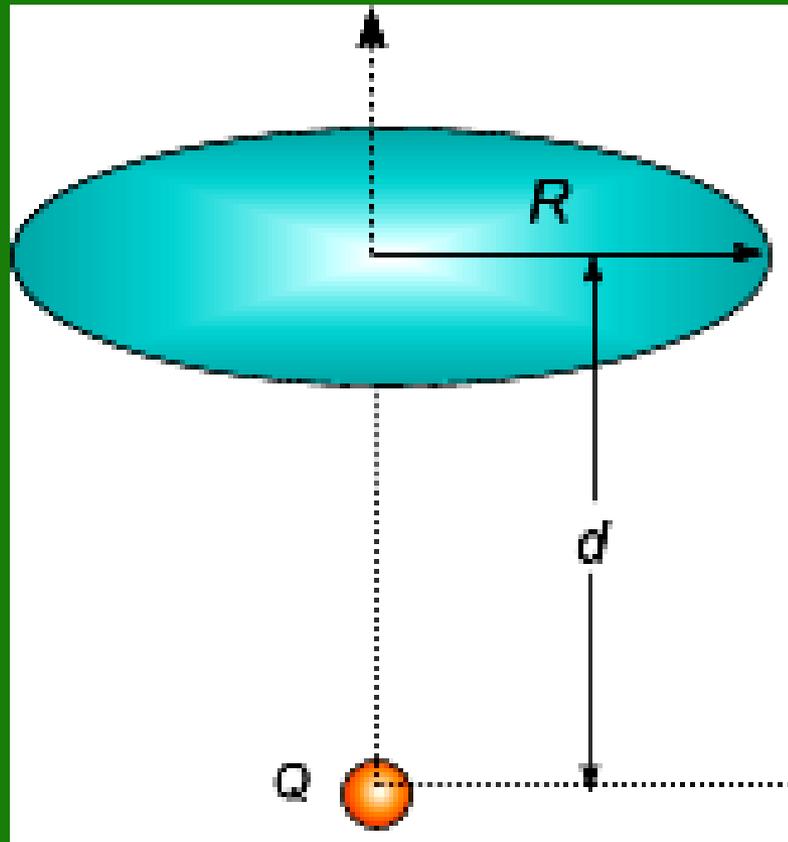
Ejemplo 12

- a) Determinar el flujo eléctrico a través de una superficie cuadrada de lado $2l$ debido a una carga $+Q$ localizada a una distancia perpendicular desde el centro del plano como se muestra en la figura.
- b) Utilizando el resultado obtenido en la parte (a), si la carga es $+Q$ es ahora localizada en el centro del cubo como se muestra en la figura. ¿Cuál es flujo total emergente del



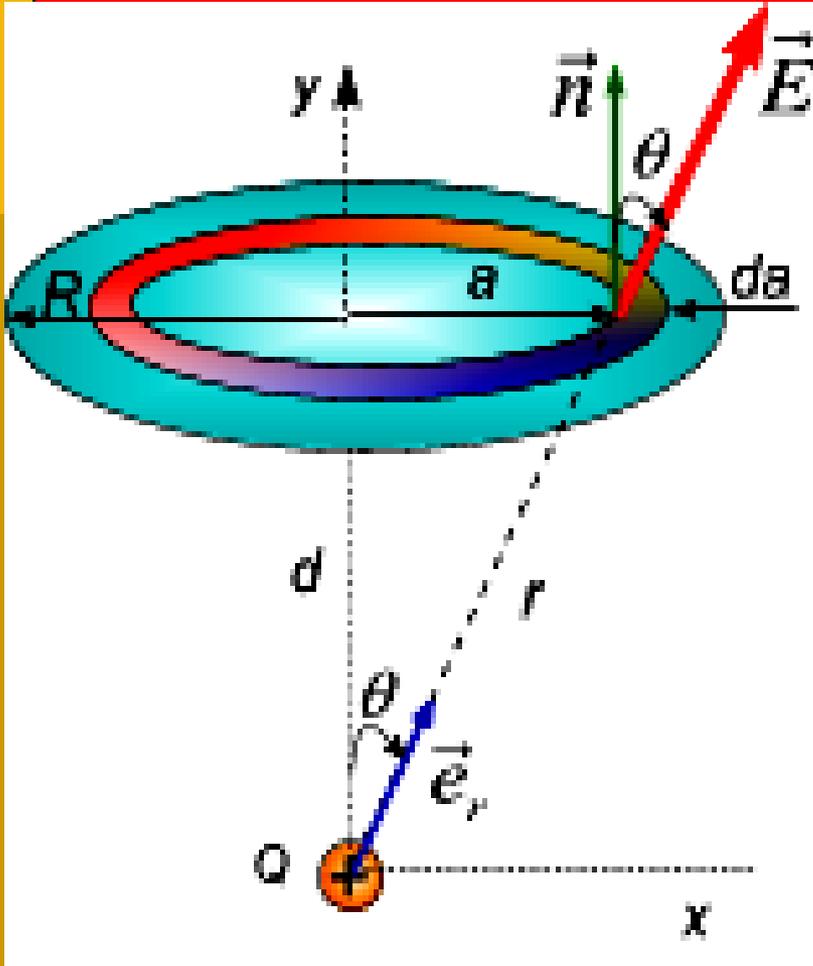
Ejemplo 13

Una carga puntual Q , está a una distancia d de una superficie circular S de radio $R = 3 \text{ cm}$ como se muestra en la figura. Determine el flujo del vector a través de S



Ejemplo : solución

- El flujo diferencial debido a +q es



$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \right) \cdot (\vec{n} dA)$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\cos \theta) dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{d}{r} \right) (2\pi a da)$$

$$d\Phi_E = \frac{Qd}{2\epsilon_0 r^3} (a da) = \frac{Qd(a da)}{2\epsilon_0 (a^2 + d^2)^{3/2}}$$

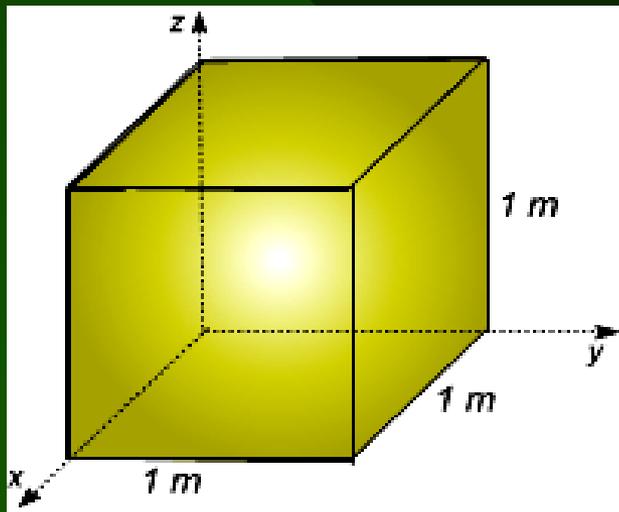
$$\Phi_E = \frac{Qd}{2\epsilon_0} \int_{a=0}^R \frac{a da}{(a^2 + d^2)^{3/2}} = -\frac{Qd}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2}} \Bigg|_0^R$$
$$\Phi_E = \frac{Q}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right]$$

Ejemplo 14

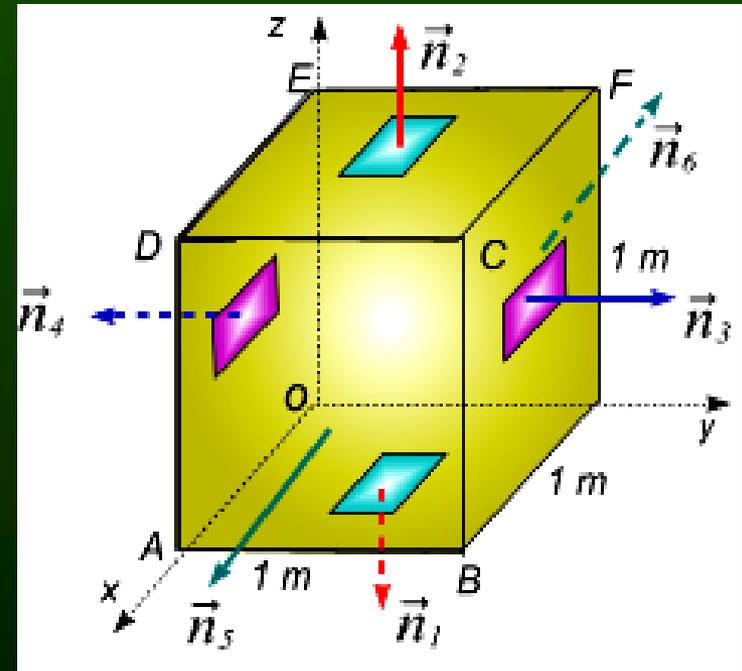
- La intensidad de campo eléctrico en una región del espacio está dado por.

$$\vec{E} = (4x\vec{i} + 2y\vec{j}) \text{ N/C}$$

Determine: (a) el flujo eléctrico que emana del cubo, (b) la carga neta contenida en el cubo de 1 m de lado.



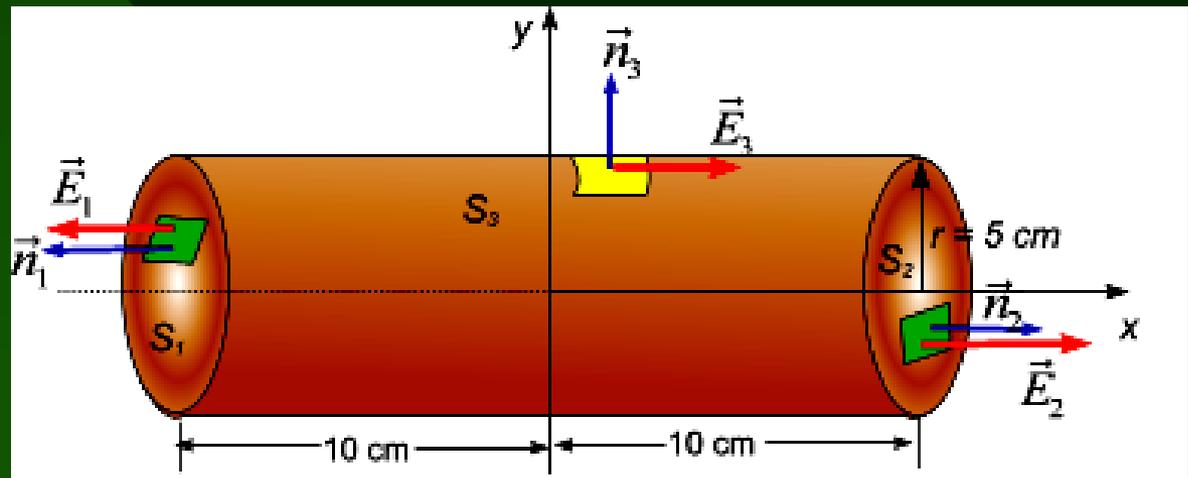
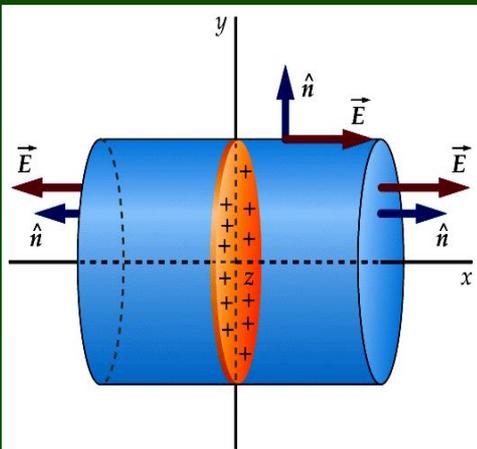
Solución



Ejemplo 15

Un campo eléctrico vale para $\vec{E} = 200 \hat{i} \text{ N/C}$ para $x > 0$ y , $\vec{E} = -200 \hat{i} \text{ N/C}$ para $x < 0$. Un cilindro circular recto de 20 cm de longitud y 5 cm de radio tiene su centro en el origen y su eje está a lo largo del eje x de modo que una de las caras está en $x = +10 \text{ cm}$ y la otra $x = -10 \text{ cm}$. (a) ¿Cuál es el flujo saliente que atraviesa cada cara?. (b) ¿Cuál es el flujo a través de la superficie lateral del cilindro?. (c) ¿Cuál es el flujo neto que atraviesa toda la superficie cilíndrica?.

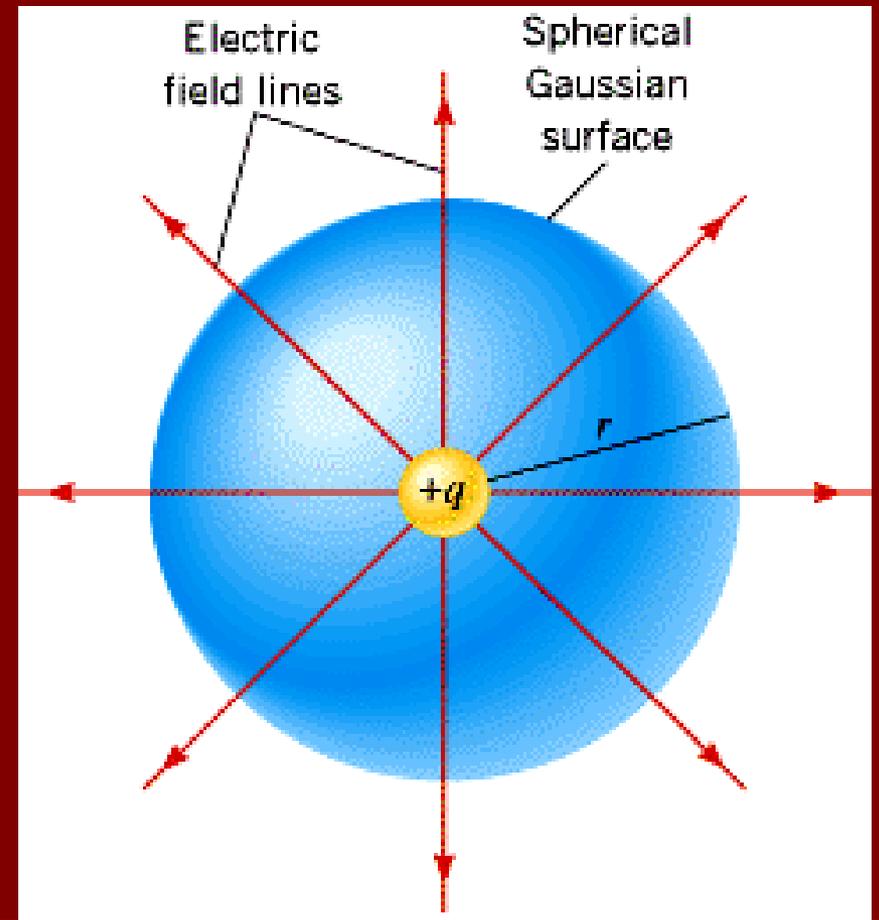
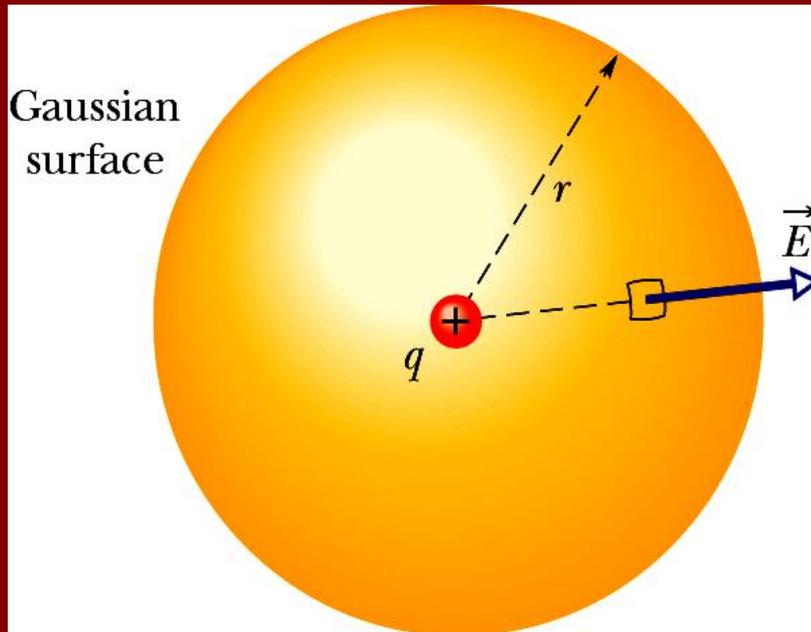
Solución



IV. Ley de Gauss

Flujo que emana de una carga puntual

- Consideremos una carga $+q$ en el centro de una superficie gaussiana esférica como se muestra en la fig.



IV. Ley de Gauss

Flujo que emana de una carga puntual

- El flujo a través de dA es

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

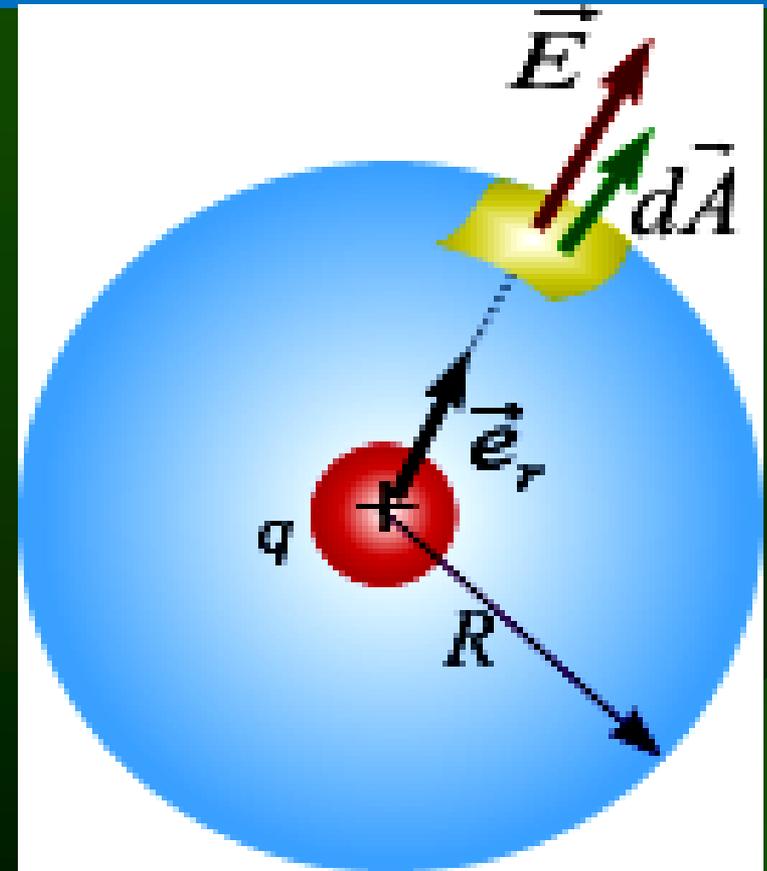
- El flujo neto será

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \iint_S \frac{kq}{R^2} \hat{e}_r \cdot \hat{n} dA$$

$$\Phi_E = kq \iint_S \frac{1}{R^2} \hat{e}_r \cdot \hat{n} dA$$

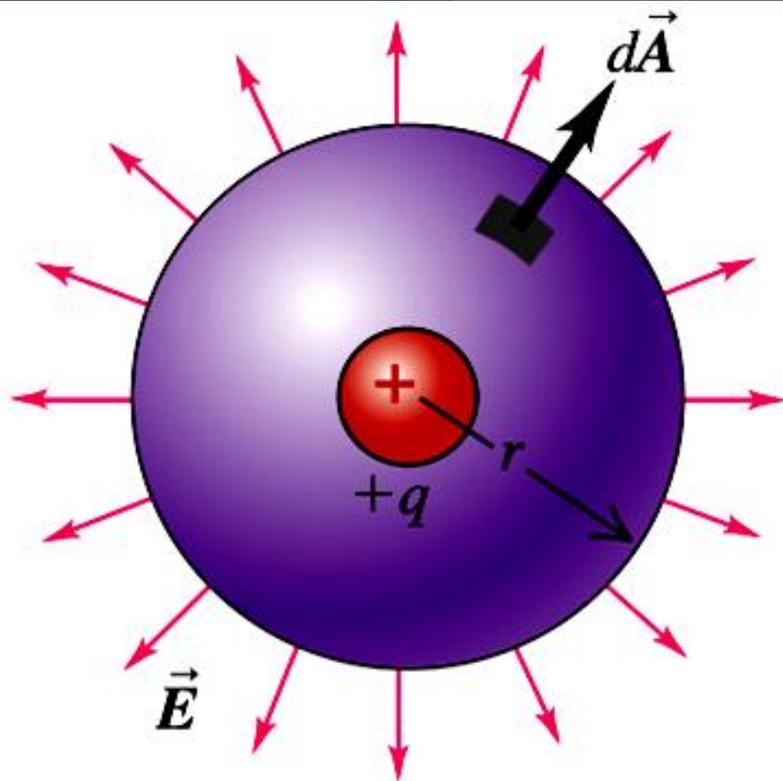
$$\Phi_E = \frac{kq}{R^2} \iint_S dA$$

$$\Phi_E = \left(\frac{kq}{R^2} \right) (4\pi R^2) = 4\pi kq$$

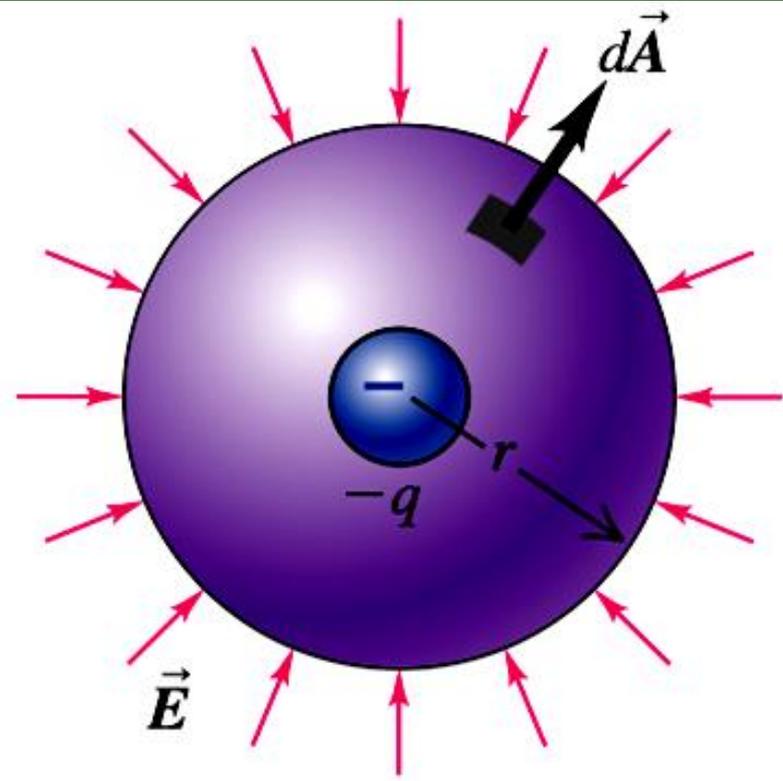


$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

IV. Ley de Gauss: Cargas puntuales



(a) Gaussian surface around positive charge: positive (outward) flux

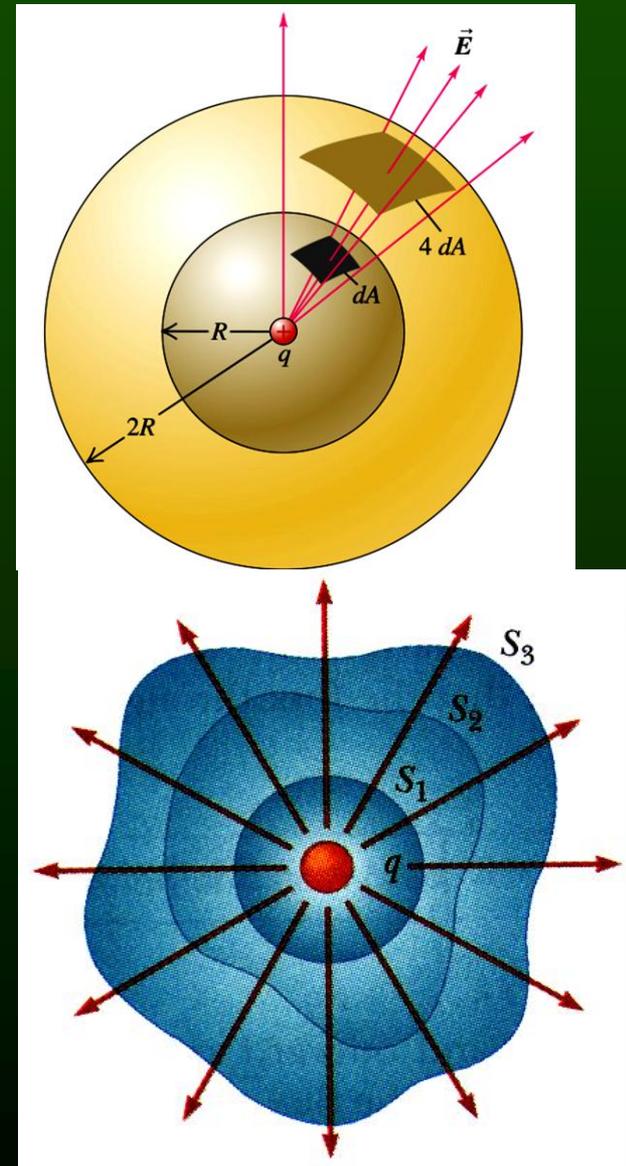


(b) Gaussian surface around negative charge: negative (inward) flux

IV. Ley de Gauss

Flujo que emana de una carga puntual

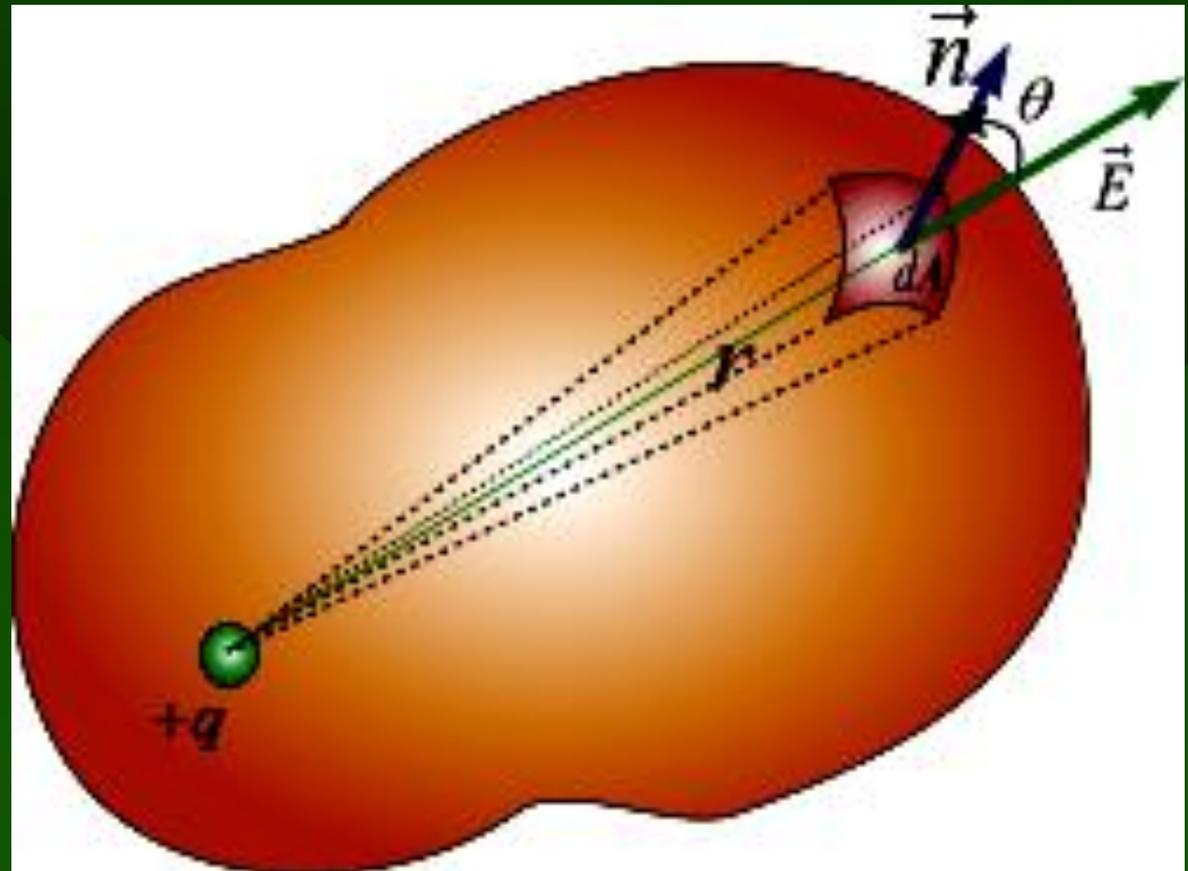
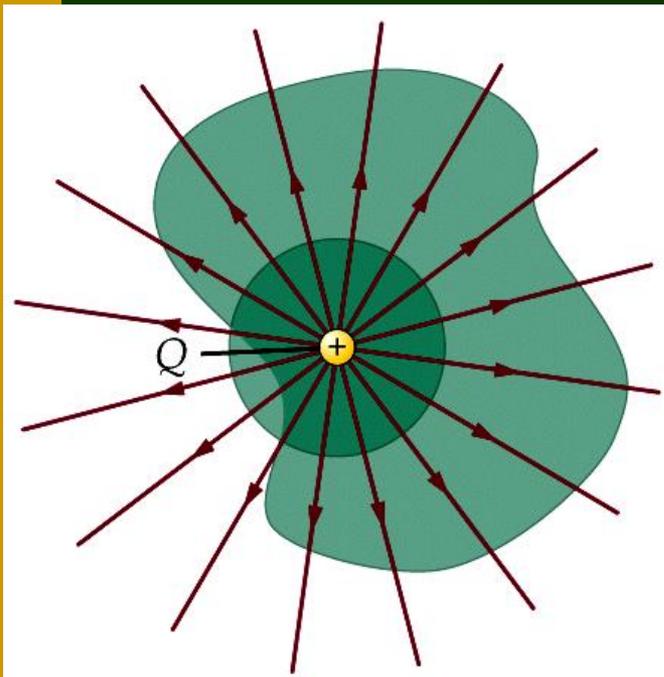
- El resultado obtenido es independiente del radio.
- Este resultado puede interpretarse también en términos de las líneas de fuerza. La figura muestra dos superficies esféricas concéntricas de radios R y $2R$, respectivamente centradas en la carga puntual q . Cada línea de flujo que atraviesa la superficie pequeña también atraviesa la superficie grande, por lo que el flujo neto a través de cada superficie es el mismo.



IV. Ley de Gauss

Flujo que emana de una carga puntual (superficie irregular)

- Consideremos una carga $+q$ en el interior de una superficie arbitraria.



IV. Ley de Gauss

Flujo que emana de una carga puntual (superficie irregular)

- Se divide a la superficie en elementos de área dA a una distancia r de q . El flujo será

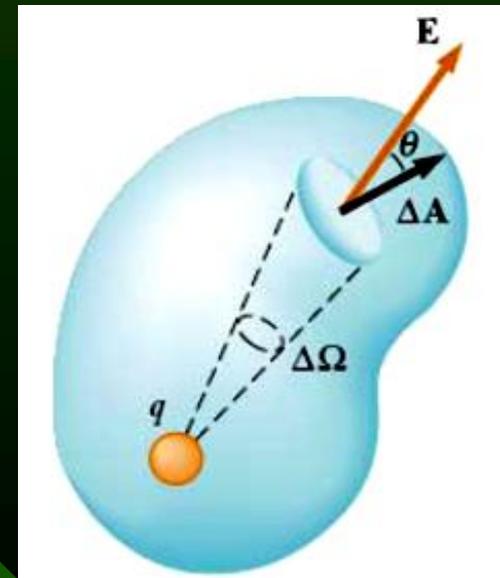
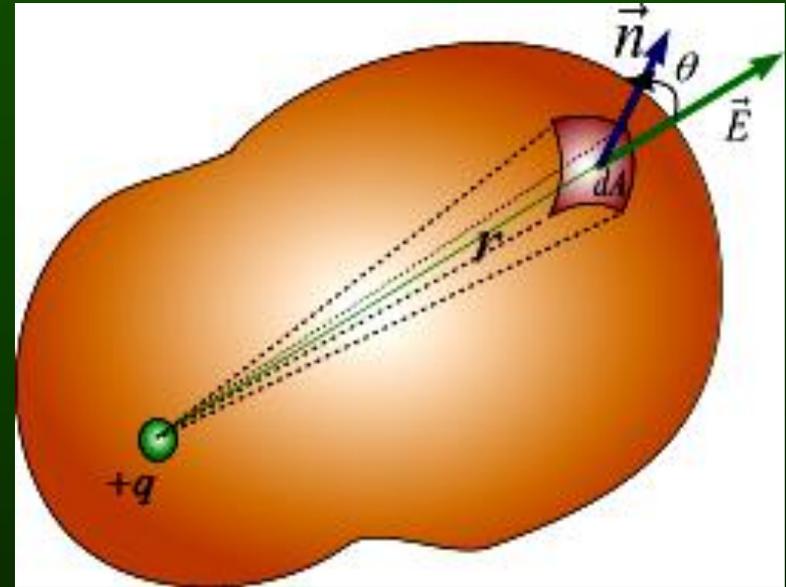
$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot \hat{n} dA$$

$$d\Phi_E = \frac{kq}{r^2} e_r \cdot \hat{n} dA$$

$$d\Phi_E = kq \frac{\cos \theta dA}{r^2}$$

- El flujo neto será

$$\Phi_E = \int d\Phi_E = kq \oint_S \frac{\cos \theta dA}{r^2}$$



IV. Ley de Gauss: Angulo sólido

- De la definición de ángulo sólido $d\Omega$, subtendido por elemento de superficie visto desde la carga (véase la figura), se tiene

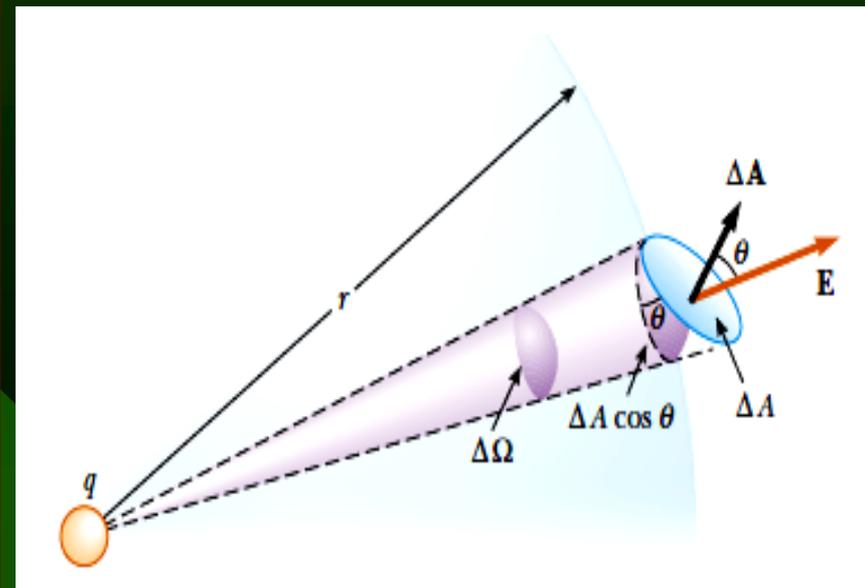
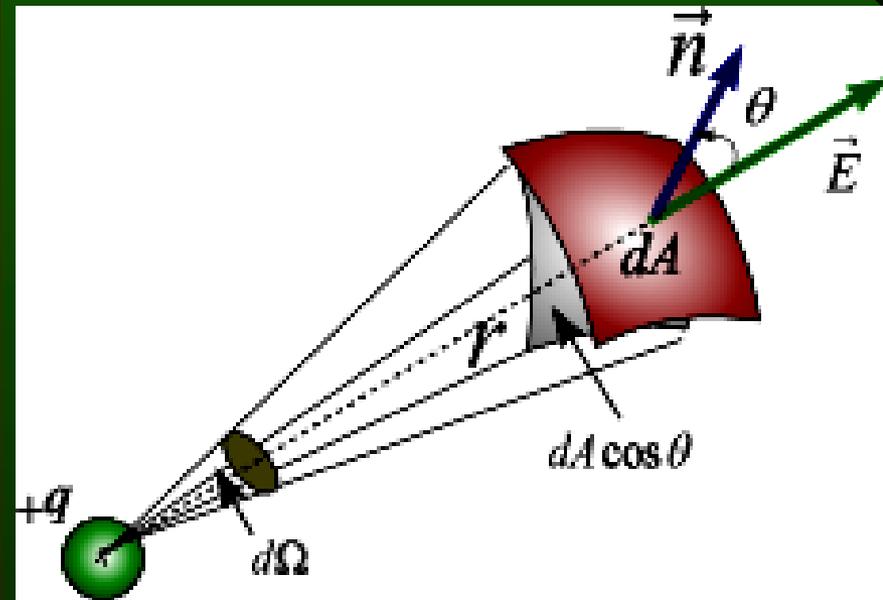
$$d\Omega = \frac{\hat{e}_r \cdot \hat{n} dA}{r^2} = \frac{\cos \theta dA}{r^2}$$

- Al remplazar en la ecuación anterior se tiene

$$\Phi_E = kq \oint_S d\Omega = kq\Omega$$

- Pero el ángulo sólido es 4π stereoradianes

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (4\pi) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

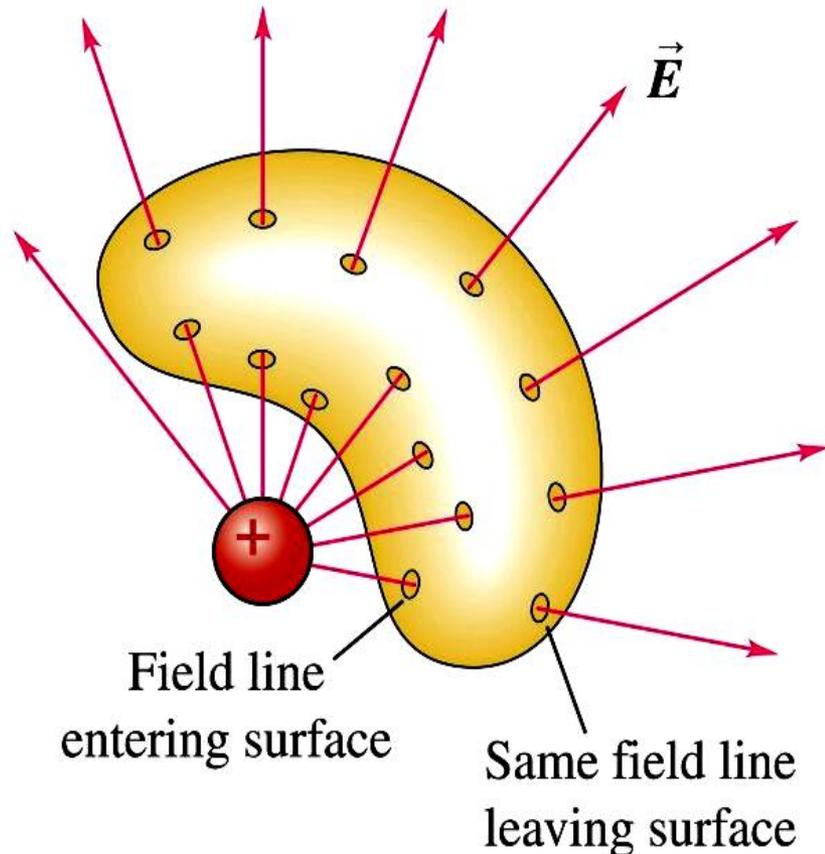


IV. Ley de Gauss: Carga fuera de la superficie

- Si la carga está fuera de la superficie como se muestra, la ley de Gauss se expresa en la forma

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

$$\Phi_E = 0$$



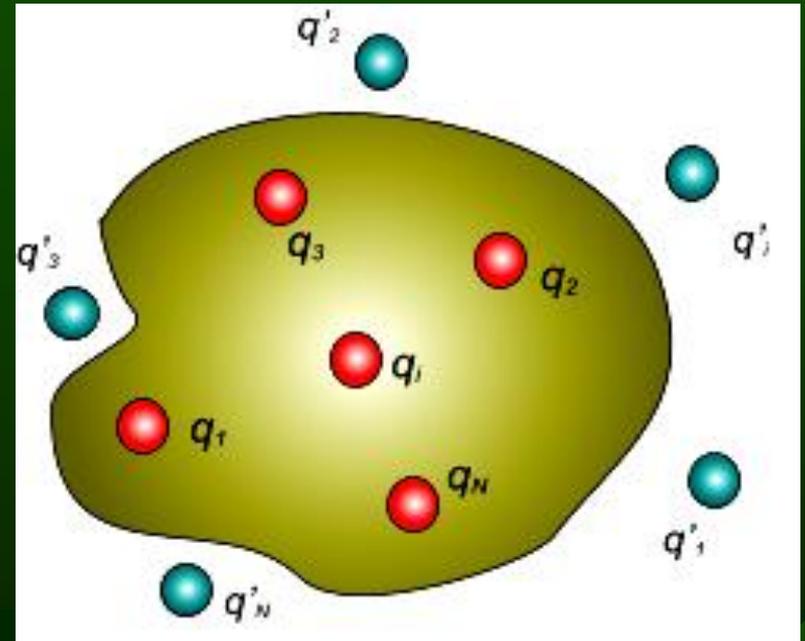
IV. Ley de Gauss: Cargas fuera e interiores a la superficie gaussiana

- Si existen un conjunto N de cargas interiores a la superficie y un conjunto de cargas externas N'. La ley de Gauss se expresa en la forma

$$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} \, dA$$

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} (q_1 + q_2 + \dots + q_N)$$

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$



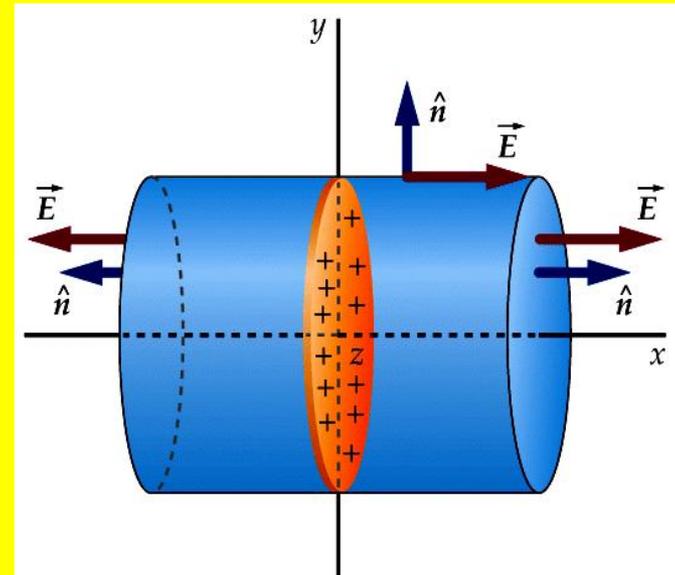
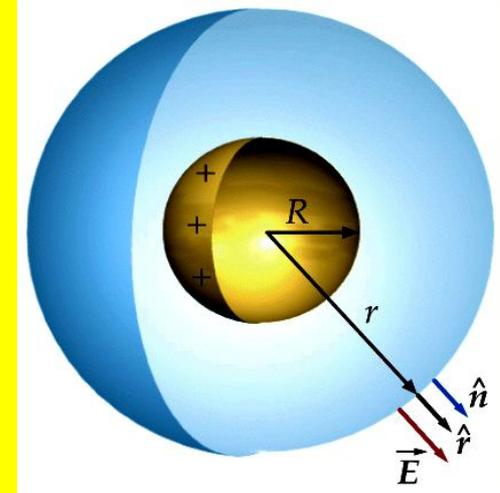
$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

IV. Ley de Gauss: Distribuciones de cargas en el interior de la superficie gaussiana

Si la carga que se encuentra en el interior es una distribución lineal, superficial o volumétrica, la ley de Gauss se escribe

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq$$



IV. Ley de Gauss: Conclusión

“Dada una distribución de carga, discreta o continua, el flujo eléctrico total producido por la carga y que va a través de cualquier superficie gaussiana cerrada S , está relacionada con la carga total dentro de la superficie por la ecuación

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Donde , E es el campo eléctrico producido por todas las cargas, las interiores y las exteriores, y Q_{enc} , es la carga total contenida en la superficie gaussiana”.

Ley de Gauss



$$\phi_e = \cancel{4\pi} K Q = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$K = \frac{1}{\cancel{4\pi}\epsilon_0}$

ϵ_0 → permitividad del vacío
||
 $8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

Q → carga encerrada por S



La Ley de Gauss es válida para cualquier superficie cerrada y/o distribución de carga (también para cargas no estáticas). Si el medio no es el vacío habría que introducir el efecto del medio.



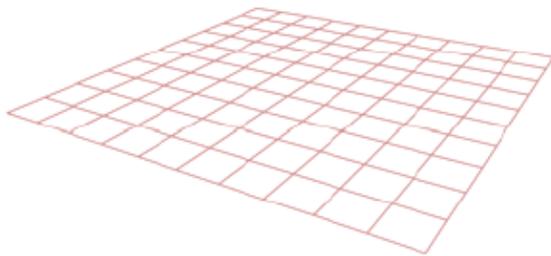
A pesar de su generalidad, sólo es útil para distribuciones de alta simetría.

V. Aplicaciones de la Ley de Gauss:

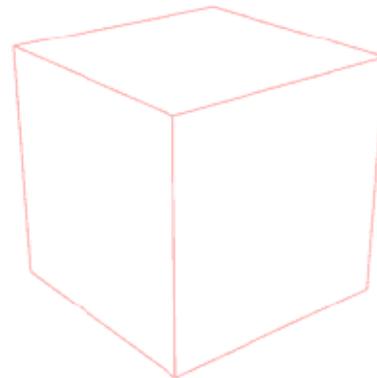


Situaciones de simetría definida, en la que la Ley de Gauss puede ser útil:

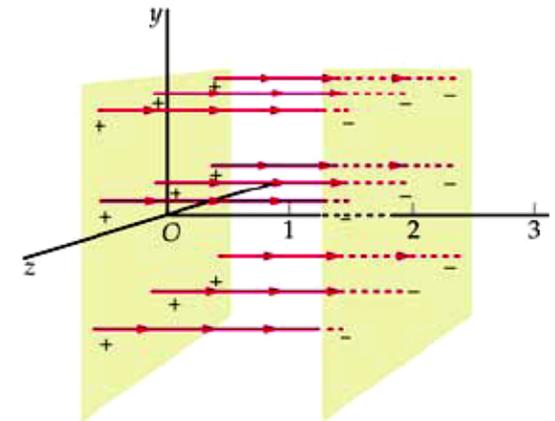
1) Simetría plana o rectangular



Planos

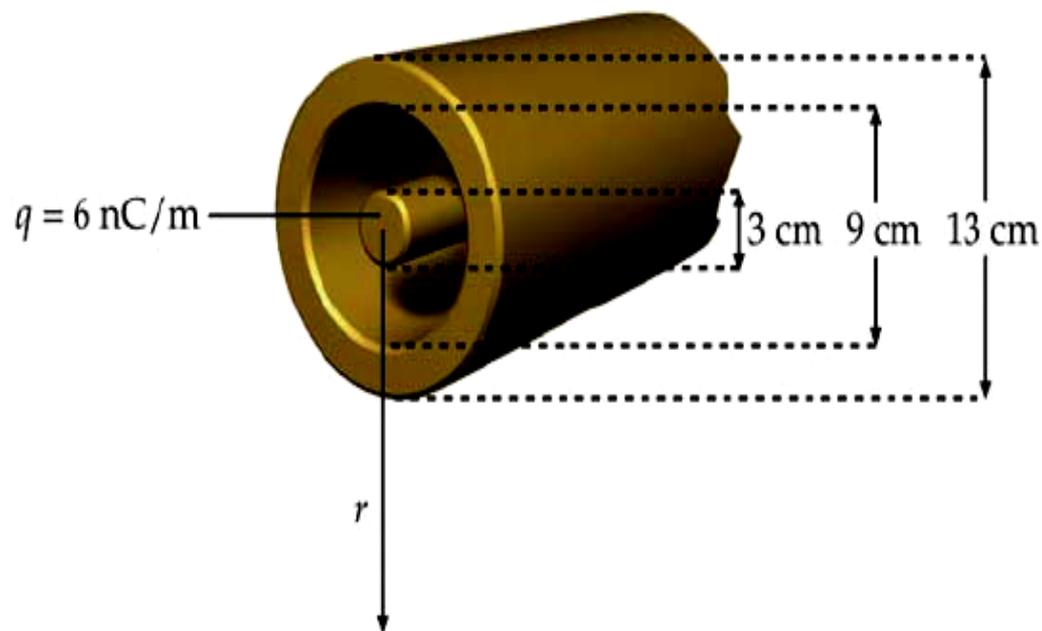


Volúmenes rectangulares,
paralelepédicos



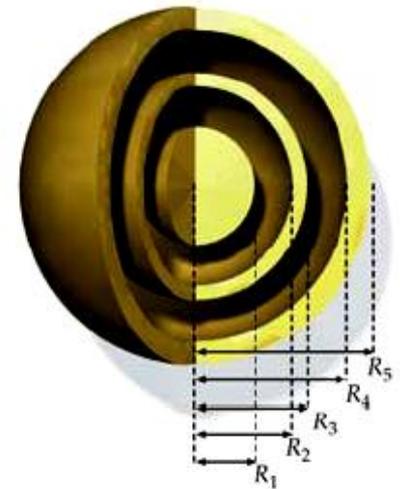
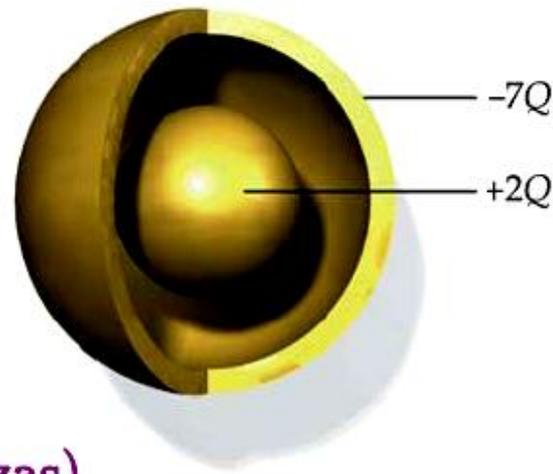
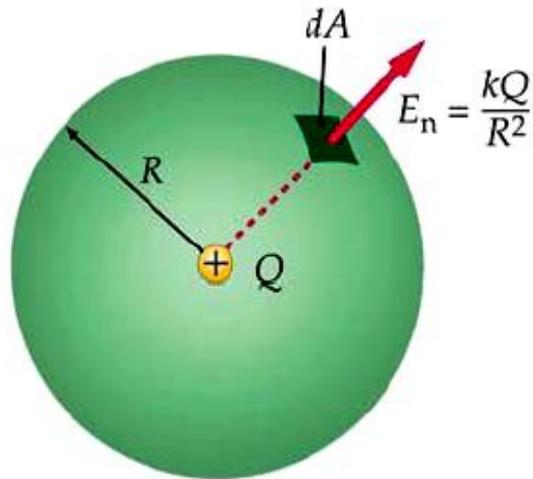
Sistemas de planos
paralelos...

2) Simetría cilíndrica



- Hilos de carga
- Cilindros huecos ó macizos
- Sistemas de cilindros coaxiales
- Cable coaxial

3) Simetría esférica



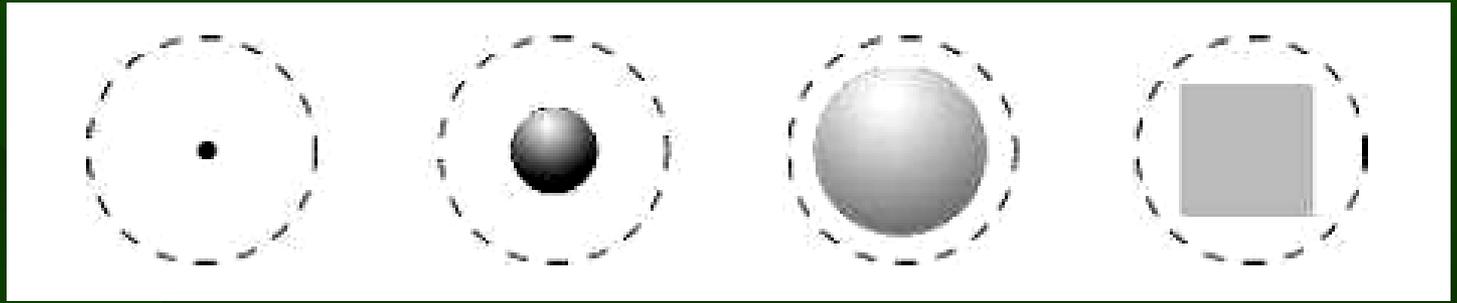
Esferas (huecas o macizas)

Cortezas esféricas

Esferas concéntricas...

V. Aplicaciones de la Ley de Gauss_0

Considere una partícula, una esfera metálica, un cascarón metálico esférico, y un cubo plástico, todos ellos poseen cargas idénticas Q . Cada una de ellas está rodeada por superficies gaussianas esféricas idénticas.

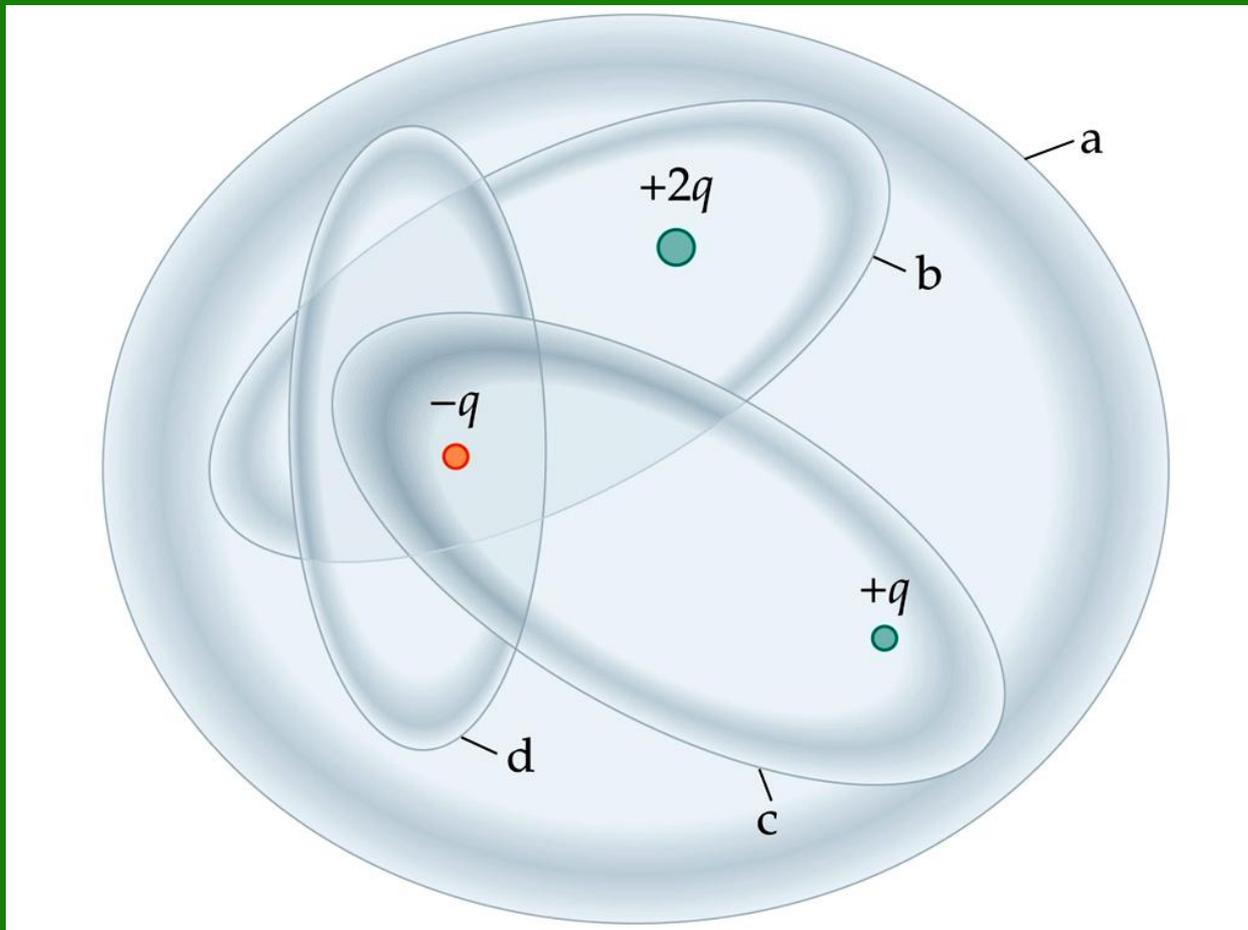


Las líneas de flujo a través de la superficie gaussiana:

1. Es el mismo para las cuatro distribuciones
2. Es mucho mayor para el cascarón
3. Es mucho mayor para el cubo
4. Depende de cómo es la distribución de carga en el cubo
5. Otra.

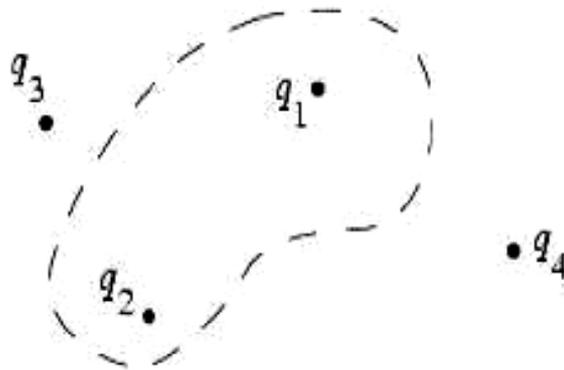
EJEMPLO 02

- Calcular el flujo eléctrico a través de cada una de las superficies mostradas en la figura



Ejemplo 03

Consider the four charged particles illustrated below. Imagine a Gaussian surface enclosing two of the four charges (q_1 and q_2).

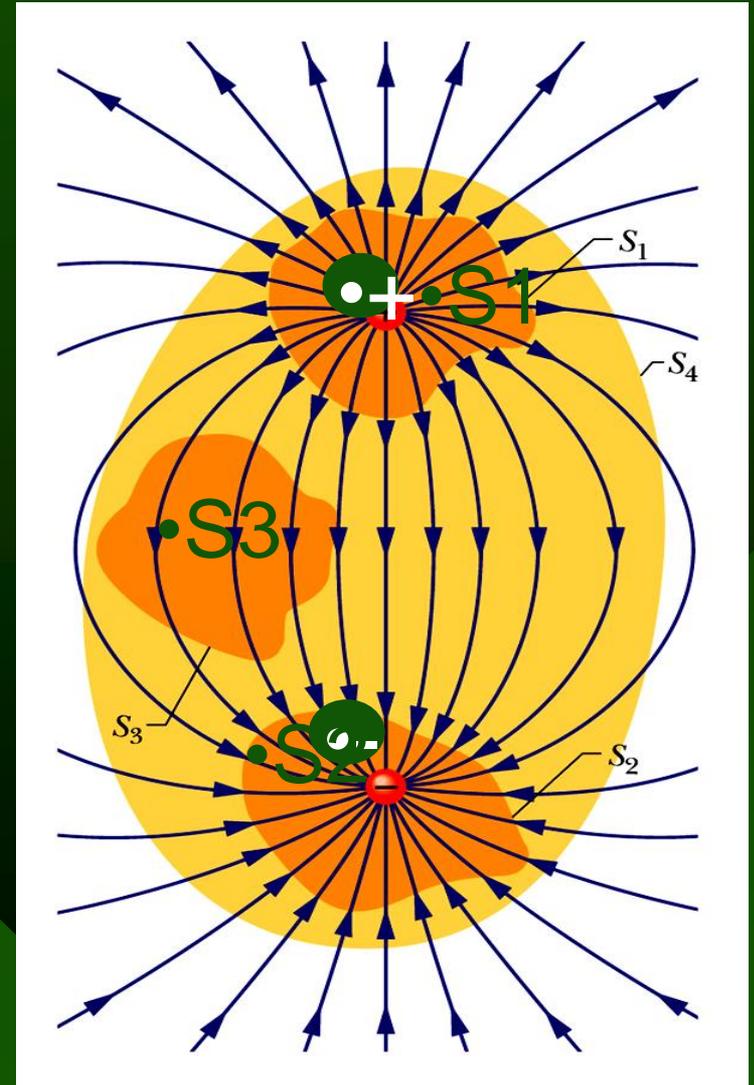
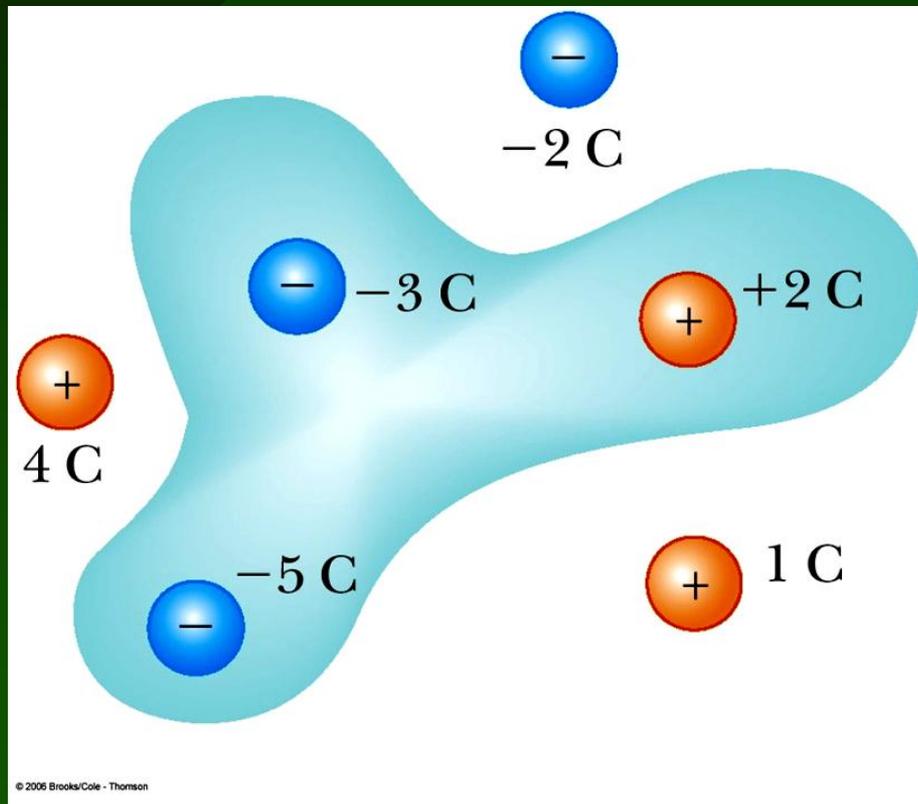


Which charged particles contribute to the electric flux through the Gaussian surface?

1. Only q_1 and q_2
2. Only q_3 and q_4
3. All four contribute
4. Some other combination of particles contribute
5. The answer depends on the shape of the Gaussian surface

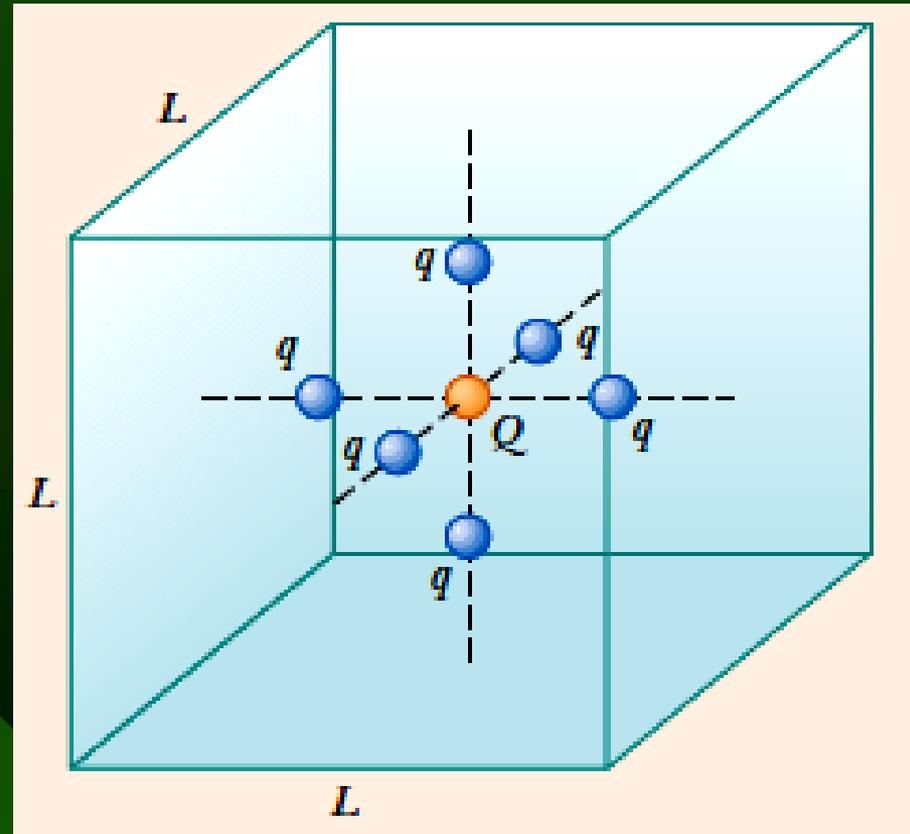
Ejemplo 03

Encuentre el flujo neto a través de cada una de las superficies cerradas.



Ejemplo 07

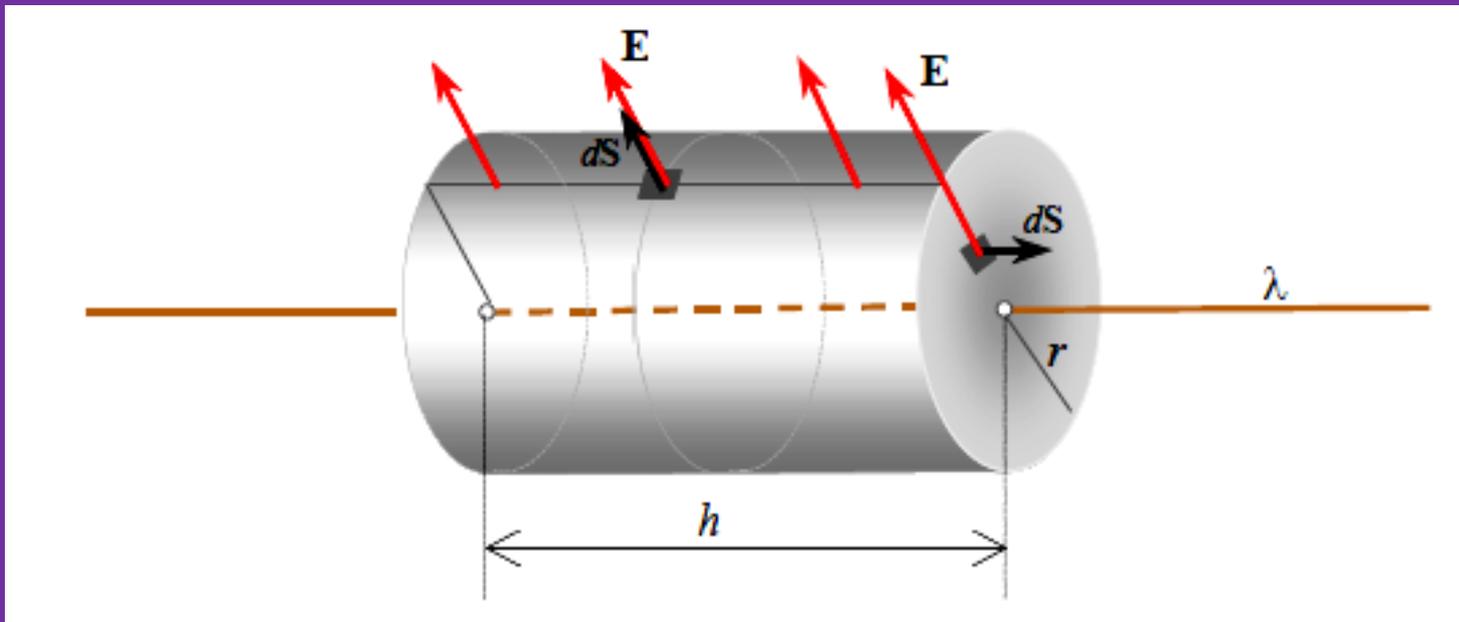
Una carga puntual $Q = 5 \mu\text{C}$ se localiza en el centro de un cubo de arista $L = 0,1\text{m}$. Además simétricamente alrededor de Q como se muestra en la figura, existen otras seis cargas puntuales $q = -1 \mu\text{C}$. Determine el flujo eléctrico a través de una de las caras del cubo.



V. Aplicaciones de la Ley de Gauss_1

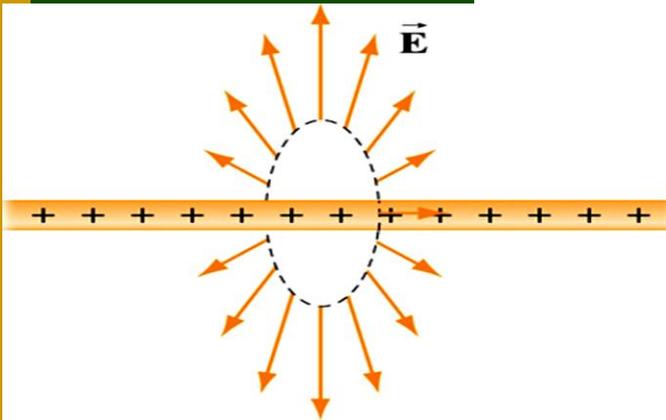
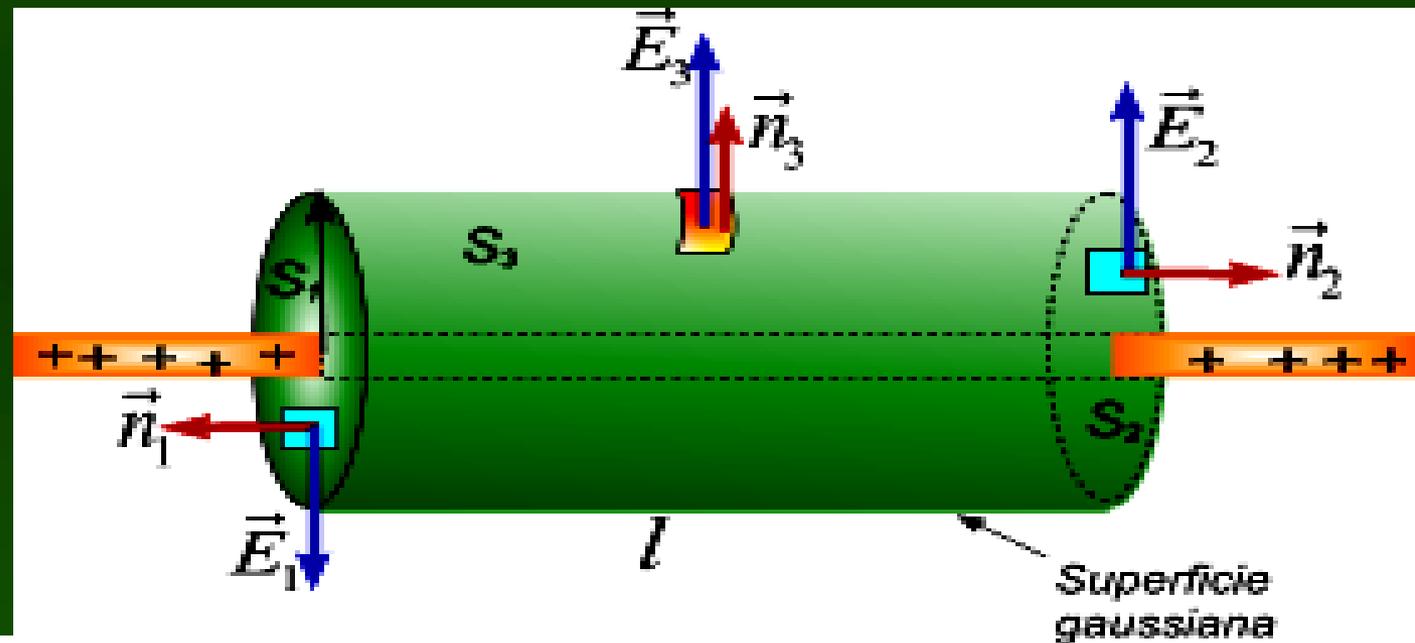
5.1 Campo eléctrico E de una distribución de carga lineal.

Un alambre delgado infinito transporta una carga distribuida uniformemente a lo largo de su longitud con una carga por unidad de longitud λ . Determine el campo eléctrico en un punto situado a una distancia r perpendicular al alambre.



Solución del problema de la barra cargada

- En la figura se muestra el alambre y la superficie gaussiana escogida. Así mismo se muestra las líneas de campo de campo



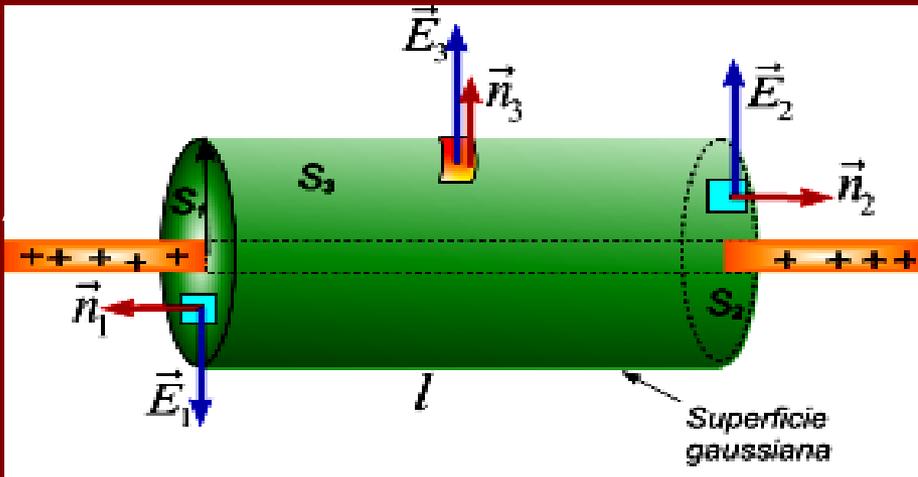
Solución Problema de la barra cargada

El flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana cilíndrica es

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA$$

$$\Phi_E = \iint_{\substack{S_1 \\ 0}} E_1 \cos 90^\circ dA + \iint_{\substack{S_2 \\ 0}} E_2 \cos 90^\circ dA + E \iint_{S_3} dA$$

$$\Phi_E = E (A_{\text{sup,lat}}) = E (2\pi r l)$$



$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \rightarrow E(2\pi r l) = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

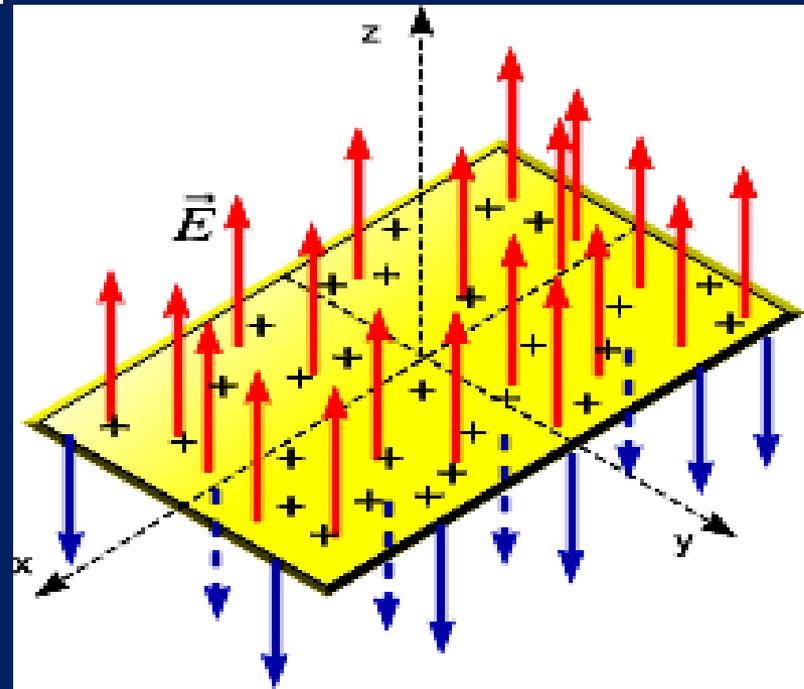
$$E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

V. Aplicaciones de la Ley de Gauss_2

5.2 Campo eléctrico E de una distribución de carga laminar.

Una lámina plana delgada e infinita transporta una carga distribuida uniformemente a lo largo su superficie con una carga por unidad de área σ . Determine el campo eléctrico E creado por la lámina en un punto situado a una distancia z perpendicular a la superficie.



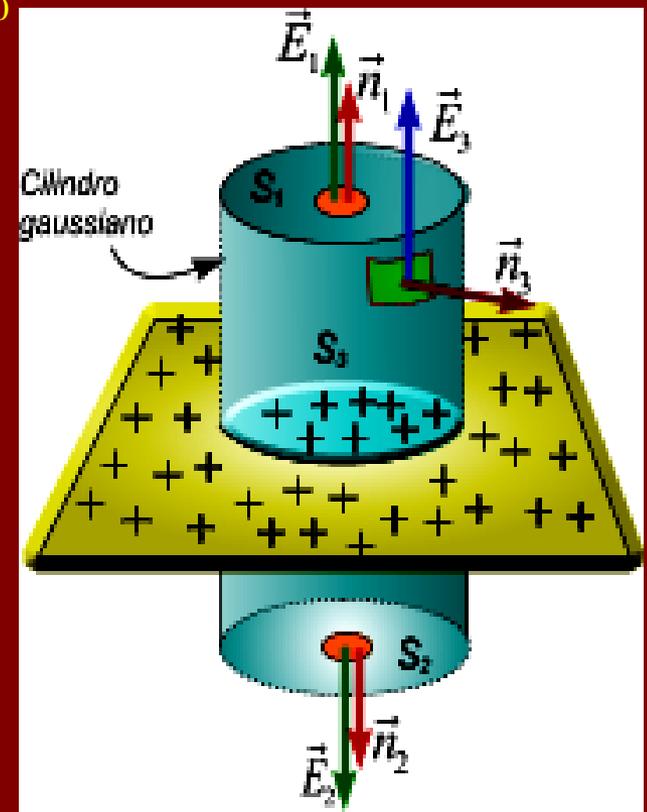
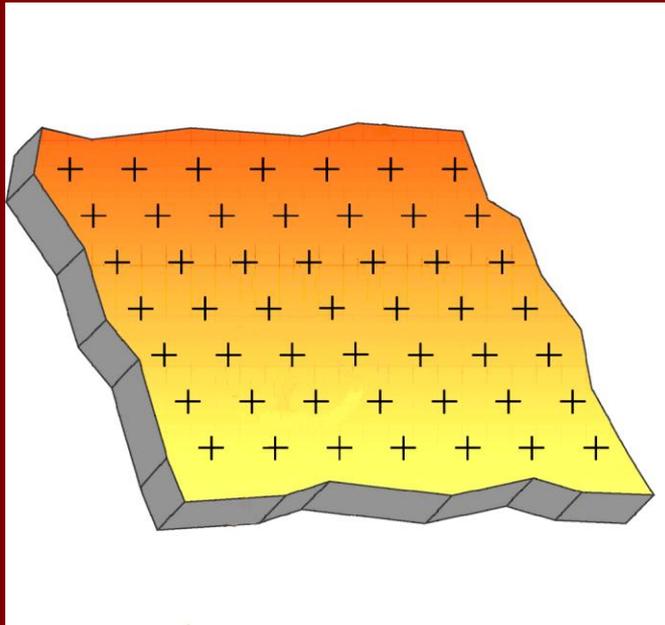
Solución del problema del plano cargado

- El flujo eléctrico a través de la superficie es

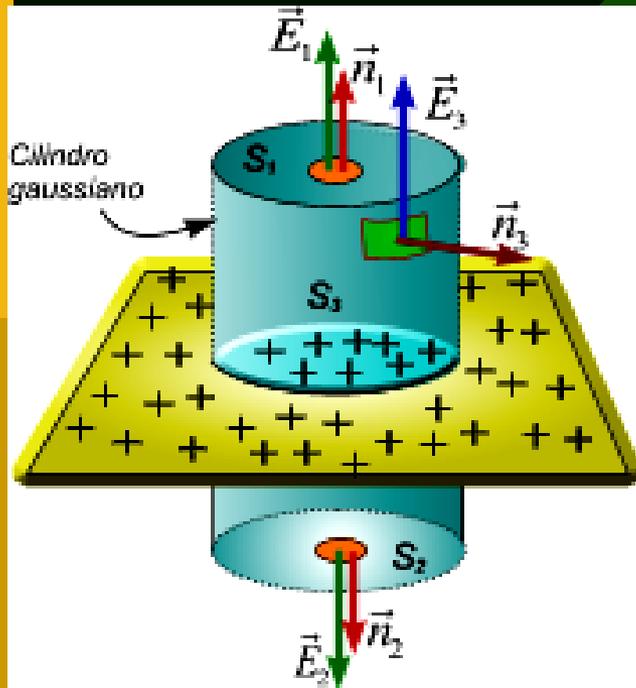
$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA$$

$$\Phi_E = \iint_{S_1} E_1 \cos 0^\circ dA + \iint_{S_2} E_2 \cos 0^\circ dA + \iint_{S_3} E_3 \cos 90^\circ dA$$

$$\Phi_E = E_1 A + E_2 A + 0 = (E_1 + E_2) A$$



Solución del problema del plano cargado

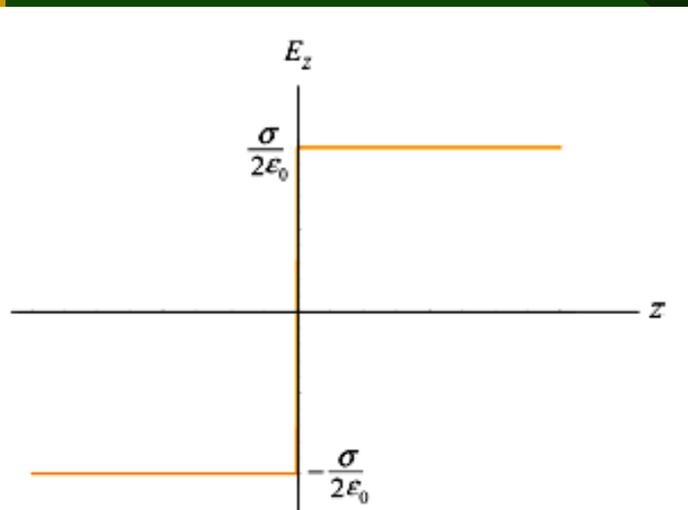


Aplicando la ley de Gauss, tenemos

$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \rightarrow 2E_z A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

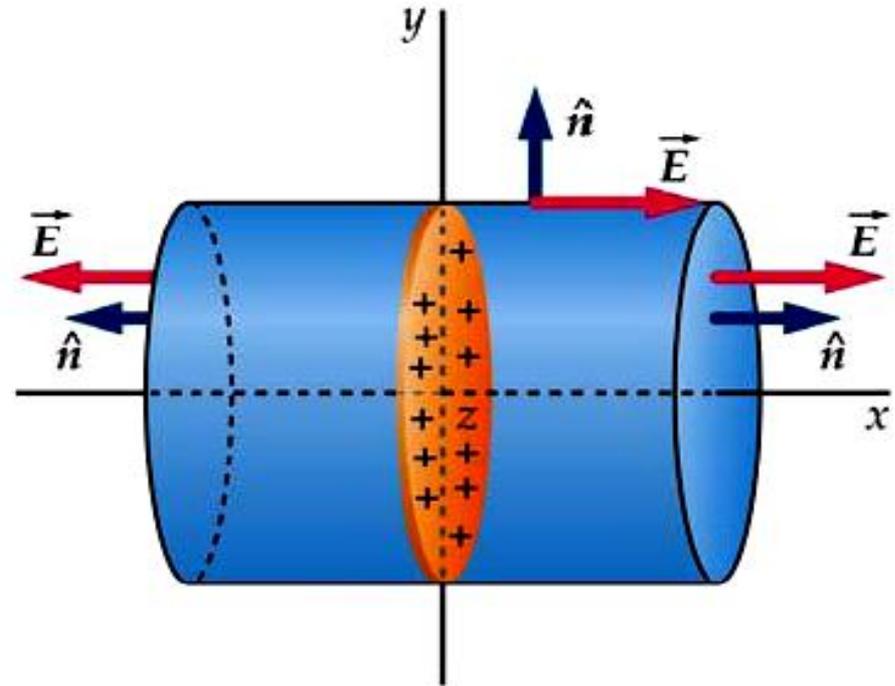
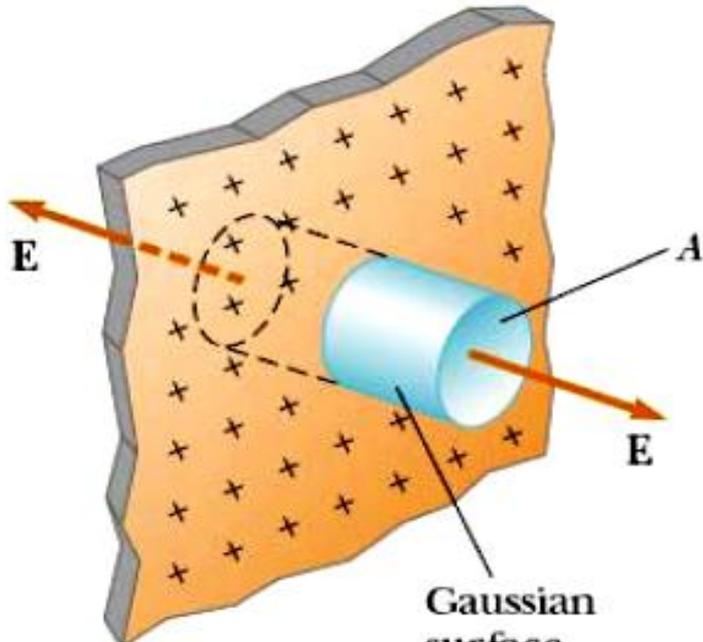
$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_z = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} & \text{para } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

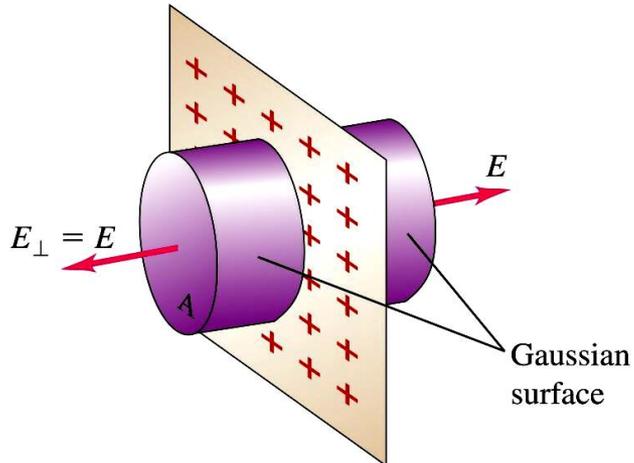


Plano infinito ubicado en otro plano

Plano infinito



$$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

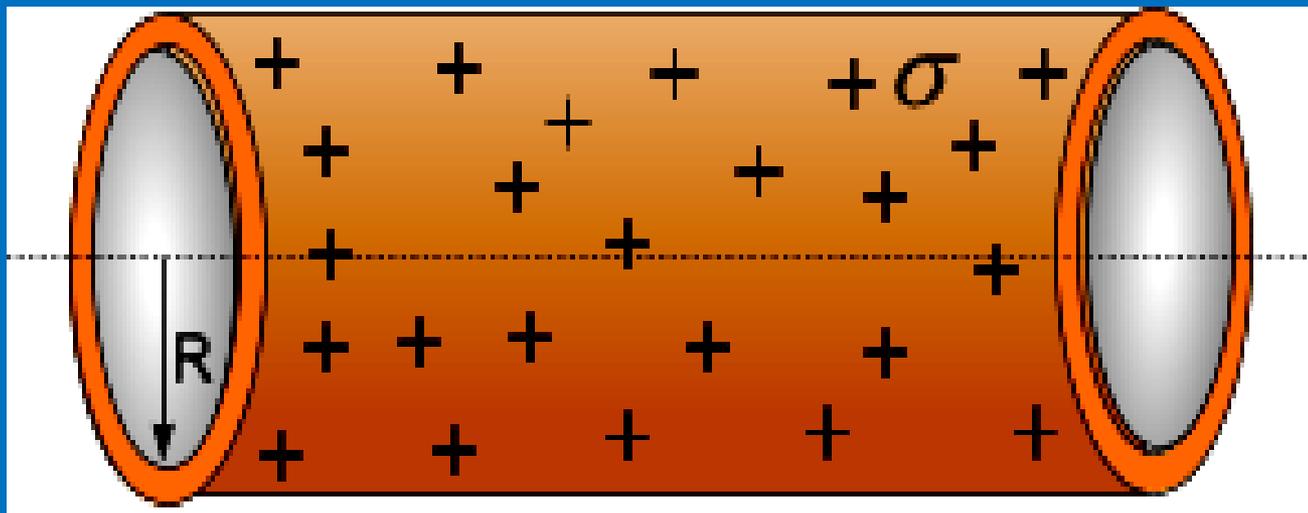


$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

V. Aplicaciones de la Ley de Gauss_3

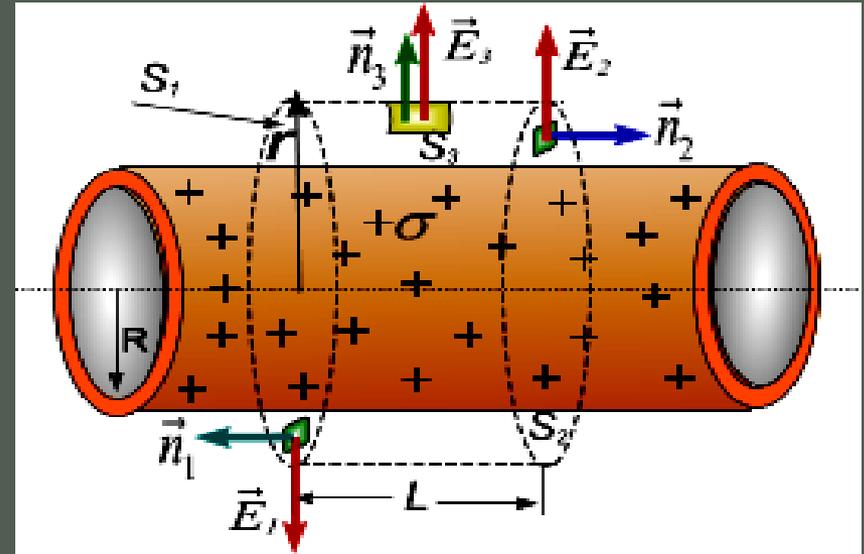
5.3 Campo eléctrico E de una corteza cilíndrica.

Una corteza cilíndrica de longitud muy grande y de radio R que posee una densidad de carga superficial σ se encuentra ubicada tal como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en puntos exteriores e interiores a la corteza.



Solución del problema de la cascara cilíndrica

- a. **Campo eléctrico en puntos exteriores.** En la figura se muestra a la distribución con su superficie gaussiana cilíndrica



Aplicando la ley de Gauss tenemos

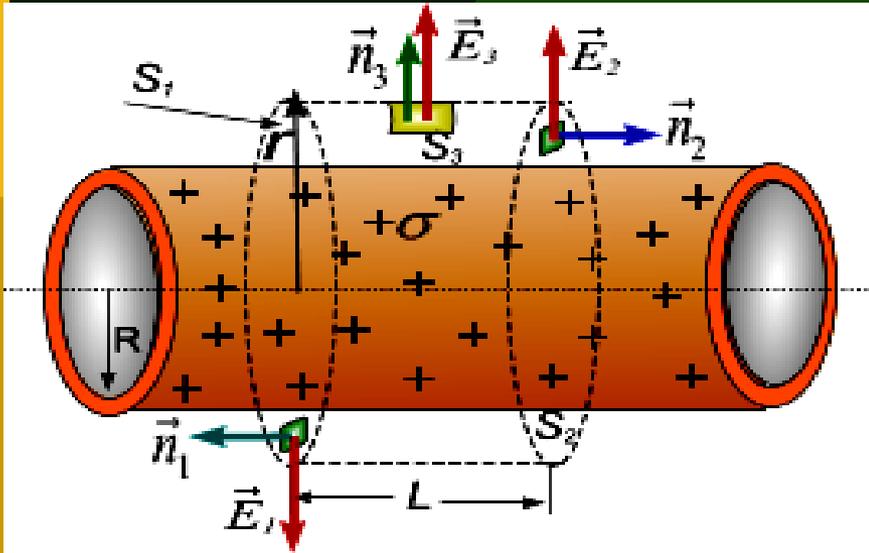
$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA$$

$$\Phi_E = \underbrace{\iint_{S_1} E_1 \cos 90^\circ dA}_0 + \underbrace{\iint_{S_2} E_2 \cos 90^\circ dA}_0 + E \iint_{S_3} dA$$

$$\Phi_E = E \left(A_{\text{sup,lat}} \right) = E (2\pi rL)$$

Solución del problema de la cascara cilíndrica

a) **E** para puntos exteriores



$$E(2\pi rL) = \frac{\sigma(2\pi RL)}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\mathbf{r}}{E} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r$$

$$\lambda = \frac{q}{L} = \frac{\sigma(2\pi RL)}{L} = \sigma(2\pi R) \rightarrow \sigma = \lambda/2\pi R$$

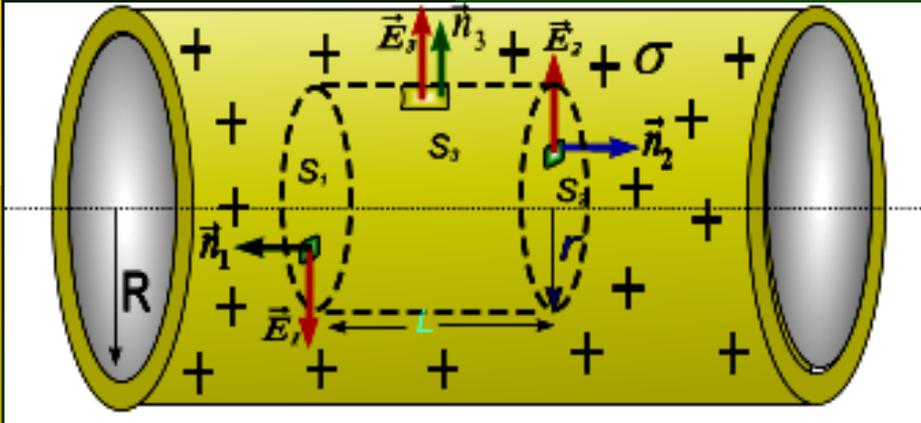
$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \rightarrow E(2\pi rL) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\mathbf{r}}{E_r} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r = \left(\frac{\lambda}{2\pi R} \right) \frac{R}{\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r$$

$$\frac{\mathbf{r}}{E_r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r \quad \text{para } r > R$$

Continuación solución problema de la cascara cilíndrica

b) Campo E para puntos interiores



$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \rightarrow E(2\pi rL) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E(2\pi rL) = \frac{0}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_r = 0\vec{e}_r$$

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA$$

$$\Phi_E = \iint_{S_1} E_1 \cos 90^\circ dA + \iint_{S_2} E_2 \cos 90^\circ dA + E \iint_{S_3} dA$$

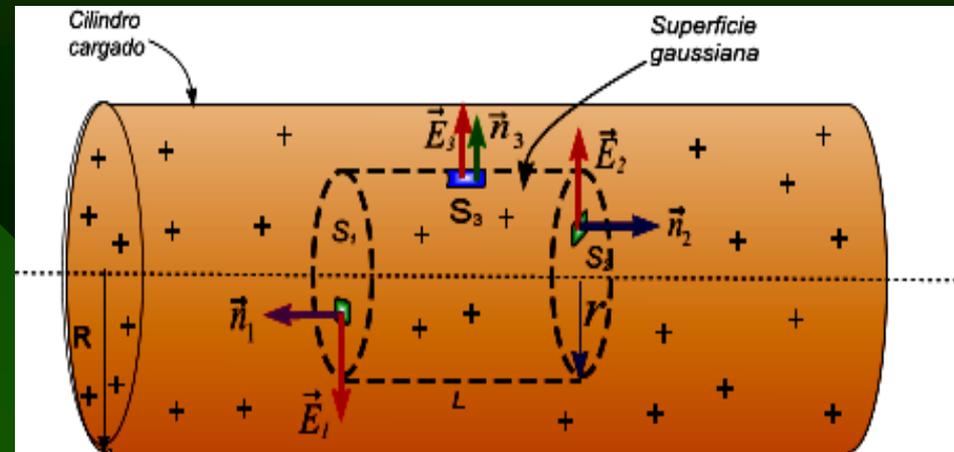
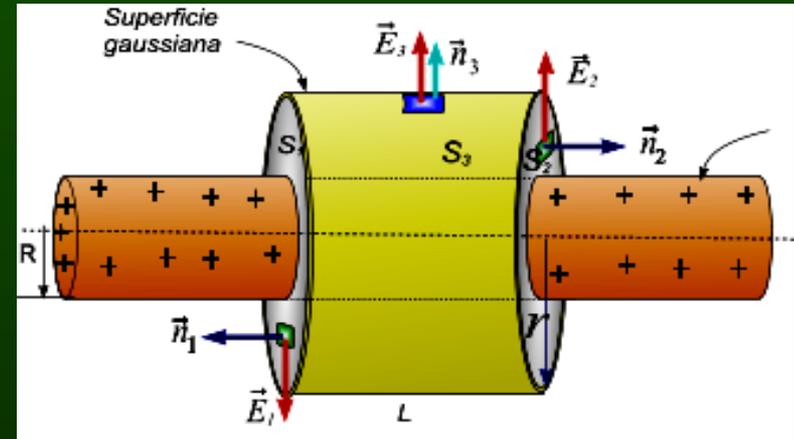
$$\Phi_E = E(A_{sup,lat}) = E(2\pi rL)$$

V. Aplicaciones de la Ley de Gauss_4

5.4 Campo eléctrico E de un cilindro sólido cargado.

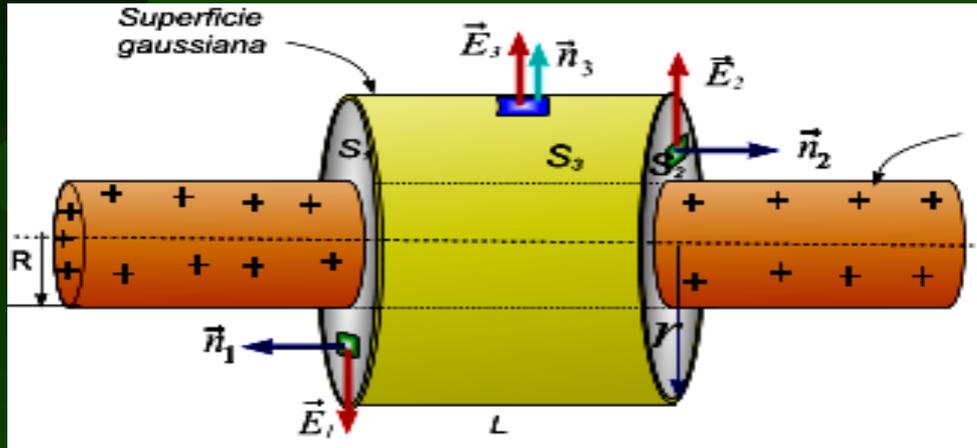
Un cilindro no conductor de radio R y longitud muy grande que posee una densidad de carga volumétrica uniforme ρ se encuentra ubicada tal como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en puntos exteriores e interiores a la distribución

a) Campo para puntos exteriores



solución

- a. **Campo en puntos exteriores.** En la figura se muestra la distribución de carga y la superficie gaussiana.



El flujo eléctrico será

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA$$

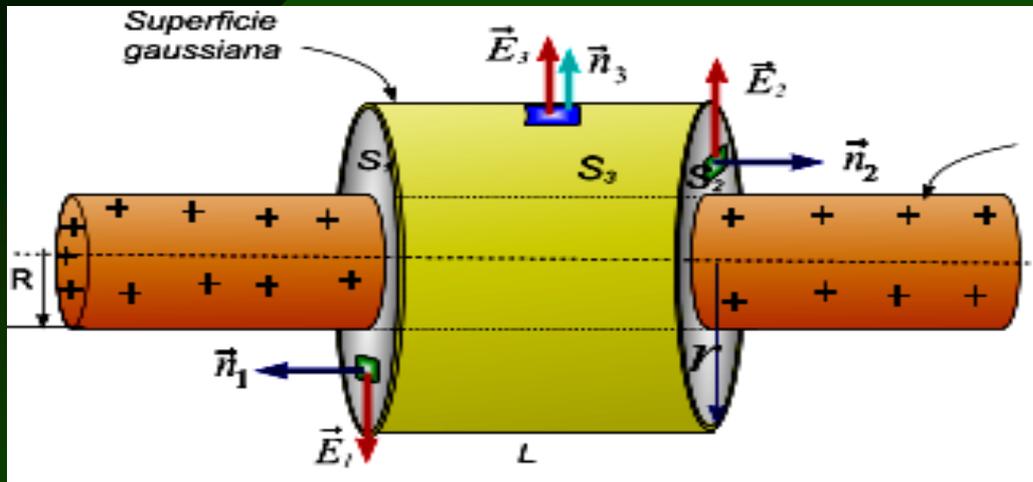
$$\Phi_E = \iint_{S_1} E_1 \cos 90^\circ dA + \iint_{S_2} E_2 \cos 90^\circ dA + E \iint_{S_3} dA$$

~~0~~ ~~0~~ 0

$$\Phi_E = E(A_{\text{sup,lat}}) = E(2\pi rL)$$

solución

Aplicando la ley de Gauss



$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi rL) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E(2\pi rL) = \frac{\rho(\pi R^2 L)}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$$

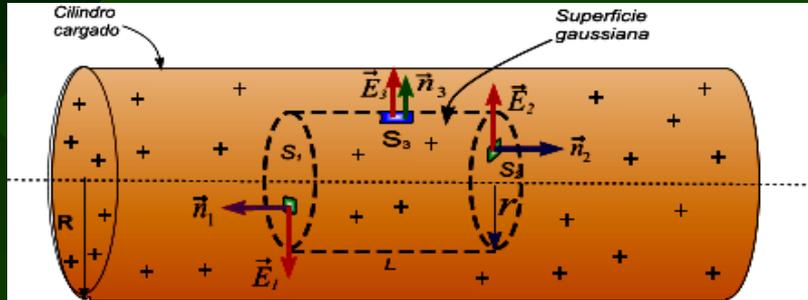
$$\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

$$\vec{E}_r = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r = \left(\frac{\lambda}{\pi R^2} \right) R^2 \vec{e}_r$$

$$\vec{E}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r \quad \text{para } r > R$$

Solucióncont

b) Campo para puntos interiores: En la figura se muestra la distribución y su superficie gaussiana



$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi rL) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$



$$E(2\pi rL) = \frac{\rho(\pi r^2 L)}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$

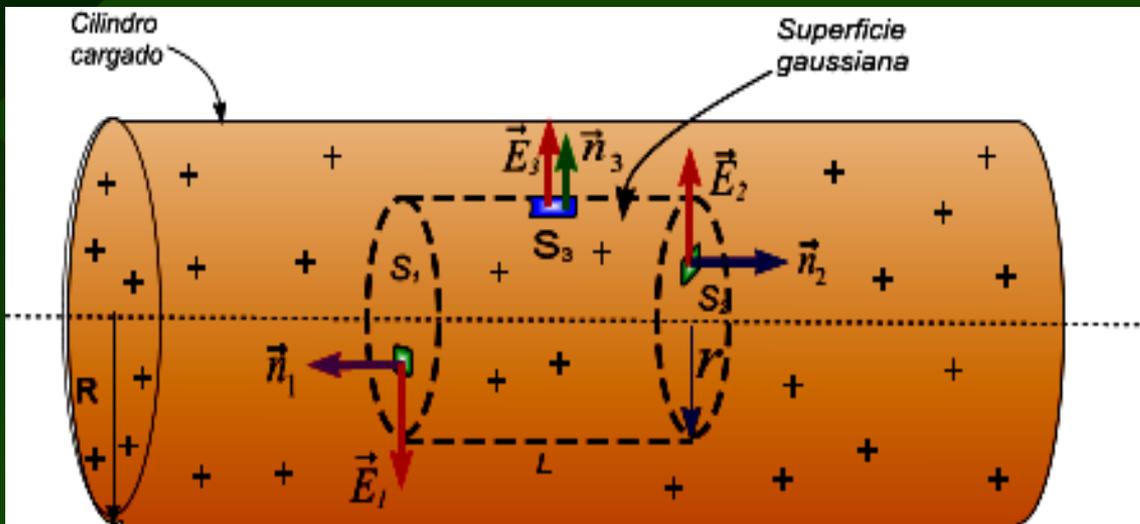
$$\vec{E}_r = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \vec{e}_r \quad \text{para } r < R$$

Expresando la densidad de carga volumétrica en función de la densidad lineal se tiene

$$\vec{E}_r = \left(\frac{\lambda}{\pi R^2} \right) r \vec{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} r \vec{e}_r \quad \text{para } r < R$$

Solucióncont

b) Campo para puntos interiores: En la figura se muestra la distribución y su superficie gaussiana



$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA$$

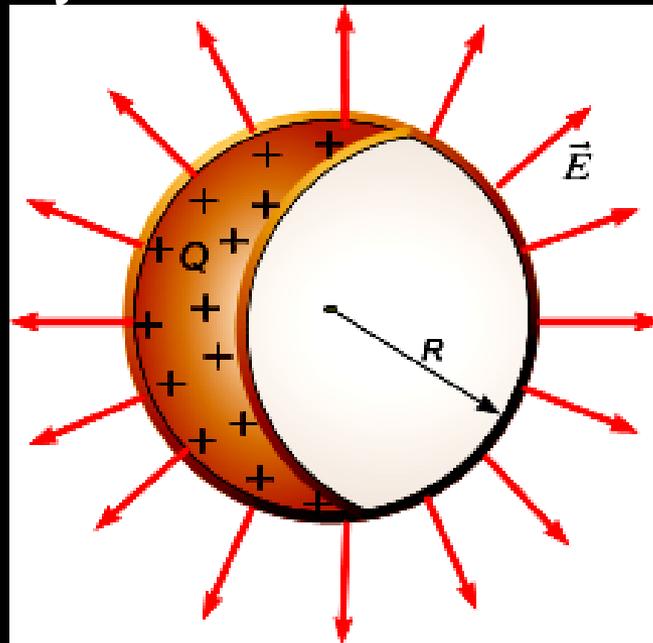
$$\Phi_E = \underbrace{\iint_0 \vec{E}_1 \cos 90^\circ dA}_{0} + \underbrace{\iint_0 \vec{E}_2 \cos 90^\circ dA}_{0} + E \iint_{S_3} dA$$

$$\Phi_E = E(A_{\text{sup,lat}}) = E(2\pi rL)$$

V. Aplicaciones de la Ley de Gauss:

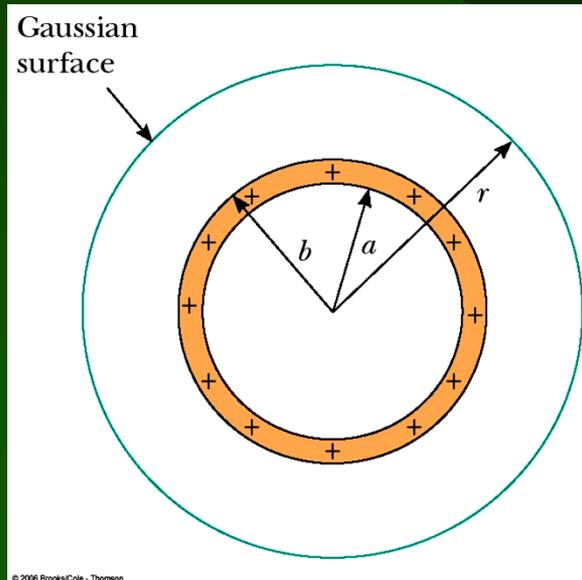
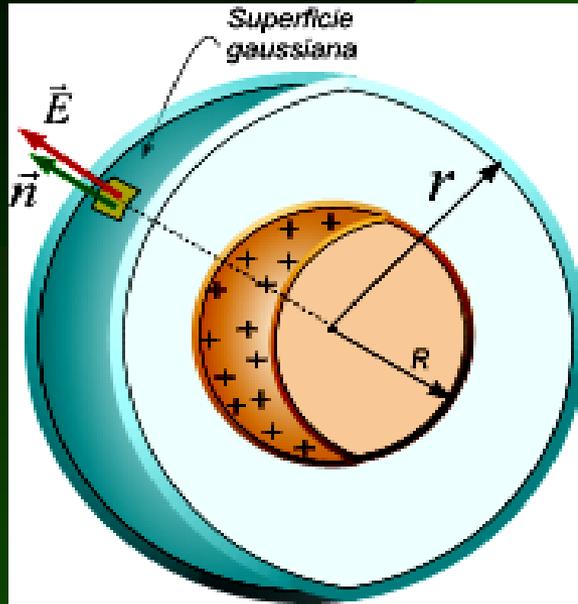
5.5 Campo eléctrico E de una corteza esférica cargada.

Una cáscara esférica delgada de radio R tiene una carga $+Q$ distribuida uniformemente sobre su superficie. Determine la intensidad de campo eléctrico E dentro y fuera de la cáscara.



Solución

a) Campo para puntos externos



Aplicando la ley de Gauss

$$\Phi_E = \oiint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

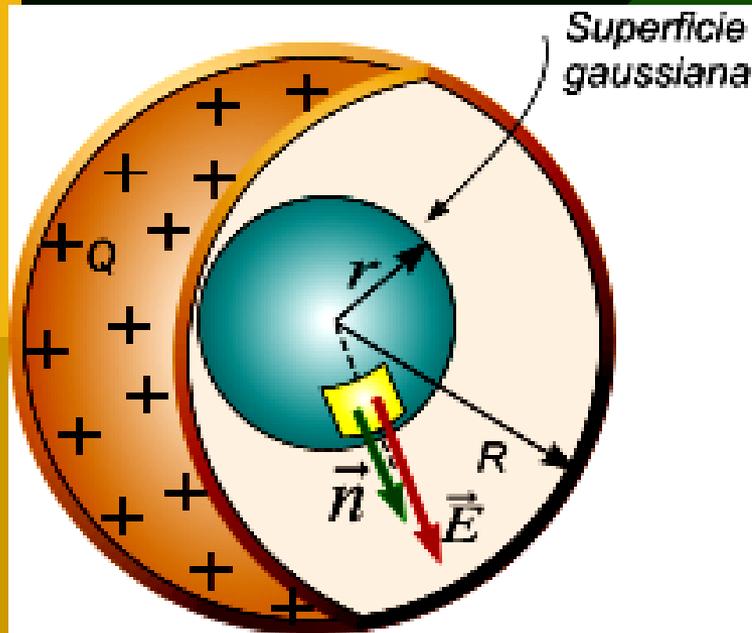
$$\oiint_{S,G} E \cos 0^\circ dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

para $r \geq R$

Campo para puntos interiores al cascarón cargado



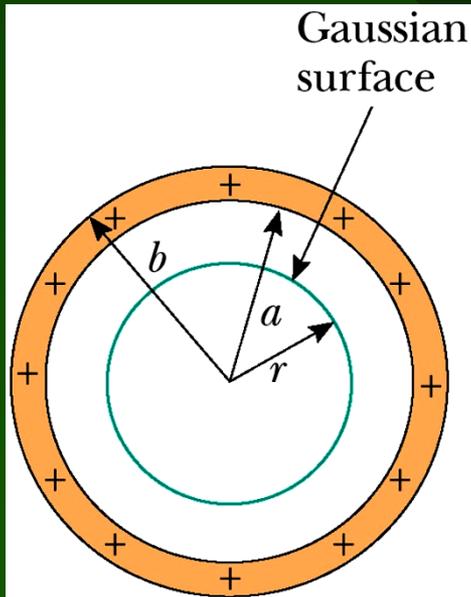
Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\Phi_E = \oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S,G} E \cos 0^\circ dA = \frac{0}{\epsilon_0}$$

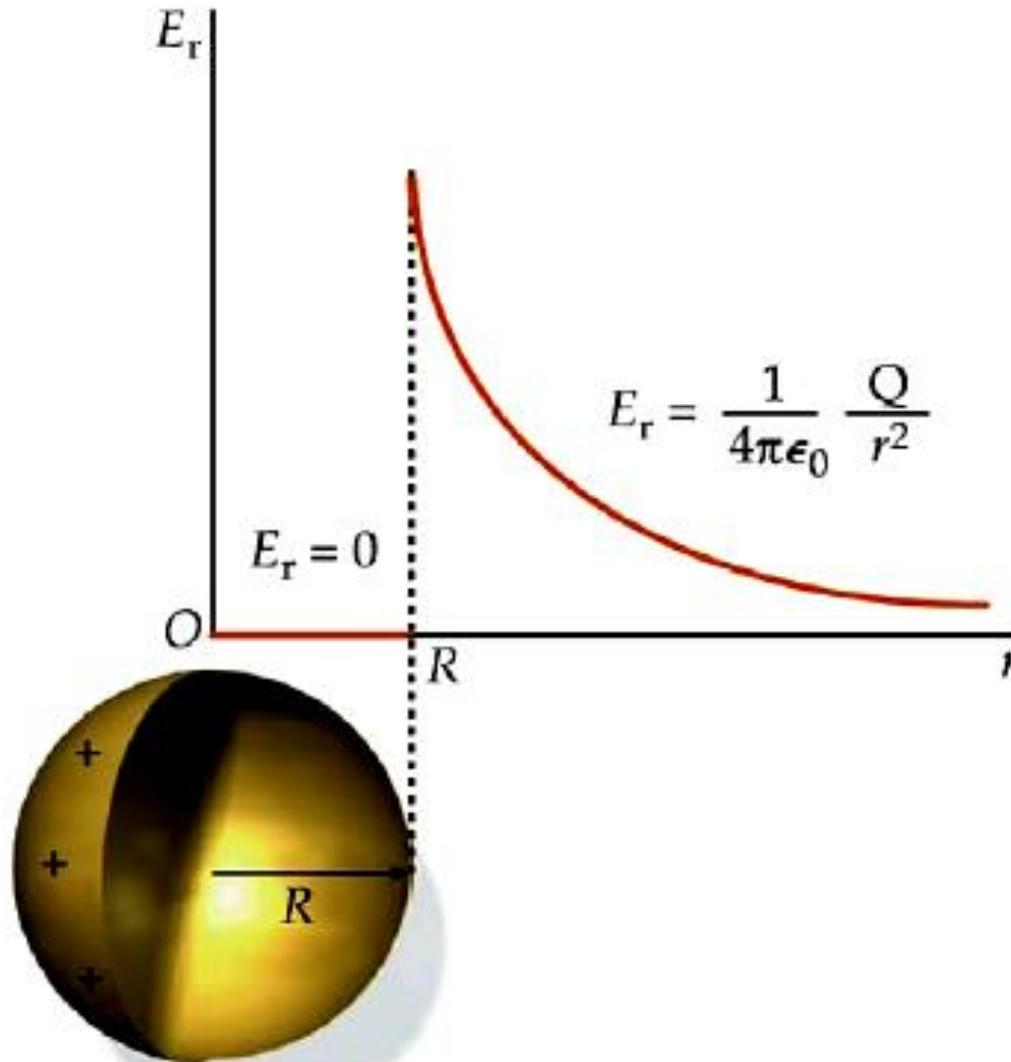
$$E(4\pi r^2) = 0$$

$$E_r = 0 \quad \text{para } r \leq R$$



Campo para puntos interiores al cascarón cargado

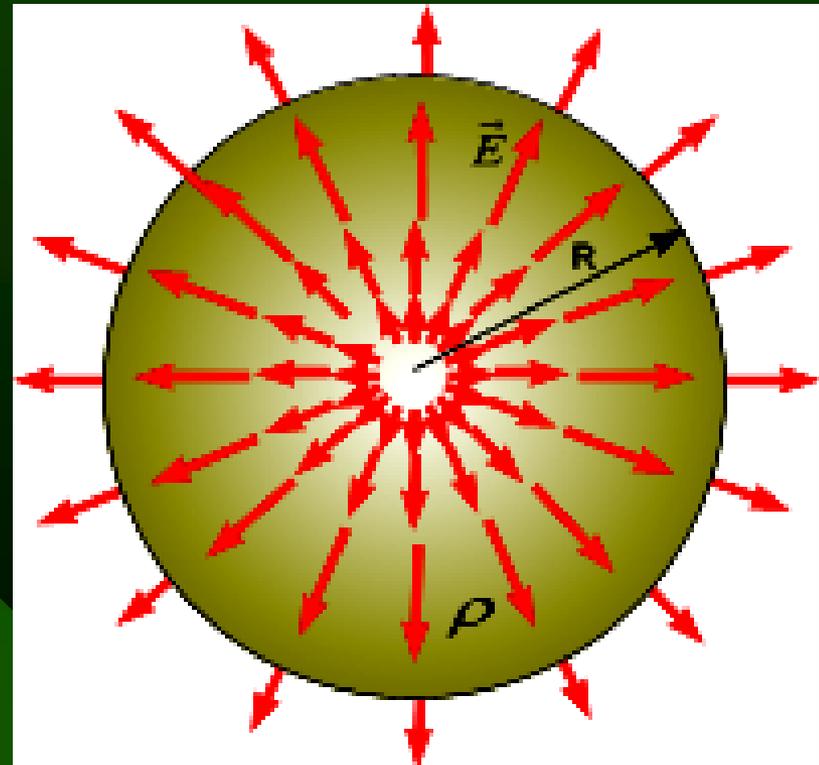
- La gráfica E en función de r es



V. Aplicaciones de la Ley de Gauss_5

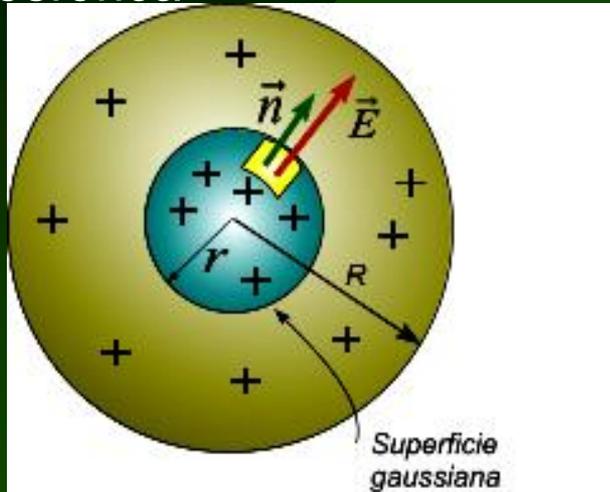
5.5 Campo eléctrico E de una esfera sólida aislante cargada.

Una carga eléctrica $+Q$ es uniformemente distribuida en una esfera sólida no conductora de radio R . Determine la intensidad de campo eléctrico dentro y fuera de la cáscara.



solución

- La simetría exige el uso de una superficie gaussiana esférica



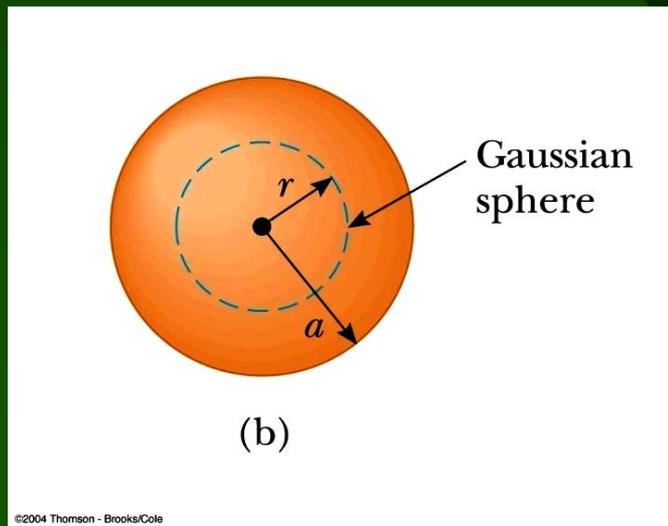
- El flujo eléctrico a través de S

$$\Phi_E = \oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \oint_{S,G} E \cos 0^\circ dA = E \oint_{S,G} dA = E(4\pi r^2)$$

- La carga neta encerrada por la superficie gaussiana es

$$Q_{enc} = \int \rho dV = \rho V = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

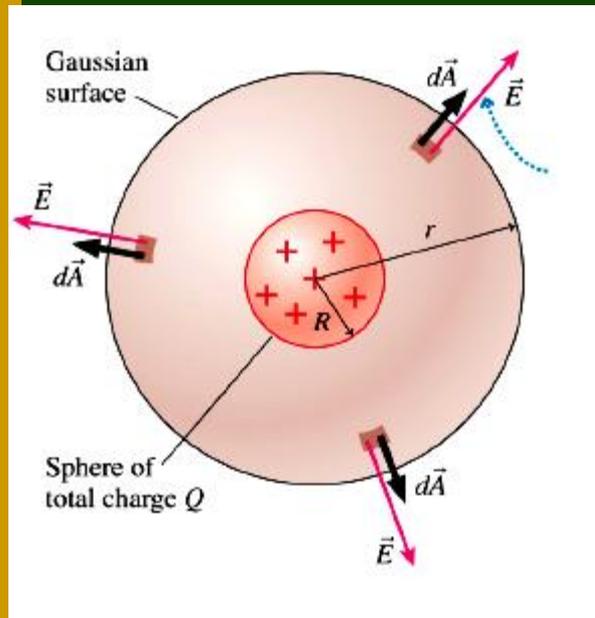
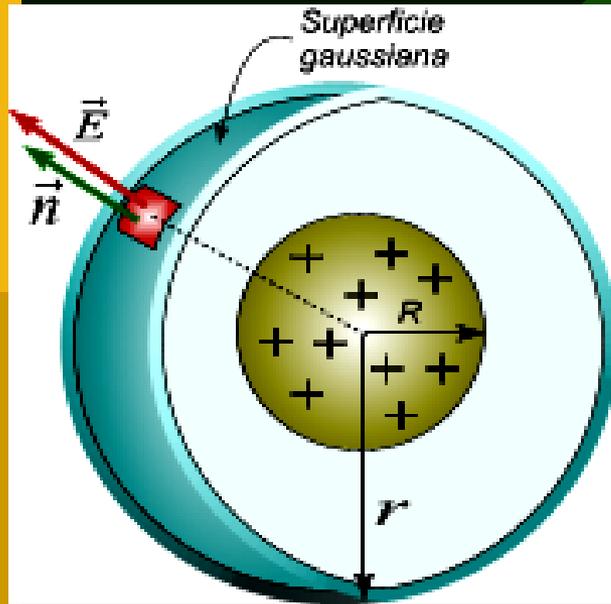
$$Q_{enc} = \frac{Qr^3}{R^3}$$



$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 R^3}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \vec{e}_r \quad \text{para } r \leq R$$

Campo eléctrico para puntos exteriores



Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\Phi_E = \oiint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

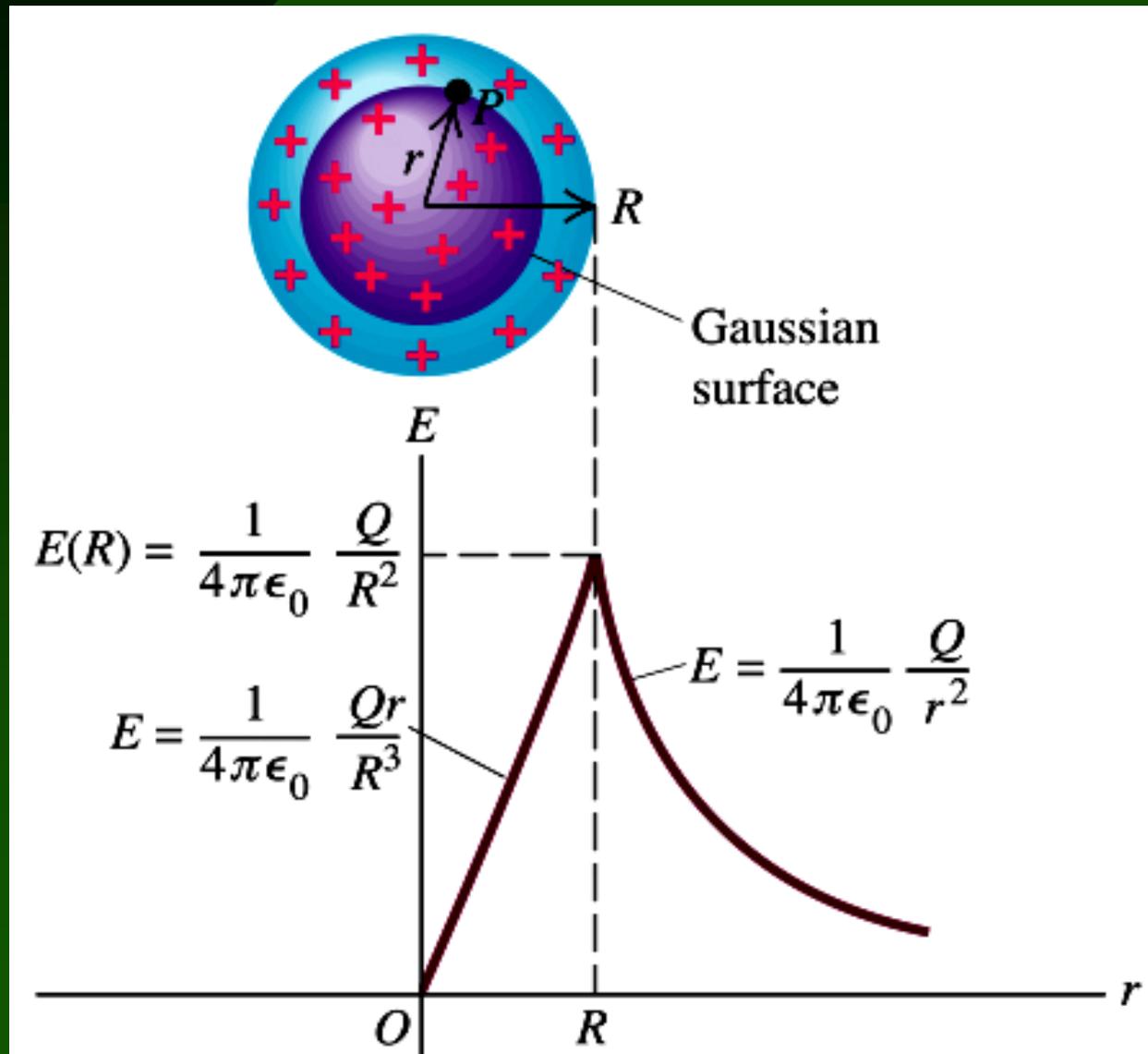
$$\oiint_{S,G} E \cos 0^\circ dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

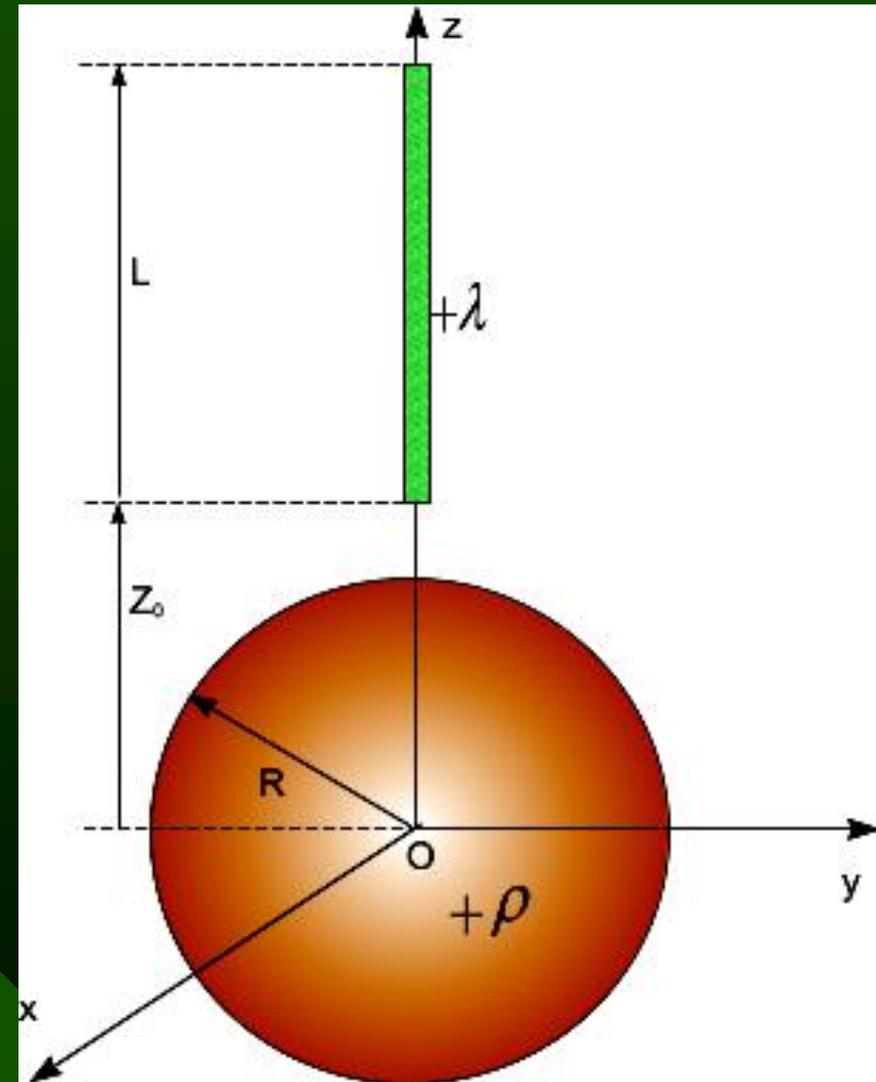
para $r \geq R$

Grafica Campo E – distancia r



Ejemplo

Se tiene una línea cargada de longitud L y densidad de carga uniforme λ , ubicada a lo largo del eje z con sus extremos en $z = z_0$ y en $z = z_0 + L$. Determine la fuerza sobre esta línea debida a una esfera de radio R ($R < z_0$) que lleva una distribución uniforme de carga ρ

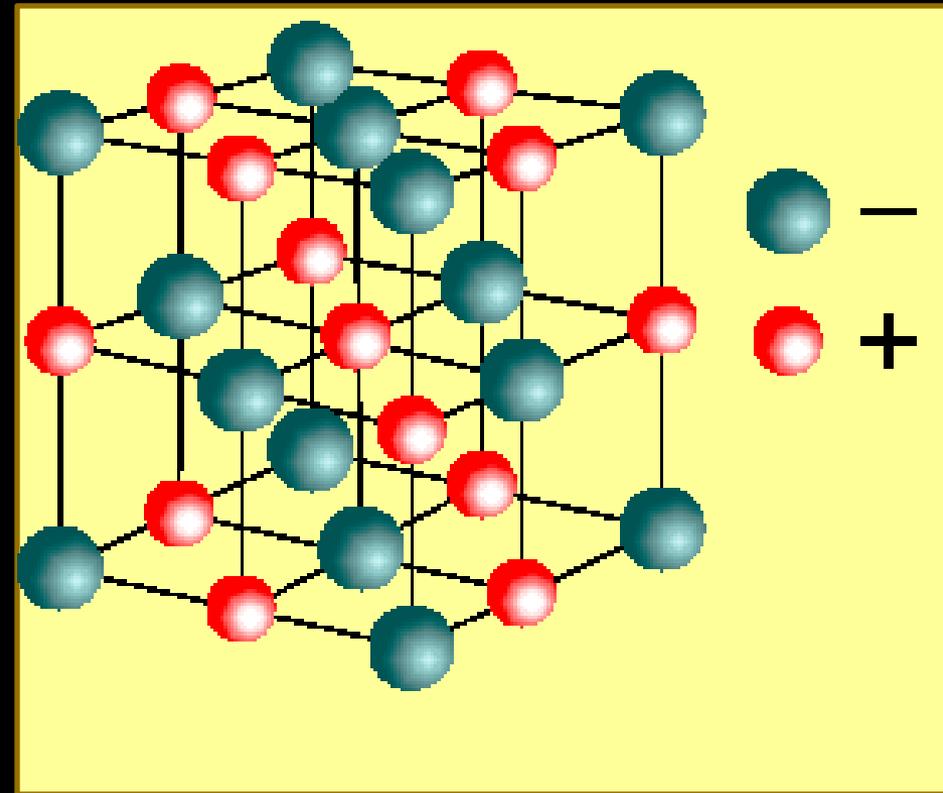
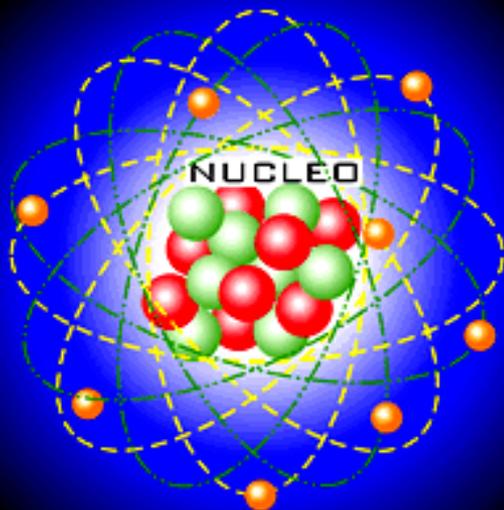


System	Infinite line of charge	Infinite plane of charge	Uniformly charged solid sphere
Figure			
Identify the symmetry	Cylindrical	Planar	Spherical
Determine the direction of \vec{E}			
Divide the space into different regions	$r > 0$	$z > 0$ and $z < 0$	$r \leq a$ and $r \geq a$
Choose Gaussian surface	 Coaxial cylinder	 Gaussian pillbox	 Concentric sphere
Calculate electric flux	$\Phi_E = E(2\pi r l)$	$\Phi_E = EA + EA = 2EA$	$\Phi_E = E(4\pi r^2)$
Calculate enclosed charge q_{in}	$q_{enc} = \lambda l$	$q_{enc} = \sigma A$	$q_{enc} = \begin{cases} Q(r/a)^3 & r \leq a \\ Q & r \geq a \end{cases}$
Apply Gauss's law $\Phi_E = q_{in} / \epsilon_0$ to find E	$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	$E = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}, & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq a \end{cases}$

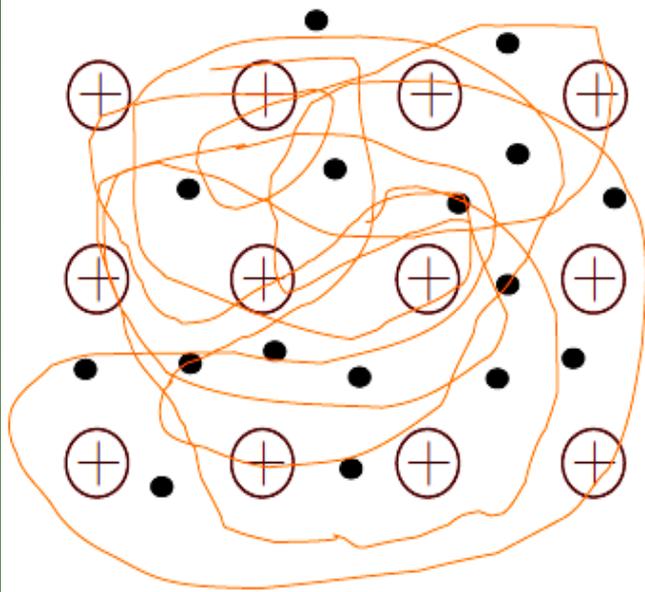
VIII. CONDUCTORES_01

- Todo conductor se encuentra formando un arreglo atómico como se muestra en la figura

ÁTOMO DE OXÍGENO



VIII. CONDUCTORES_01



Los conductores tienen una estructura atómica de red cristalina ordenada, formada por iones + (en posiciones fijas) y una nube electrónica formada por los e^- de valencia, que pueden desplazarse libremente por el material conductor (Nube o gas electrónico).

CONDUCTORES_01

Esta libertad de movimiento de la carga e^- es la causa de las peculiares propiedades de los conductores: baja resistencia, peculiar geometría del campo en sus proximidades, efecto skin, apantallamiento... Veamos algunas.



En el interior de un conductor en equilibrio, el campo e^- siempre es nulo

¿Por qué?

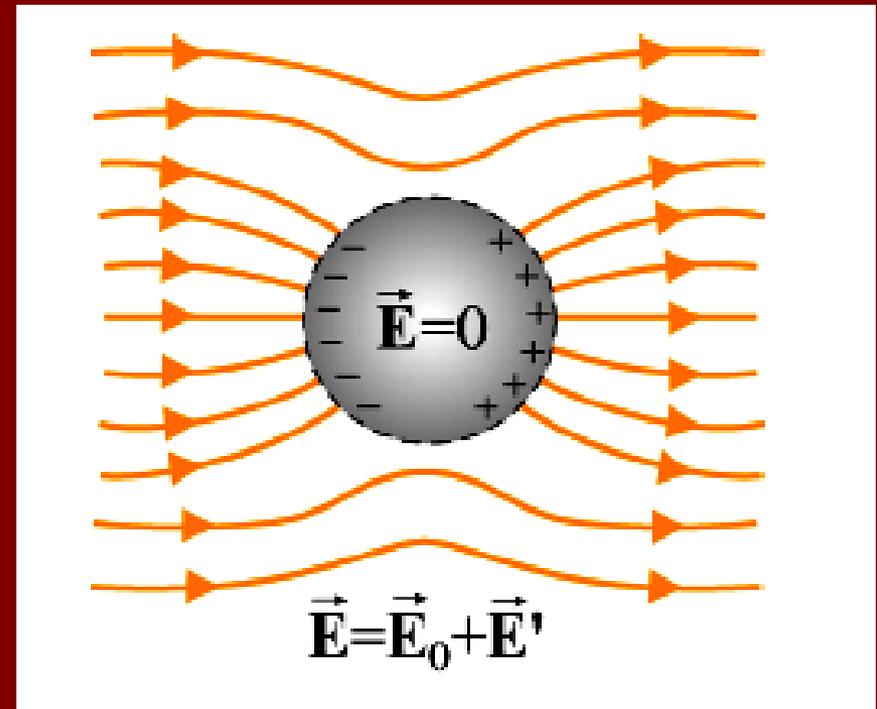
VIII. CONDUCTORES_1

•1. Campo eléctrico en el interior de conductores

- Si colocamos un conductor esférico en un campo externo E_0 , las cargas positivas y negativas se mueven hacia las regiones polares
- Estas cargas inducen un campo eléctrico E' en dirección opuesta al campo original.
- Debido a que el conductor tiene cargas móviles, éstas se moverán hasta que E' cancele a E_0 .
- En el equilibrio electrostático el campo E puede desaparecer

- En exterior al conductor el campo eléctrico debido a las cargas inducidas corresponden a un dipolo eléctrico y el campo eléctrico total es simplemente

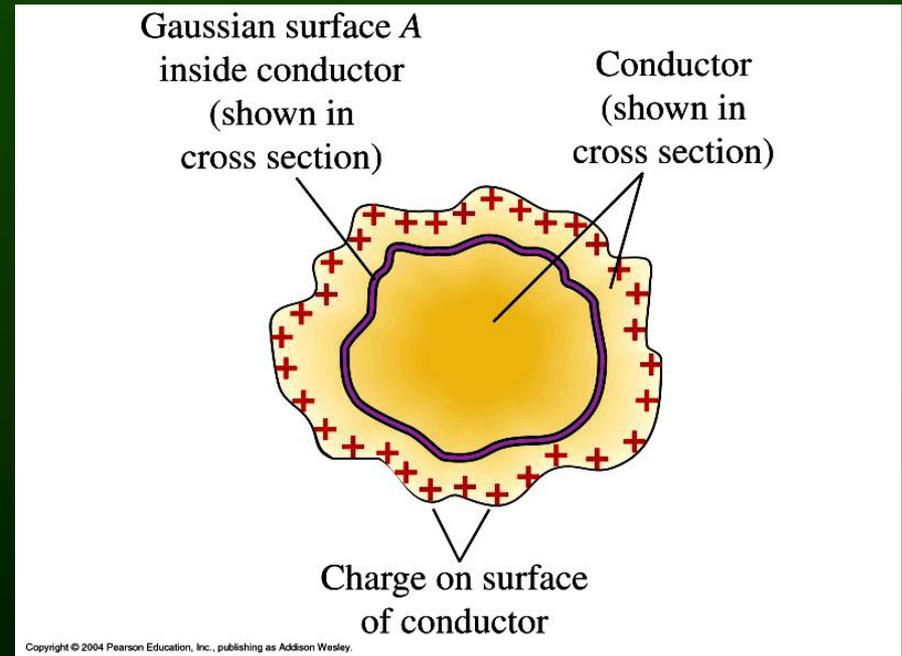
$$E = E_0 + E'$$



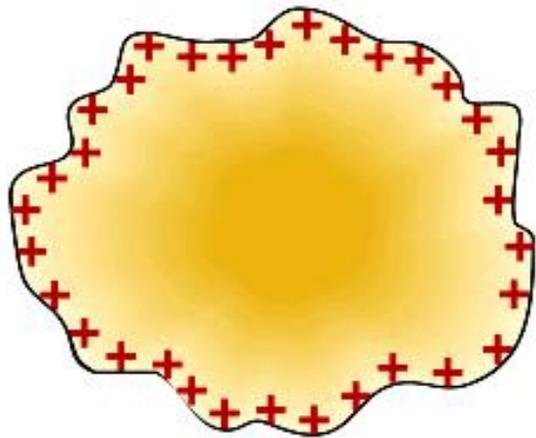
VIII: Conductores_2

•2. *Cualquier carga neta puede residir en la superficie del conductor.*

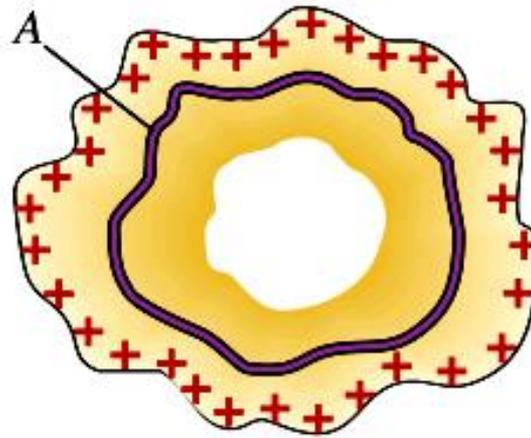
Si hubiese una carga neta dentro del conductor sólido, entonces por la ley de Gauss, E no será cero allí. Por lo tanto, todo el exceso de carga debe fluir hacia la superficie del conductor como se muestra en la figura.



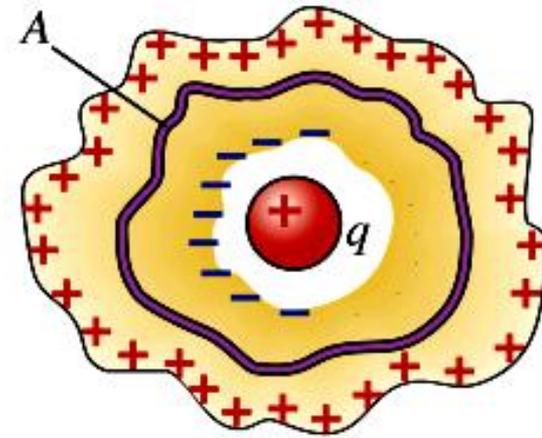
•2. *Cualquier carga neta puede residir en la superficie del conductor.*



(a)



(b)



(c)

VIII: Conductores_3

•3. *La componente tangencial del Campo en la superficie es cero.*

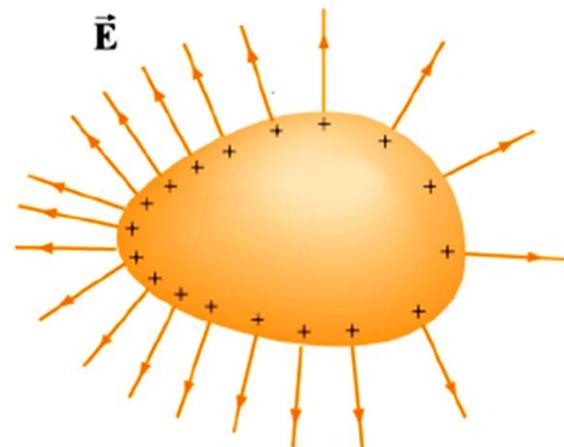
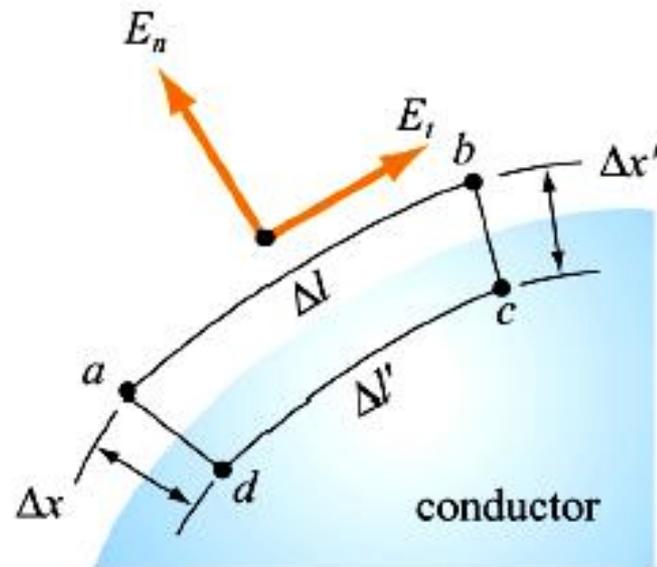
➤ Consideremos la integral de línea $\int_{abcd} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ alrededor de una trayectoria cerrada mostrada en la figura.

➤ Debido a que el campo eléctrico, es conservativo, la integral de línea alrededor de la trayectoria cerrada *abcd* desaparece, es decir

$$\int_{abcd} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_t(\Delta l) - E_n(\Delta x') + 0(\Delta l) + E_n(\Delta x) = 0$$

➤ Se concluye que

$$E_t = 0 \quad \text{sobre la superficie del conductor}$$



Campo eléctrico en la cercanía de un conductor

- Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

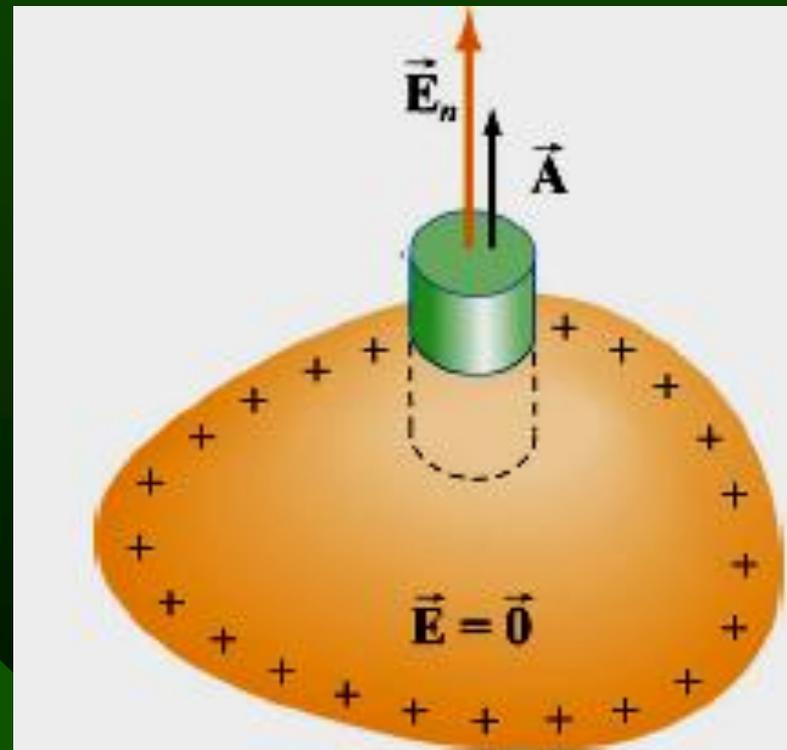
$$\iint_{tapa,1} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{base,2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S.lat} \vec{E}_3 \cdot \vec{n}_3 dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\iint_{tapa,1} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + 0 + 0 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

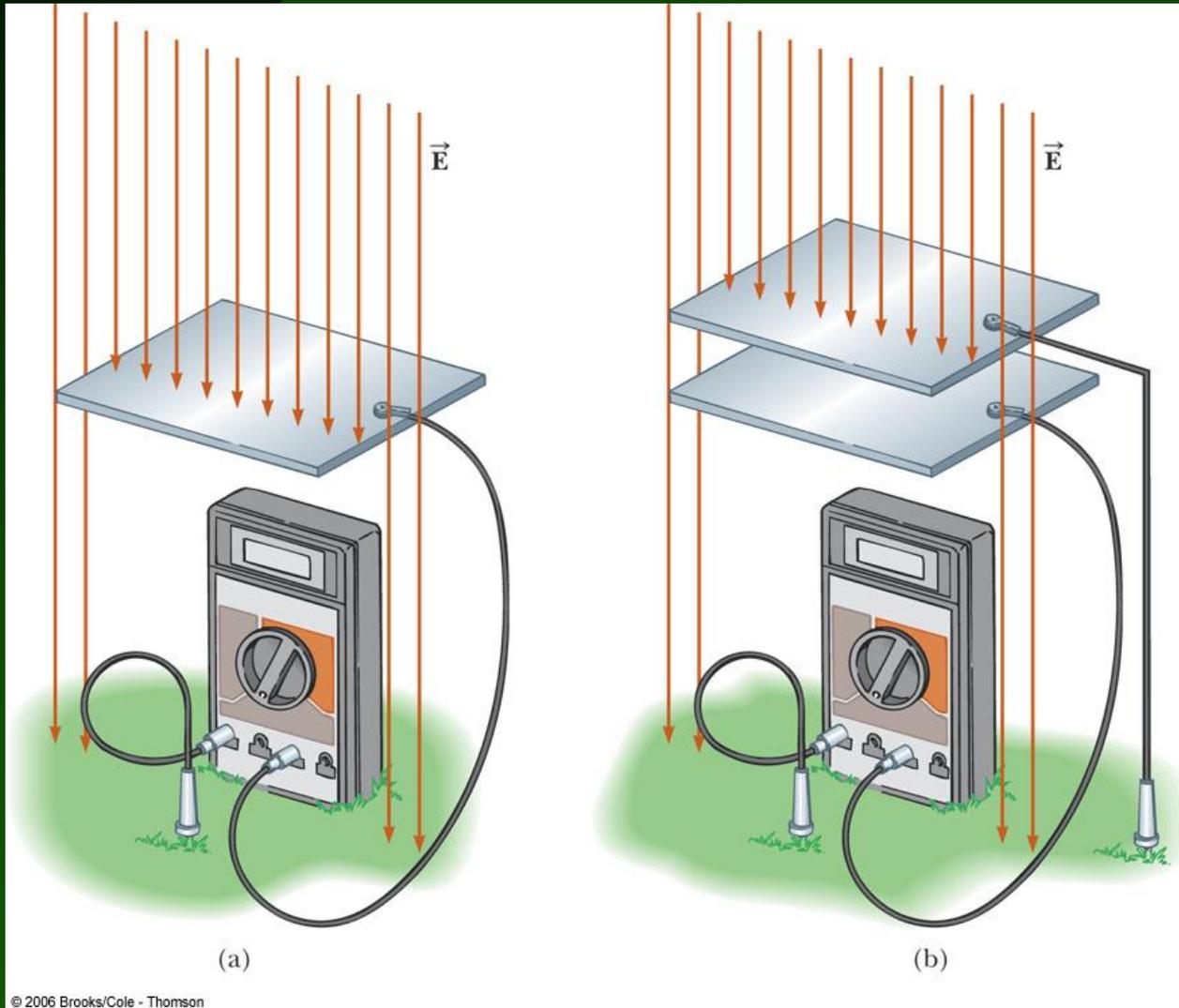
$$\iint_{tapa,1} E \cos 0^\circ dA + 0 + 0 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \vec{e}_n$$

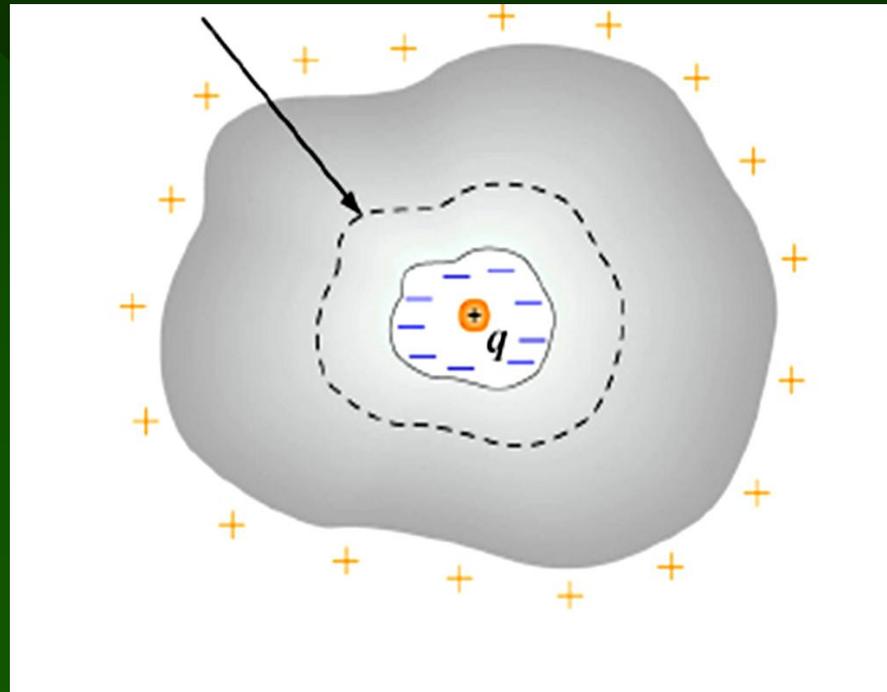


Ejemplo



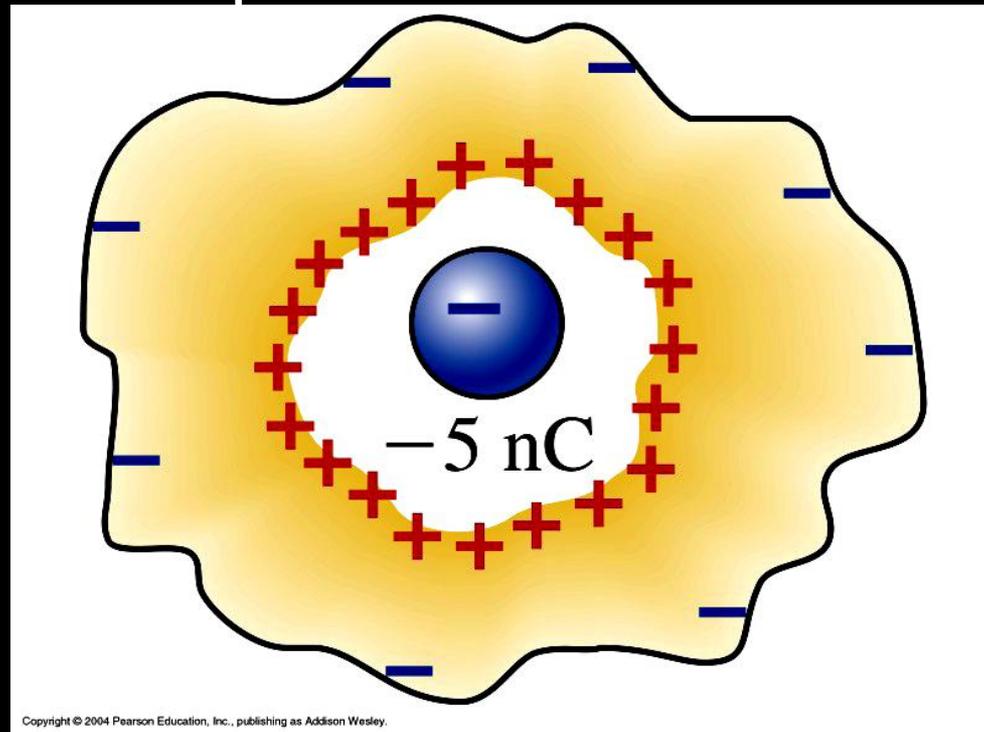
Ejemplo. Conductor con una carga puntual en el interior de una cavidad.

Considere al conductor hueco mostrado en la figura, el cual lleva una carga neta $+Q$. adicionalmente, existe una carga puntual $+q$ dentro de la cavidad. ¿Cuál es la carga en la superficie interna y externa al conductor?.



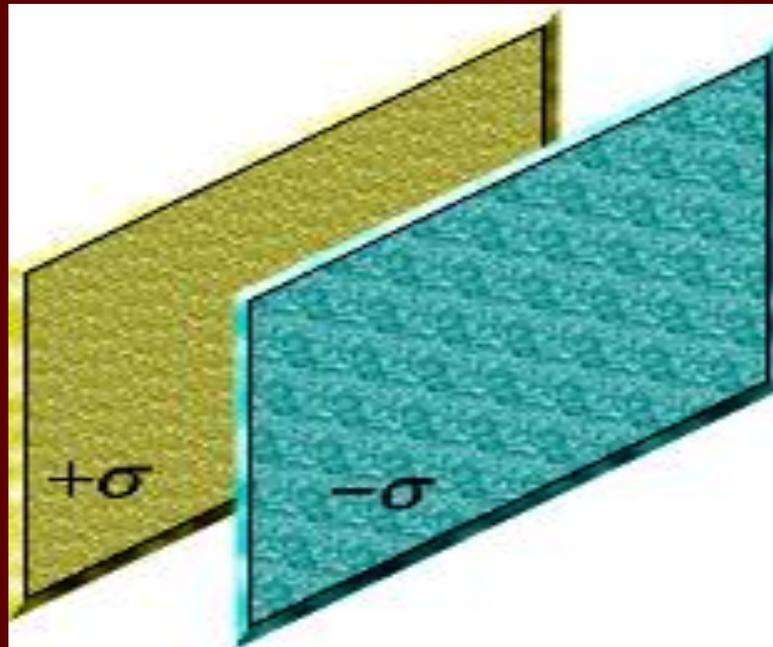
Ejemplo. Conductor con una carga puntual en el interior de una cavidad.

El conductor mostrado en sección transversal lleva una carga total de $+3 \text{ nC}$. La carga puntual aislada del conductor que se encuentra en el centro tiene una carga de -5 nC . Determine la cantidad de carga en las superficies externa e interna al conductor

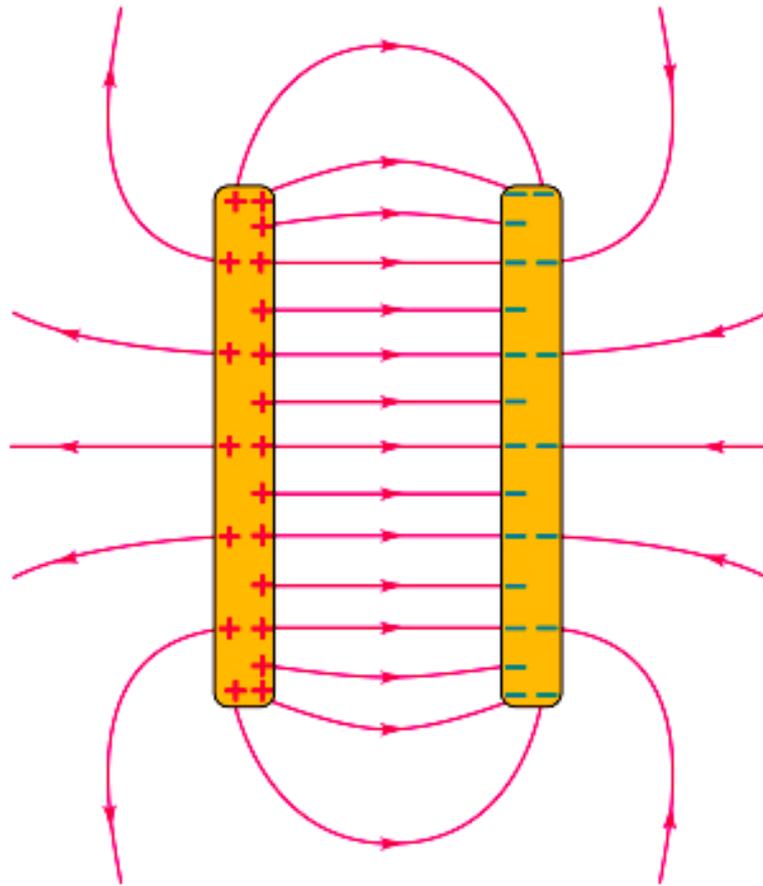


EJEMPLO.

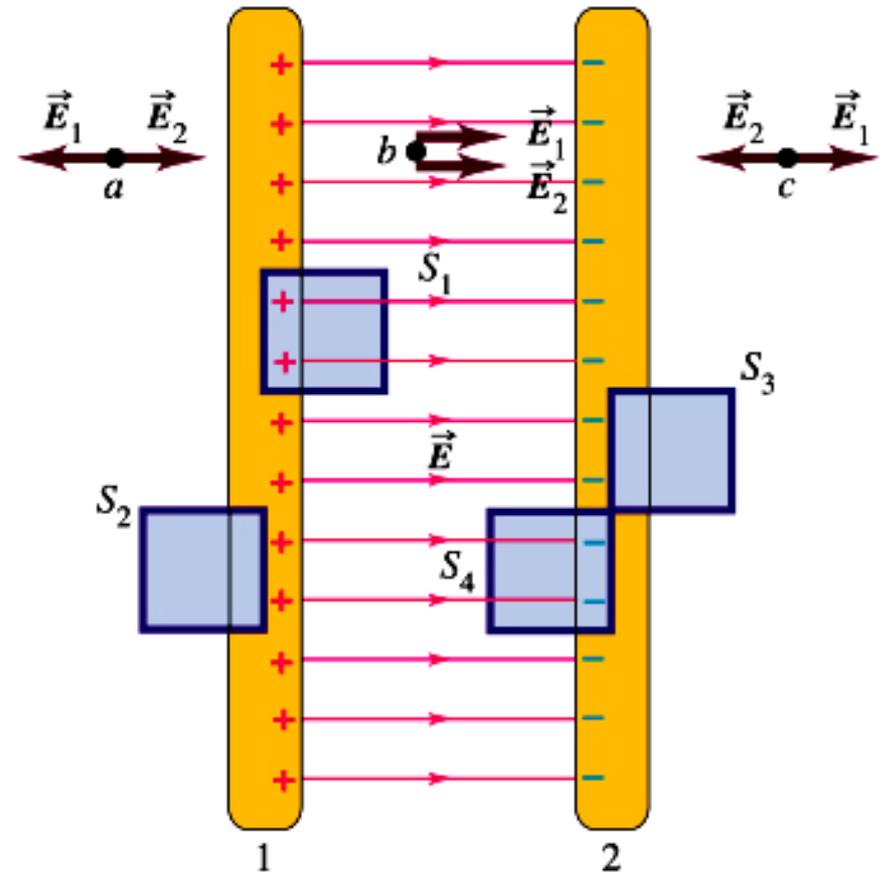
Dos láminas infinitas de carga, conductoras, se encuentran paralelas entre sí. Como se observa en la figura. La lámina de la izquierda tiene una densidad de carga superficial uniforme $+\sigma$ y la derecha tiene una densidad de carga superficial $-\sigma$. Determine el campo eléctrico entre las placas



Placas planas conductoras



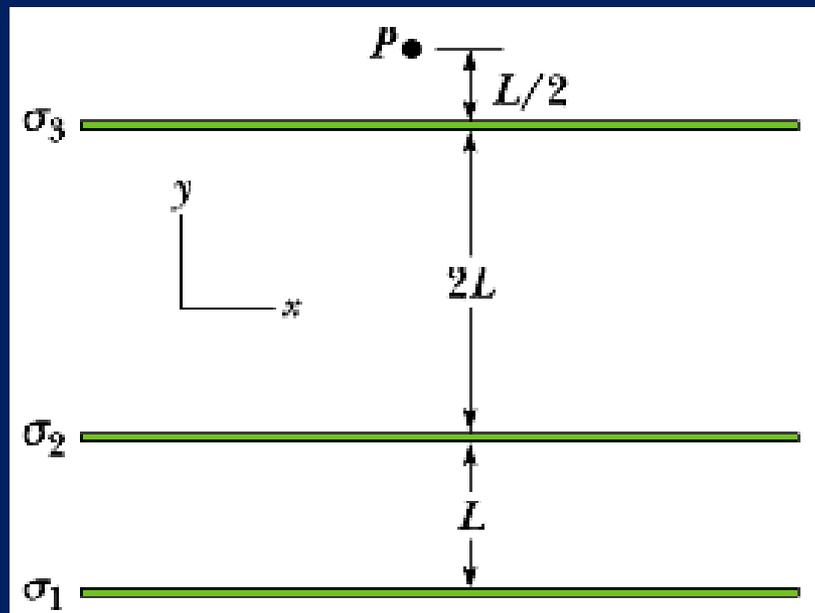
(a)



(b)

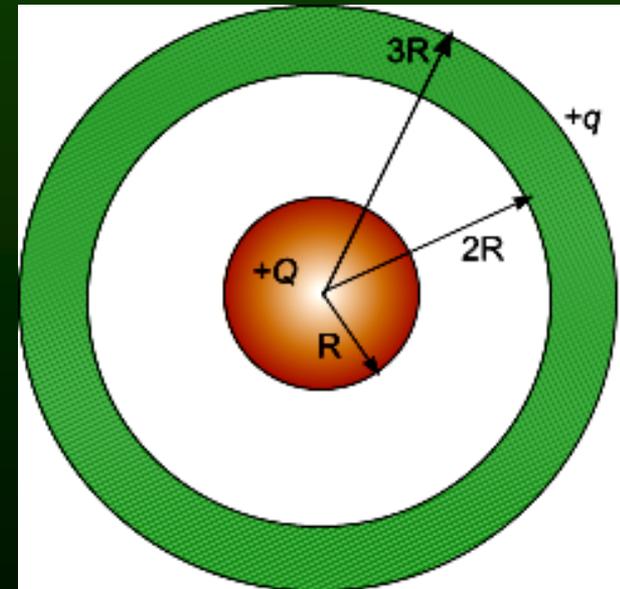
EJEMPLO.

La figura muestra la sección transversal de tres láminas no conductoras infinitamente grandes sobre las cuales ha sido distribuido uniformemente carga. Las densidades de cargas son $\sigma_1 = +2\mu\text{C}/\text{m}^2$; $\sigma_2 = +4\mu\text{C}/\text{m}^2$ y $\sigma_3 = -5\mu\text{C}/\text{m}^2$ y la distancia $L = 1,5\text{ cm}$. Determine la expresión vectorial del campo eléctrico en el punto P.



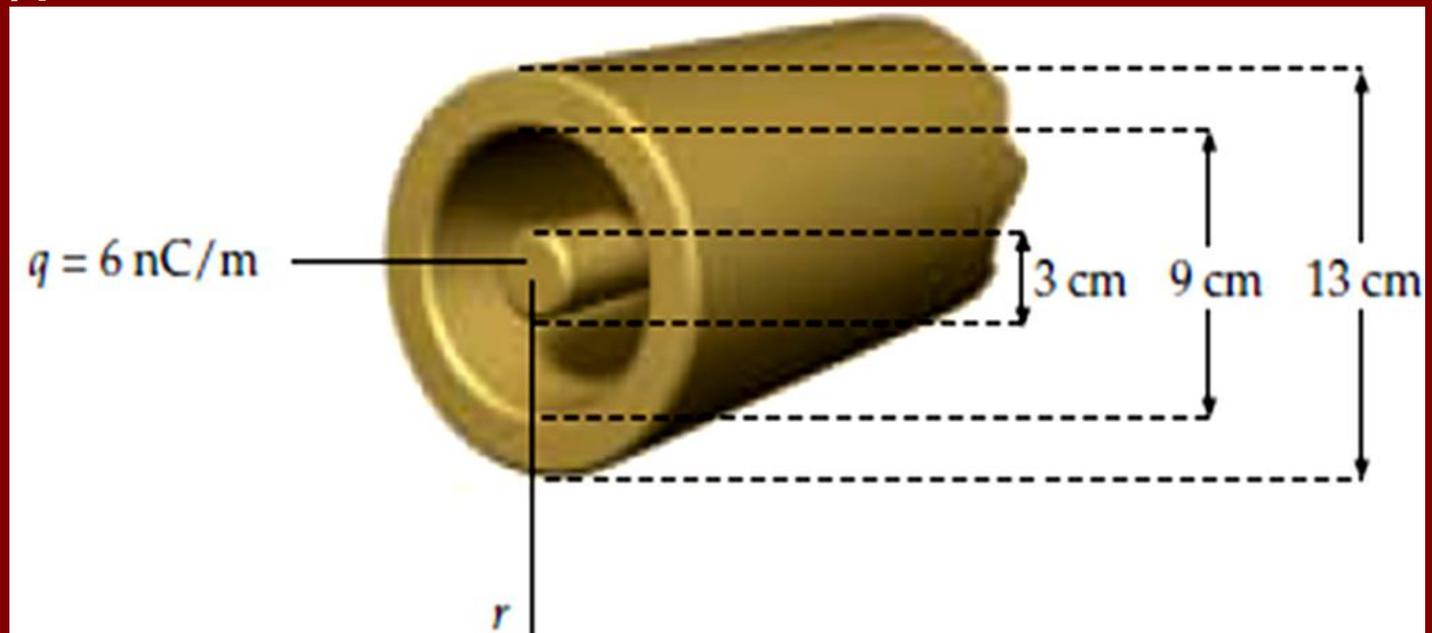
Ejemplo

Una esfera de radio R es rodeado por un cascarón conductor esférico de radio interno $2R$ y radio externo $3R$, como se muestra en la figura. La esfera interna es de un material aislante y tiene una carga neta $+Q$ distribuida uniformemente a través de su volumen. El cascarón esférico tiene una carga neta $+q$. Use la ley de Gauss y determine el campo eléctrico en las siguientes regiones. (a) $0 < r < R$; (b) $R < r < 2R$; (c) $2R < r < 3R$; (d) $r > 3R$; (e) determine la densidad de carga superficial sobre las superficies interna y externa del cascarón



Ejemplo

La figura muestra una porción de un cable concéntrico largo en sección transversal. El conductor interno posee una carga 6 nC/m ; el conductor exterior está descargado. (a) Determine el campo eléctrico para todos los valores de r , donde r es la distancia desde el eje del sistema cilíndrico. (b) ¿Cuáles son las densidades superficiales de carga sobre las superficies interior y exterior del conductor externo?



Ejemplo

A long conducting cylinder (length L) carrying a total charge $+q$ is surrounded by a conducting cylindrical shell of total charge $-2q$ as shown at the right

- a. Find the electrical field at points outside the conducting shell.

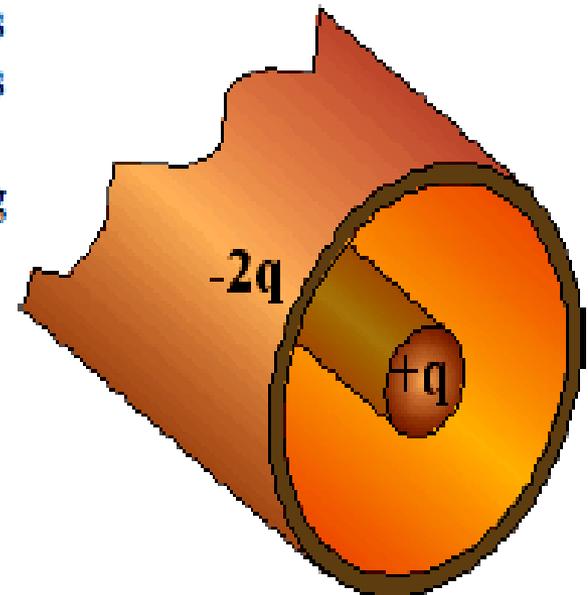
i.
$$E = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0 r L}$$

- b. Find the charge distribution on the conducting shell.

- i. $-q$ on inside and $-q$ on outside

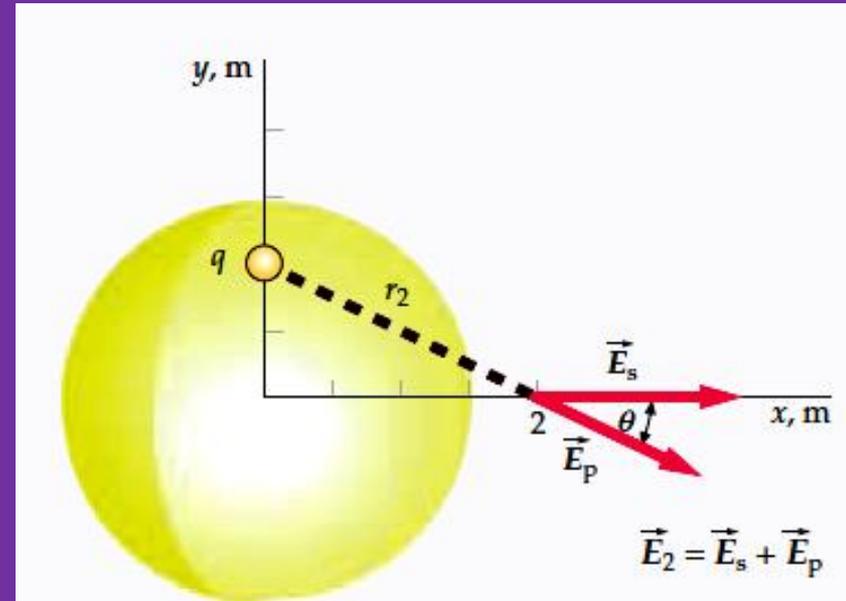
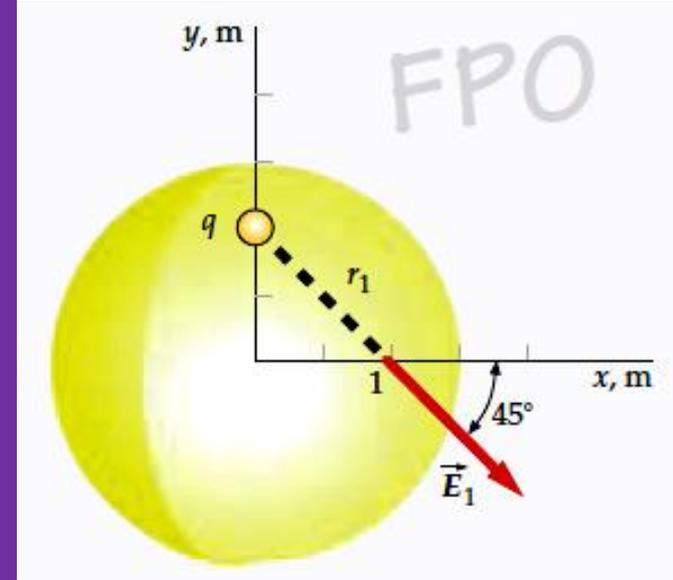
- c. Find the electric field in the region between the cylinder and the shell.

i.
$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r L}$$



Ejemplo

Una corteza esférica de radio $R = 3 \text{ m}$ tiene su centro en el origen y es portadora de una carga cuya densidad superficial es $\sigma = 3 \text{ nC/m}^2$. Una carga puntual $q = 250 \text{ nC}$ se encuentra sobre el eje y en $y = 2 \text{ m}$. Determine el campo eléctrico sobre el eje x en (a) $x = 2 \text{ m}$ y (b) en $x = 4 \text{ m}$



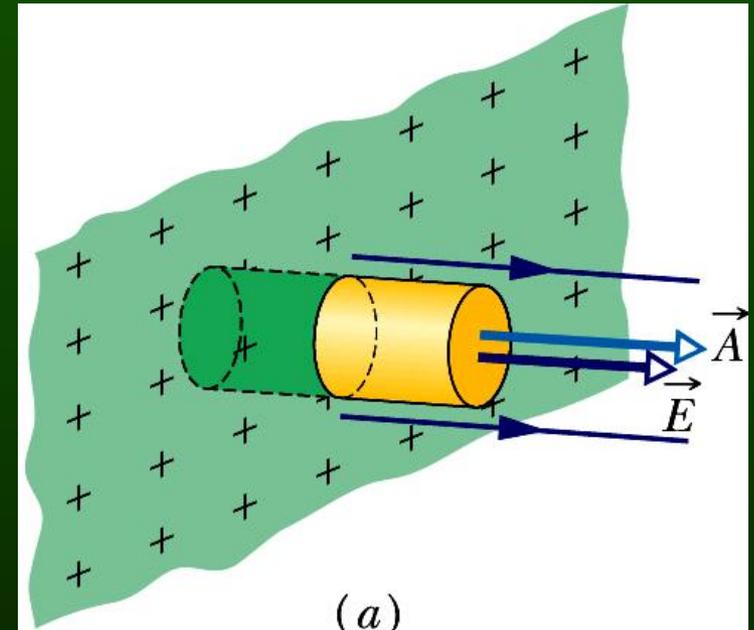
Ejemplo: Campo eléctrico en la cercanía de una placa plana conductora

- Considere una superficie gaussiana en forma de píldora (cilindro).
- En la cercanía externa E es perpendicular a la superficie
- En el interior E es nulo

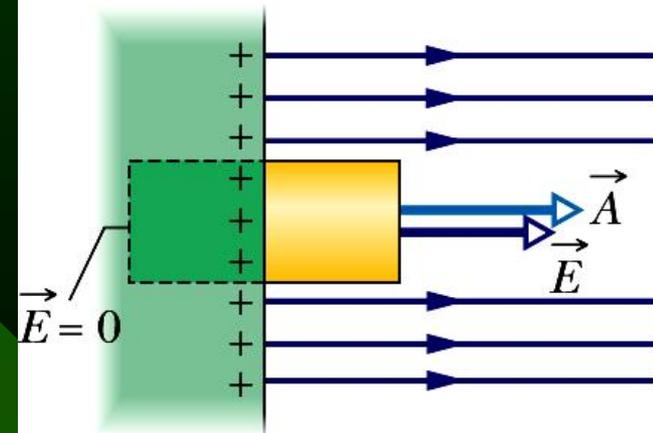
Por tanto

$$EA = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

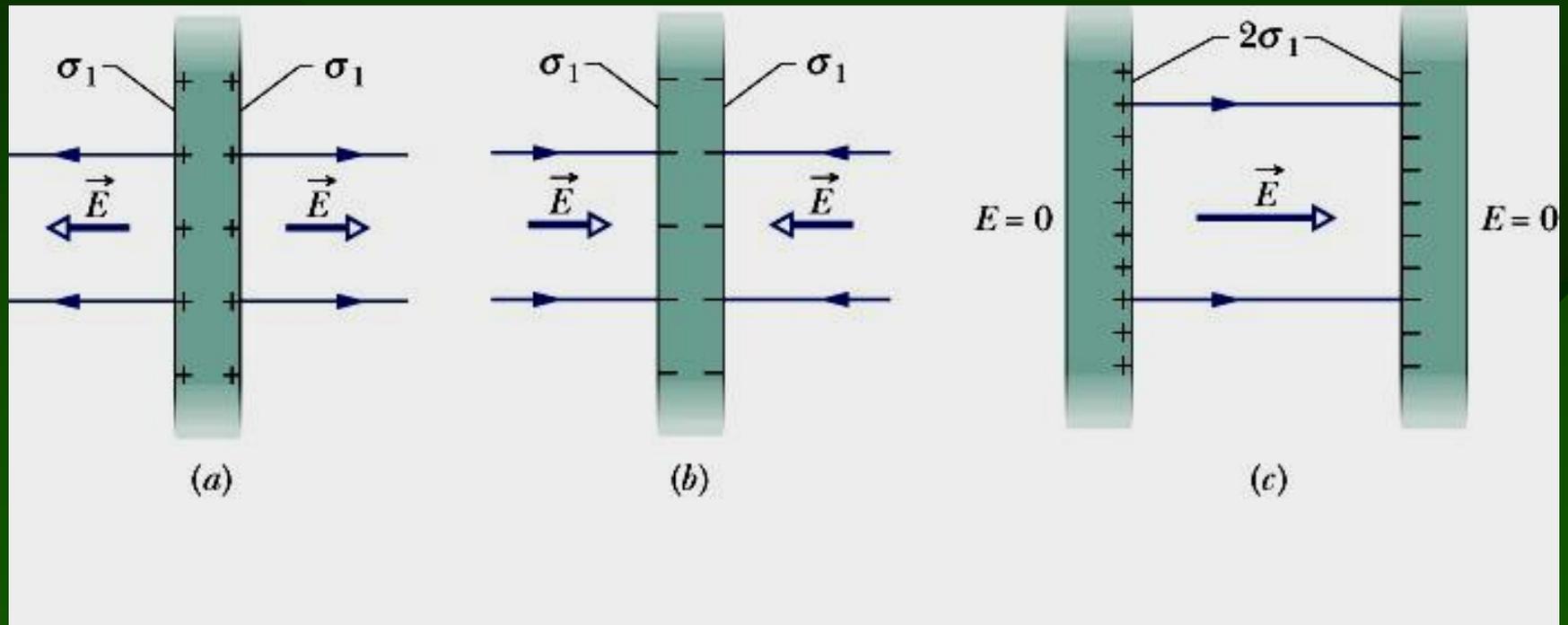


(a)

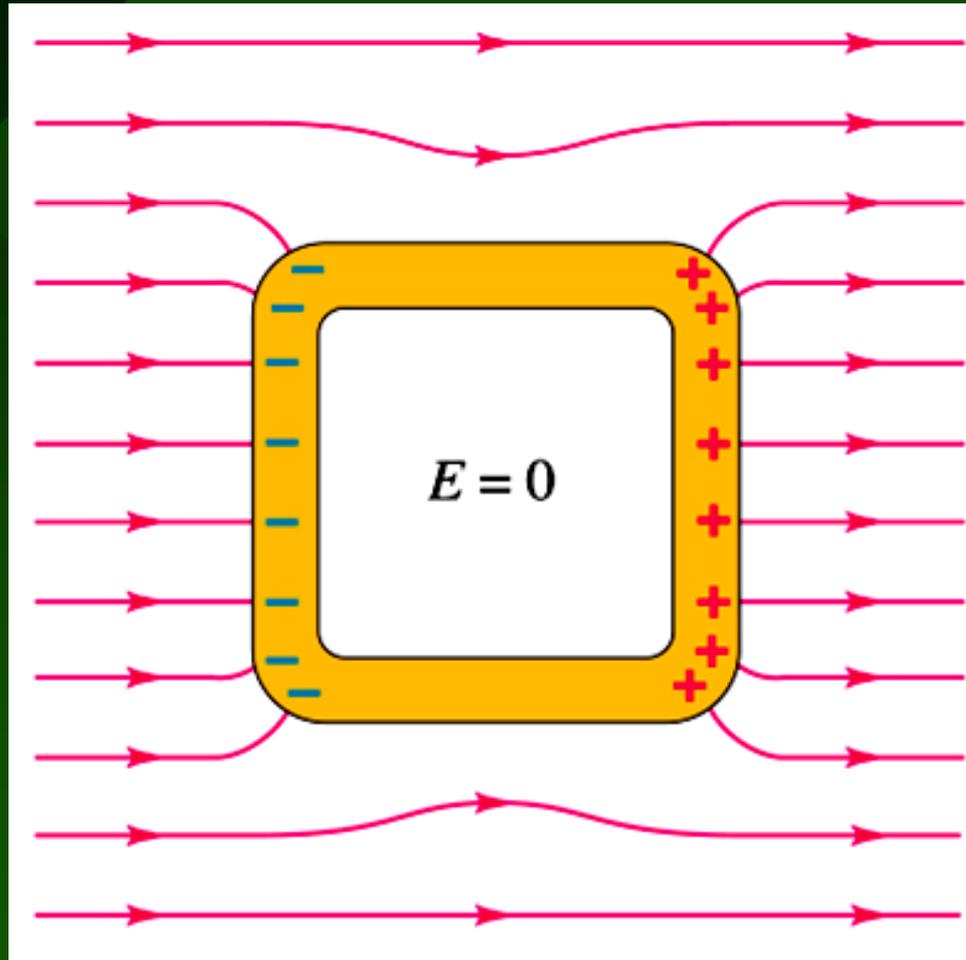


(b)

Campo entre dos placas conductoras



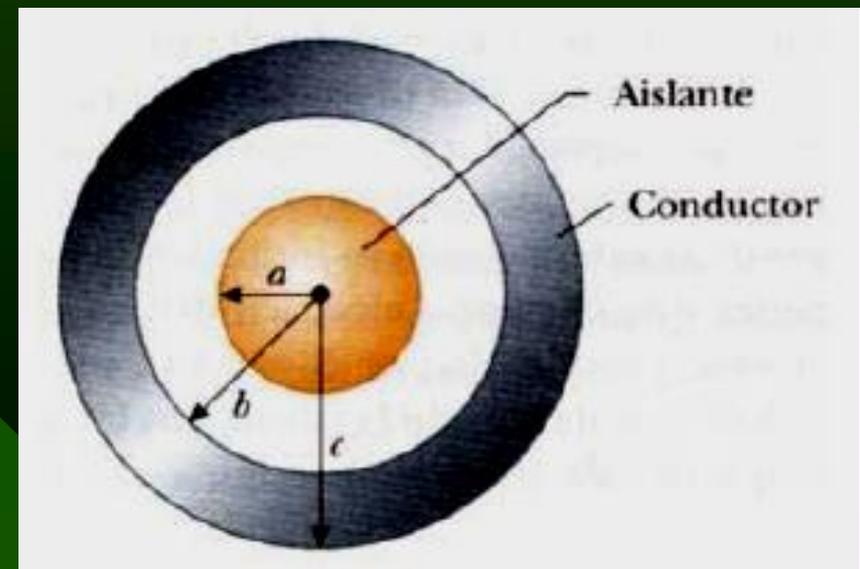
Campo Dentro de un conductor hueco



Ejemplo

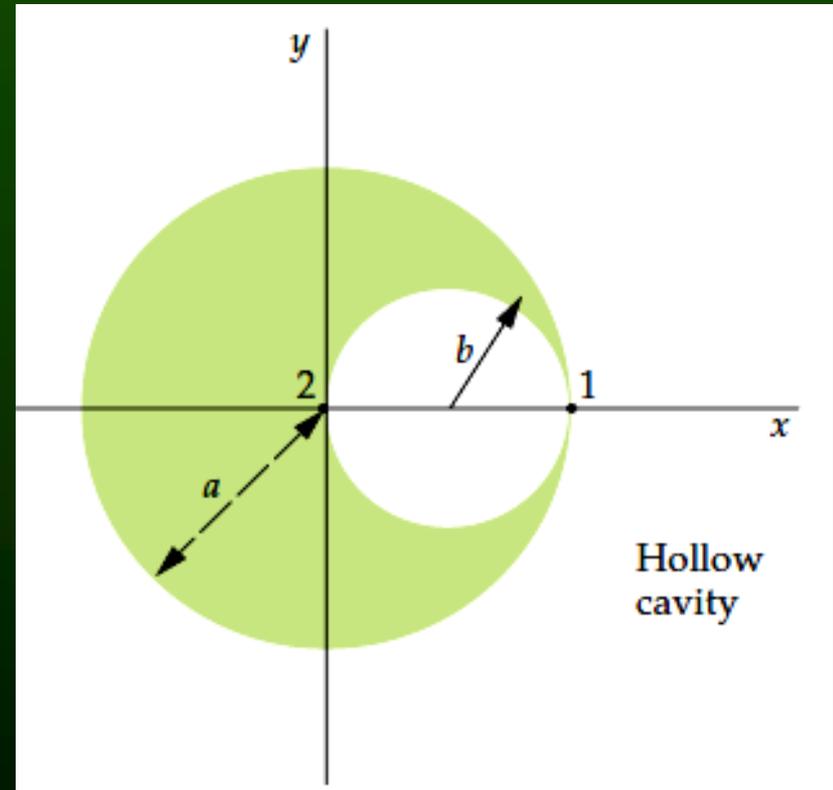
Una esfera aislante sólida de radio a tiene una densidad de carga uniforme ρ y una carga total Q . Concéntrica con ella está una esfera conductora hueca descargada cuyos radios interior y exterior son b y c , como se muestra en la figura:

- Determine la carga inducida por unidad de área en las superficies interior y exterior de la esfera hueca.
- Determinar la magnitud del campo eléctrico en las regiones $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$ y $r > c$.



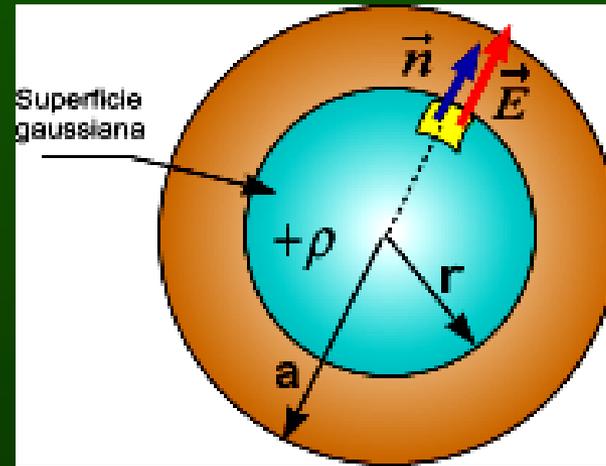
Ejemplo

Una esfera sólida no conductora de radio a con su centro en el origen tiene una cavidad de radio b con su centro en el punto como se muestra en la figura. La esfera tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ . Determine la intensidad de campo eléctrico en cualquier punto interior a la cavidad.



Solución

- El campo resultante dentro de la cavidad es la superposición de dos campos, uno E_+ , debido a la esfera de radio a considerada compacta con densidad de carga positiva uniforme ρ y el otro campo E_- , debido a la esfera de radio b considerada con densidad de carga negativa uniforme $-\rho$. Por tanto.
- El campo E_+ se obtiene tomando la superficie gaussiana mostrada y aplicando la ley de Gauss



$$\epsilon_0 \oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = Q_{enc}$$

$$\epsilon_0 \oint_{S,G} E \cos 0^\circ dA = \int \rho dV = \rho \int_0^r 4\pi r^2 dr$$

$$\epsilon_0 E (4\pi r^2) = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

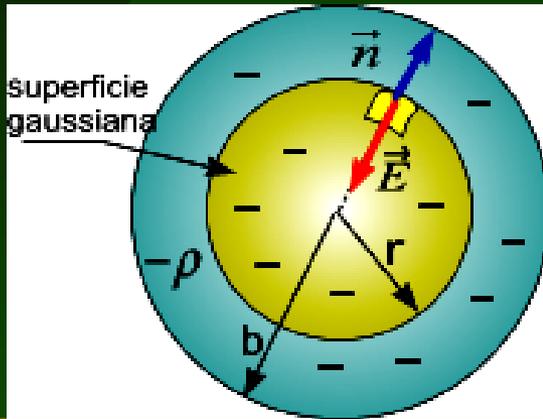
$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

Solución

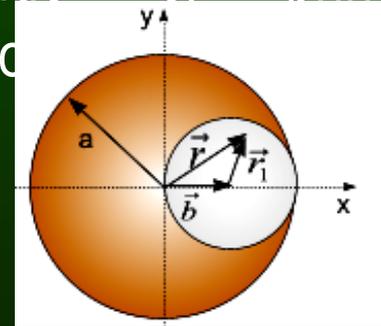
El campo E_{-} se obtiene tomando la superficie gaussiana mostrada y aplicando la ley de Gauss



$$\vec{E} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r e_r = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r \left(\frac{\vec{r}_1}{r} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_1$$

- Aplicando el principio de superposición



$$\epsilon_0 \oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = Q_{enc}$$

$$\epsilon_0 \oint_{S,G} E \cos 180^\circ dA = -\int \rho dV = -\rho \int_0^r 4\pi r^2 dr$$

$$-\epsilon_0 E (4\pi r^2) = -\rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

$$\vec{E} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r e_r$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_1$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}_1)$$

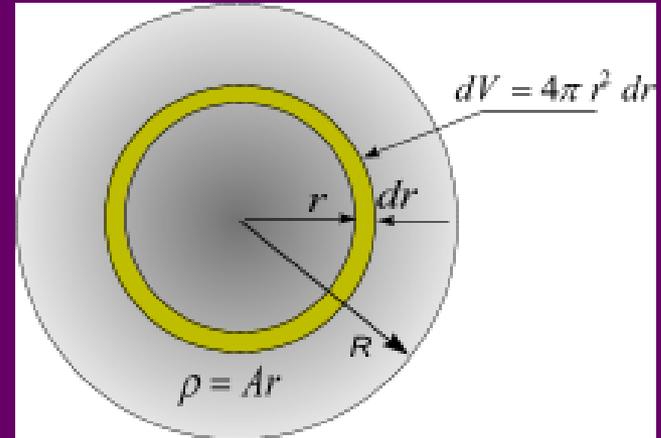
$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{b} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} b \vec{i}$$

Problema ejemplo N°

Una esfera sólida no conductora de radio R posee una densidad de carga proporcional a la distancia desde el centro dada por $\rho = Ar$ para $r < R$, donde A es una constante. (a) Encuentre la carga total sobre la esfera, (b) Encuentre la expresión para el campo eléctrico dentro de la esfera ($r < R$) y fuera de la esfera ($r > R$) y (c) represente la magnitud del campo eléctrico como una función de la distancia r .

Solución

➤ Parte (a)



$$dQ = \rho dV = (Ar)(4\pi r^2 dr)$$

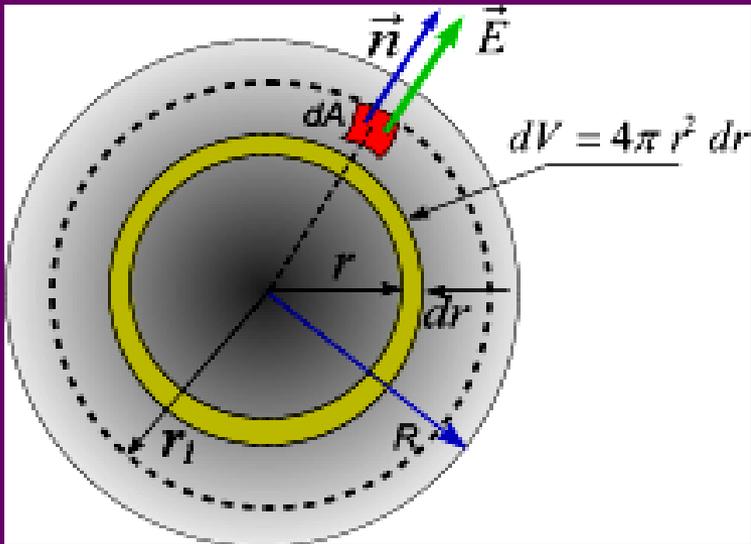
$$dQ = 4\pi Ar^3 dr$$

$$Q = \int dQ = 4\pi A \int_0^R r^3 dr$$

$$Q = 4\pi A \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R$$

$$Q = \pi AR^4$$

Solución Continua

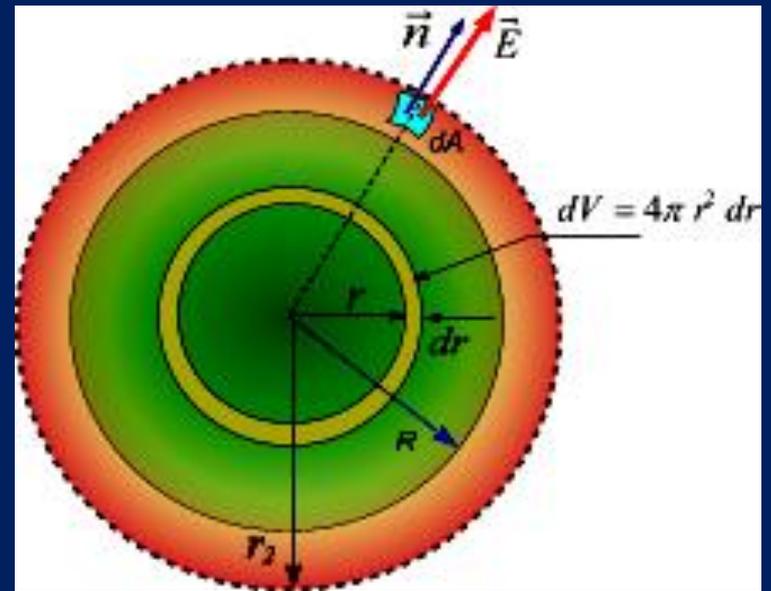


$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E_1(4\pi r_1^2) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho_r dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r_1} Ar(4\pi r^2 dr)$$

$$E_1(r_1^2) = \frac{A}{\epsilon_0} \int_0^{r_1} r^3 dr$$

$$E_1 = \frac{A}{4\epsilon_0} r_1^2$$



$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E_2(4\pi r_2^2) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho_r dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R Ar(4\pi r^2 dr)$$

$$E_2(r_2^2) = \frac{A}{\epsilon_0} \int_0^R r^3 dr$$

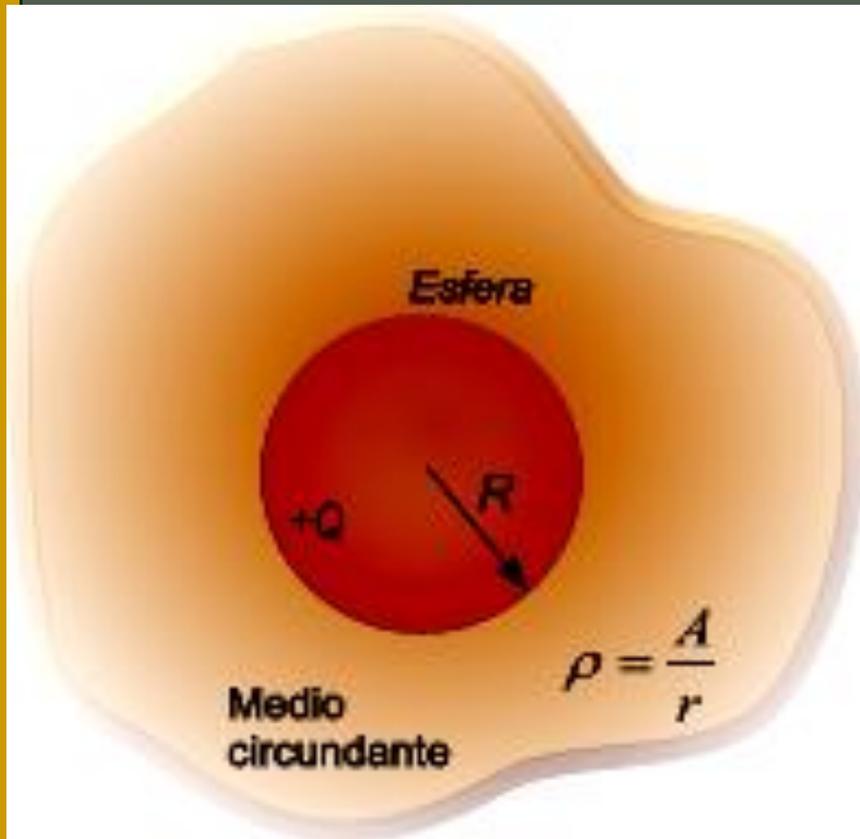
$$E_2 = \frac{AR^4}{4\epsilon_0 r_2^2} \quad \text{para } r > R$$

Ejemplo

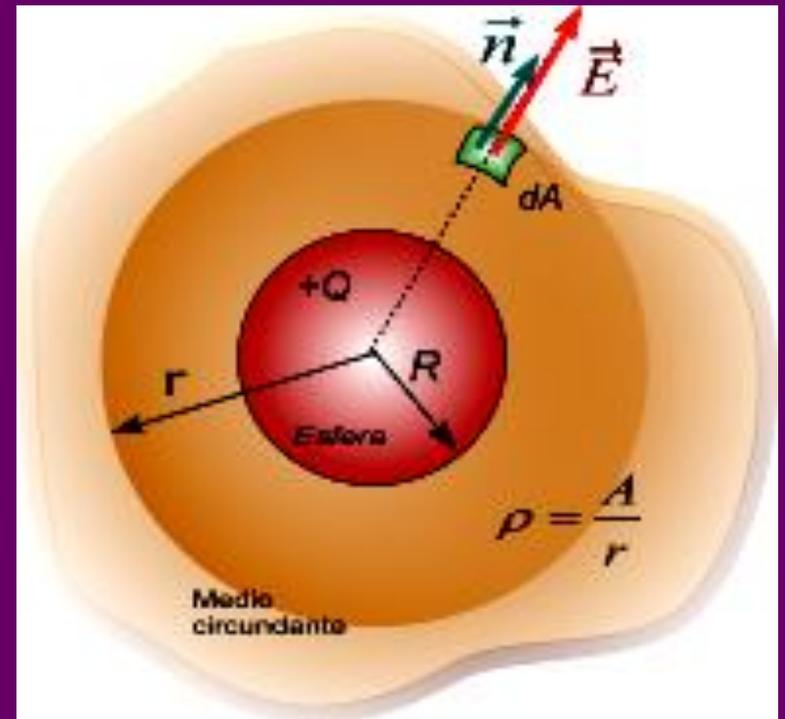
- Un sistema se compone de una bola de radio R , cuya carga tiene simetría esférica Q , y el medio circundante con densidad volumétrica de carga $\rho = A/r$, donde A es una constante y r , la distancia desde el centro de la bola. Determine la carga de esta última que asegure que el módulo del vector de intensidad de campo eléctrico fuera de ella no dependa de r . ¿Cuál es esta intensidad de campo?. Las constantes dieléctricas de la bola y del medio circundante se suponen iguales a la unidad.

Solución

- En la figura se muestra la esfera y el medio circundante



- Debido a que la esfera está en el interior del medio, escogemos una superficie gaussiana de forma esférica de radio $r > R$, que rodea a la esfera, como se muestra en la figura y aplicamos la ley de Gauss.



Solución

- Aplicando la ley de gauss se tiene

$$\epsilon_0 \oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = Q_{enc}$$

$$\epsilon_0 (4\pi r^2 E) = \left[Q + \int \rho dV \right] = \left[Q + \int_R^r \frac{A}{r} (4\pi r^2 dr) \right]$$

- La condición del problema exige

$$E(R) = E(r)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} [Q + 2\pi A(R^2 - R^2)] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} [Q + 2\pi A(r^2 - R^2)]$$

$$\frac{Q}{R^2} = \frac{Q}{r^2} + \frac{2\pi A(r^2 - R^2)}{r^2}$$

$$Q = 2\pi AR^2$$

- Integrando y simplificando

$$\epsilon_0 (4\pi r^2 E) = \left[Q + 4\pi A \left(\frac{r^2}{2} \right) \Bigg|_R^r \right] = [Q + 2\pi A(r^2 - R^2)]$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} [Q + 2\pi A(r^2 - R^2)]$$

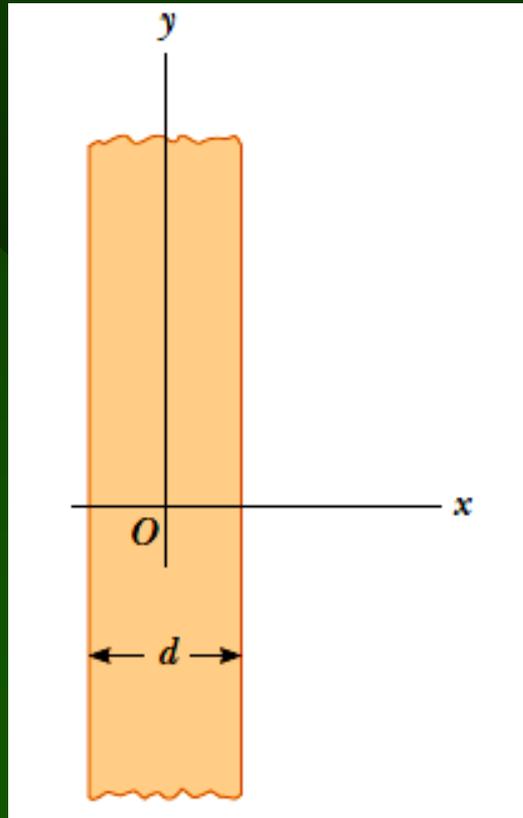
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} [Q + 2\pi A(r^2 - R^2)]$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} [2\pi AR^2 + 2\pi A(r^2 - R^2)]$$

$$\vec{E} = \frac{A}{2\epsilon_0} \vec{e}_r$$

Ejemplo

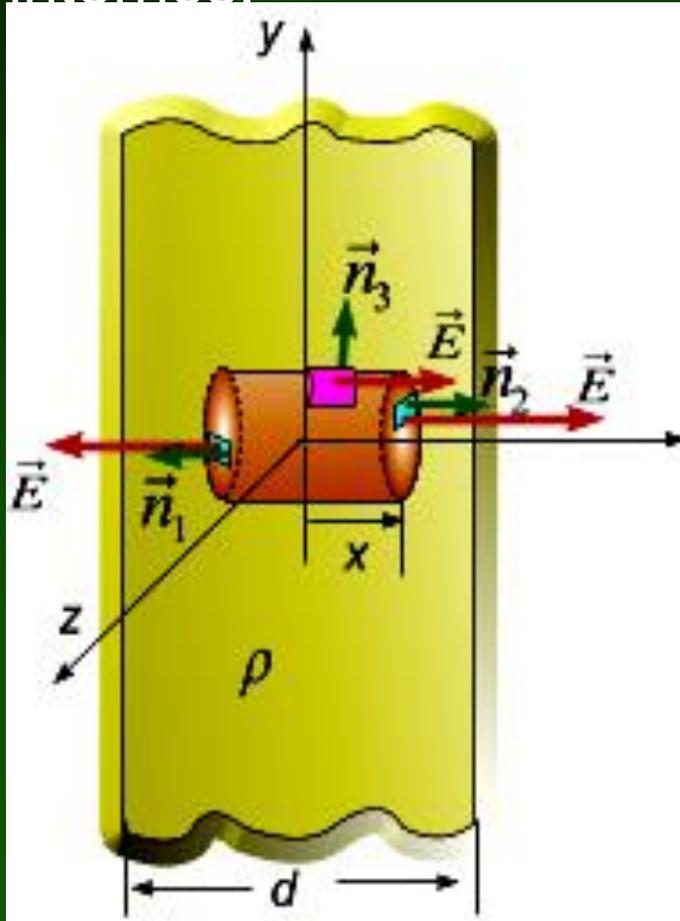
Una placa plana muy grande de espesor d es uniformemente cargada con una densidad de carga volumétrica ρ . Encuentre la intensidad de campo eléctrico para todos los puntos



Ejemplo

Solución

Parte (a) E para punto internos.



- Aplicando la ley de Gauss

$$\oiint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0}$$

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 dA = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0}$$

$$EA + EA + 0 = \frac{\rho V_{cil}}{\epsilon_0}$$

$$2E(\pi R^2) = \frac{\rho(\pi R^2(2x))}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} x \vec{i}$$

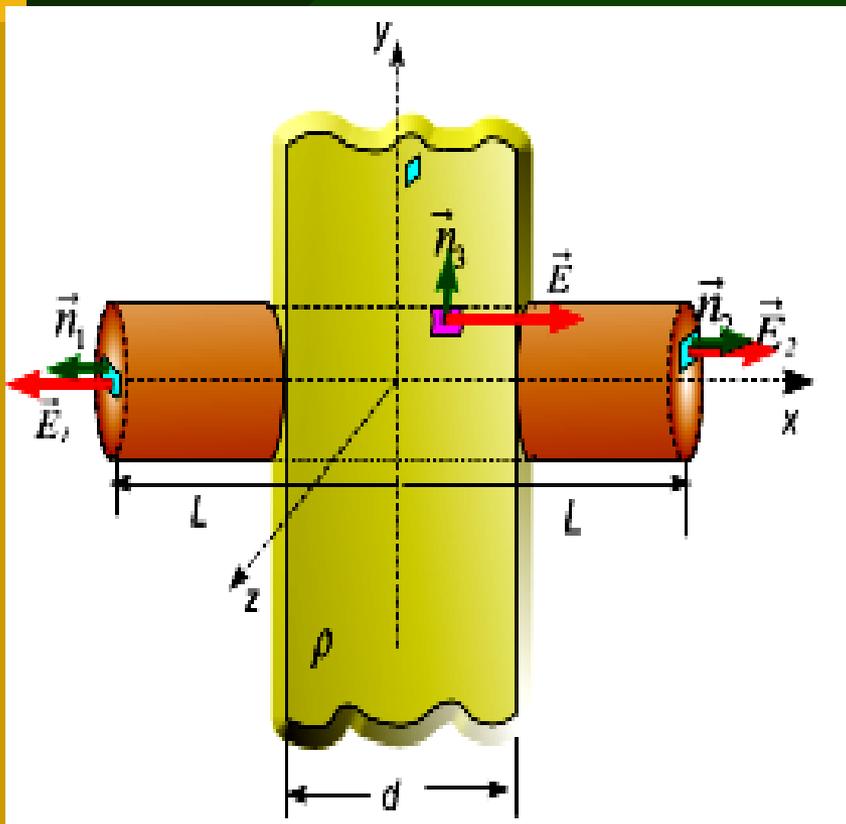
$$\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} x \vec{i} \quad \text{para } x > 0$$

$$\vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} x \vec{i} \quad \text{para } x < 0$$

Ejemplo

Solución

Parte (a) E para punto exteriores.



- Aplicando la ley de

$$\oint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0}$$

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dA + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dA + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 dA = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0}$$

$$EA + EA + 0 = \frac{\rho V_{cil}}{\epsilon_0}$$

$$2E(\pi R^2) = \frac{\rho(\pi R^2 d)}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \vec{i} \quad \text{para } x > 0$$

$$\vec{E} = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} \vec{i} \quad \text{para } x < 0$$

Ejemplo

- En la figura, una corteza esférica *no conductora* de radio interno $a = 2 \text{ cm}$ y radio externo $b = 2,40 \text{ cm}$, tiene una densidad de carga volumétrica positiva $\rho = A/r$ (dentro de su grosor), donde A es una constante y r es la distancia desde el centro de la cáscara. Adicionalmente, una carga puntual positiva $+q$ es localizada en el centro, como se muestra en la figura. ¿Qué valor debería tener A si el campo eléctrico dentro de la corteza debe permanecer uniforme (constante)?.

